13. Übungsblatt

Abgabetermin 30.1.2023

Übung 13.1 (5 Punkte) Es sei $\mathfrak{g}$ eine reelle Liealgebra. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{S}^n\mathfrak{g} \cong \frac{\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{(n)}}{\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{(n-1)}}$$

als Vektorräume.

Übung 13.2 (7 Punkte = 3+4 Punkte) Es sei G eine Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{g}$. Wir bezeichnen mit

$$\mathrm{DiffOp}(G)^G = \{D \in \mathrm{DiffOp}(G) \mid \ell_g^* \circ D = D \circ \ell_g^* \text{ für alle } g \in G\}$$

die linksinvarianten Differentialoperatoren. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung
$$\mathscr{L} \colon \mathfrak{g} \ni \xi \mapsto \mathscr{L}_{X_\xi} \in \mathrm{DiffOp}(G)_L^G$$
ist ein Liealgebramorphismus.

(b) Die eindeutige Abbildung $\hat{\mathscr{L}} \colon \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{DiffOp}(G)^G$ ist ein Isomorphismus.

Übung 13.3 (8 Punkte = 2+6 Punkte) Es sei M eine Mannigfaltigkeit. Wir betrachten die Abbildung

$$\mathscr{L} \colon \mathfrak{X}(M) \ni X \mapsto \mathscr{L}_X \in \mathrm{DiffOp}(M)_L.$$

Zeigen Sie:

(a) $\mathscr{L}$ ist ein Liealgebramorphismus.

(b) Die eindeutige Abbildung $\hat{\mathscr{L}} \colon \mathcal{U}(\mathfrak{X}(M)) \to \mathrm{DiffOp}(M)_L$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.