14. Übungsblatt

Abgabetermin 6.2.2023

Übung 14.1 (5 Punkte = 2+3 Punkte) Es sei $p\colon P \to M$ ein Hauptfaserbündel mit Strukturgruppe G und der Rechtswirkung $\Phi\colon P \times G \to P$. Zeigen Sie:

(a) Für einen Differentialoperator $D \in \mathrm{DiffOp}(P)$ mit $\Phi_g^* \circ D = D \circ \Phi_g^*$ gibt es einen eindeutigen Differentialoperator $\hat{D} \in \mathrm{DiffOp}(M)$ mit $p^* \circ \hat{D} = D \circ p^*$.

(b) Für ein invariantes Sternprodukt $\star$ auf P (d.h. $\Phi_g^*(f \star h) = \Phi_g^* f \star \Phi_g^* h$ für alle $g \in G$ und $f, h \in \mathscr{C}^\infty(P)[[\hbar]]$) existiert ein eindeutiges Sternprodukt $\hat{\star}$ auf M mit $p^*(f \hat{\star} h) = p^* f \star p^* h$ für alle $f, h \in \mathscr{C}^\infty(M)$.

Übung 14.2 (5 Punkte = 3+2 Punkte) Es sei (M, π) eine Poisson Mannigfaltigkeit. Ein Spurfunktional $\mathrm{tr}\colon \mathscr{C}_c^\infty(M) \to \mathbb{C}$ ist eine $\mathbb{C}[[\hbar]]$-lineare Abbildung, so dass

$$\mathrm{tr}(\{f, g\}) = 0.$$

für alle $f, g \in \mathscr{C}_c^\infty(M)$.

(a) Zeigen Sie, dass für eine $2n$-dimensionale symplektische Mannigfaltigkeit (M, ω) die Abbildung

$$\mathrm{tr}(f) := \int_M f \omega^n$$

ein Spurfunktional ist.

(b) Zeigen Sie, dass für $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{\mathrm{can}})$ und dem daraus konstruierten Sternprodukt $\star$ (Gleichung 3.2.1) sogar gilt

$$\mathrm{tr}(f \star g) = \mathrm{tr}(g \star f).$$

Übung 14.3 (5 Punkte) Es sei M eine Mannigfaltigkeit und $\star$ ein Sternprodukt. Es sei weiter $S \in \mathrm{DiffOp}(M)[[\hbar]]$, so dass $S(f) = f + \mathcal{O}(\hbar)$ für alle $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ mit

$$S(f \star g) = S(f) \star S(g).$$

Zeigen Sie, dass es eine Derivation $D \in \mathrm{DiffOp}(M)[[\hbar]]$ von $\star$ gibt, so dass $S = \mathrm{e}^{\hbar D}$.

Hinweis: Wenn Sie D konstruiert haben, dann können Sie wie folgt vorgehen: Definieren Sie

$$E(a,b) = D(a) \star b + a \star D(b) - D(a \star b)$$

und zeigen Sie, dass $D^k(a \star b) - \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} D^i(a) \star D^{k-i} b = \sum_{r,s,t=0}^{k-1} c_{rst}^{(k)} D^r E(D^s(a), D^t(b))$ für Konstanten $c_{rst}^{(k)} \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie danach, dass E die Fixpunktgleichung

$$E(a,b) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\hbar^k}{k!} \sum_{r,s,t=0}^{k-1} c_{rst}^{(k)} D^r E(D^s(a), D^t(b))$$

erfüllt.

Übung 14.4 (5 Punkte) Es sei M eine Mannigfaltigkeit und ∇ eine torsionsfreie kovariante Ableitung. Zeigen Sie, dass das Produkt

$$P \circ_t Q := \Phi_{\nabla,t}^{-1}(\Phi_{\nabla,t}(P) \circ \Phi_{\nabla,t}(Q))$$

für die Abbildung $\Phi_{\nabla,t} \colon \Gamma^\infty(\mathrm{S}TM) \to \mathrm{DiffOp}(M)$ aus Aufgabe 12.1 für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ assoziativ ist und sich auf $t = 0$ als das das symmetrische Produkt auf $\Gamma^\infty(\mathrm{S}TM)$ glatt fortsetzen lässt.