12. Übungsblatt

Abgabetermin 23.1.2023

Übung 12.1 (10 Punkte = 2+3+2+3 Punkte) Es sei M eine Mannigfaltigkeit und ∇ eine torsionsfreie kovariante Ableitung. Wir definieren

$$D\colon \Gamma^\infty(\mathrm{S}^\bullet T^*M) \ni S \mapsto \mathrm{d}x^i \vee \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} S \in \Gamma^\infty(\mathrm{S}^{\bullet+1}T^*M)$$

und damit

$$T_{\nabla,t}\colon \mathscr{C}^\infty(M) \ni f \mapsto \mathrm{e}^{tD}(f) \in \prod_{i=0}^\infty \Gamma^\infty(\mathrm{S}^i T^*M)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ gilt

$$D^k(f) = \frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_k}} \mathrm{d}x^{i_1} \vee \cdots \vee \mathrm{d}x^{i_k} + \text{ Terme die höchstens } k-1 \text{ Ableitungen von f enthalten}$$

(b) Für $S \in \bigoplus_{i=0}^\infty \Gamma^\infty(\mathrm{S}^i TM)$ definiert

$$\mathscr{C}^\infty(M) \ni f \mapsto \Phi_{\nabla,t}(S)(f) := \langle T_{\nabla,t}(f), S\rangle \in \mathscr{C}^\infty(M)$$

einen Differentialoperator, wobei wir hier $(\mathrm{S}^k TM)^* \cong \mathrm{S}^k T^*M$ identifizieren.

(c) Für $S \in \Gamma^\infty(S^k TM)$ hat $\Phi_{\nabla,t}(S)$ das Symbol $t^k S$ (siehe Aufgabe 11.4).

(d) Die Abbildung $\Phi_{\nabla,t}$ ist ein Isomorphismus für $t \neq 0$.

Übung 12.2 (5 Punkte = 2+3 Punkte) Es sei V ein $\mathbb{k}$-Vektorraum. Wir betrachten den $\mathbb{k}[[t]]$-Modul $V[[t]]$ und die folgende Abbildung

$$o(v) = \min\{k \in \mathbb{N}_0 \mid v_k \neq 0, \text{ wobei } v = \sum_{i=0}^\infty t^i v_i\},$$

wobei wir $o(0) = \infty$ setzen. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $d\colon V[[t]] \times V[[t]] \to \mathbb{R}_{>0}$, die gegeben ist durch

$$d(v, w) = 2^{-o(v-w)},$$

ist eine Metrik auf $V[[t]]$.

(b) Der toplogische Raum $(V[[t]], d)$ ist vollständig und die Polynome $V[t]$ liegen dicht.

Übung 12.3 (5 Punkte) Es sei $\star$ eine Quantisierung einer Poissonmannigfaltigkeit (M, π) und es sei $D \in \mathrm{DiffOp}(M)[[\hbar]]$ eine Derivation von $\star$, d.h.

$$D(a \star b) = D(a) \star b + a \star D(b)$$

für alle $a, b \in \mathscr{C}^\infty(M)[[\hbar]]$. Zeigen Sie, dass es ein Poissonvektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ gibt so, dass

$$D = X + \sum_{i=1}^{\infty} \hbar^i D_i.$$