10. Übungsblatt

Abgabetermin 9.1.2023

Übung 10.1 (5 Bonuspunkte) Beweisen Sie Lemma 2.6.4.

Übung 10.2 (5 Bonuspunkte) Zeigen Sie, dass der komplex projektive Raum $\mathbb{C}P^n = \frac{\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}}{C^\times}$ eine symplektische 2-Form besitzt, indem Sie eine geeignete Phasenraumreduktion von $(\mathbb{R}^{2n+1} \setminus \{0\} \cong \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}, \omega_{\mathrm{can}} = \mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}p_i)$ durchführen, wobei $\{q^j, p_i\}_{i,j\in\{1,\dots,n+1\}}$ Standardoordinaten von $\mathbb{R}^{2n+2}$ sind.
Hinweis: $\mathbb{C}P^n = \frac{\mathbb{S}^{2n+1}}{\mathrm{SO}(2)}$

Übung 10.3 (5 Bonuspunkte = 2 + 3 Bonuspunkte) Es sei $\phi\colon M \times G \to M$ eine (freie und eigentliche) Rechtswirkung. In Aufgabe 9.1 haben wir gesehen, dass $T_*\phi\colon T^*M \times G \to T^*M$ wieder eine (freie und eigentliche) Rechtswirkung ist, die mit Aufgabe 4.3 auch eine Poissonwirkung bezüglich $\omega_0 \in \Omega^2(T^*M)$ ist. Betrachten Sie, die Abbildung

$$J\colon T^*M \mapsto \mathfrak{g}^*,$$

die gegeben ist durch $J(\alpha_p)(\xi) = \alpha_p(\xi_M(p))$. Zeigen Sie:

(a) J ist eine Impulsabbildung und $0 \in \mathfrak{g}^*$ ist ein regulärer Wert.

(b) Für die Phasenraumreduktion gilt

$$((T^*M)_{\mathrm{red}}, (\omega_0)_{\mathrm{red}}) \cong (T^*(M/G), \omega_0)$$

als Poissonmannigfaltigkeiten.

Übung 10.4 (5 Bonuspunkte) Finden Sie ein Beispiel für eine Poissonwirkung auf (M, π) with $\pi \neq 0$, die keine Impulsabbildung beitzen kann.