Übungsblatt 2

Abgabe: 31.10.2022

Übung 2.1 (5 Punkte) Berechnen Sie für ein beliebiges Bivektorfeld $\pi \in \Gamma^\infty(\Lambda^2 TM)$ das Trivektorfeld $[\![\pi, \pi]\!]_{\mathrm{S}}$ in einer lokalen Karte (U, x) and zeigen Sie dann

$$[\![\pi, \pi]\!]_{\mathrm{S}}\big|_U = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \pi^{ij}\frac{\partial \pi^{kl}}{\partial x^j} + \pi^{lj}\frac{\partial \pi^{ik}}{\partial x^j} + \pi^{kj}\frac{\partial \pi^{li}}{\partial x^j} = 0 \text{ für alle } i, k, l,$$

wobei $\pi\big|_U = \frac{1}{2}\pi^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$.

Übung 2.2 (5 Punkte = 3+2 Punkte)

(*i*) Es seien $E, F \to M$ Vektorbündel und es sei $\Phi\colon E \to F$ eine Vektorbündelabbildung über der Identität. Dann ist $M \ni p \mapsto \dim(\operatorname{im}\Phi(E_p)) \in \mathbb{N}$ unterhalbstetig.

(*ii*) Zeigen Sie Lemma 2.1.9 .

Übung 2.3 (10 Punkte = 3+2+2+3)

(*i*) Wir betrachten die Abbildung $\phi\colon [0,1) \to [0,\infty)$

$$\phi(t) = t\chi(t) + (1-\chi(t))\mathrm{e}^{\frac{1}{1-t}}$$

für eine glatte Funktion $\chi\colon [0,1) \to \mathbb{R}_0^+$ mit $\chi\big|_{[0,\frac{1}{2})} = 1$ und $\chi\big|_{[\frac{3}{4},1)} = 0$. Zeigen Sie, dass man χ so wählen kann, dass ϕ ein Diffeomorphismus ist.

(*ii*) Zeigen Sie, dass für alle $n \geq 1$ die Abbildung

$$\Phi\colon B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n \ni y \mapsto \tfrac{y}{\|y\|}\phi(\|y\|) \in \mathbb{R}^n$$

ein Diffeomorphismus ist.

(*iii*) Zeigen Sie, dass die Vektorfelder $X_i := \Phi^*\frac{\partial}{\partial x^i} \in \Gamma^\infty(TB_1(0))$ paarweise kommutieren und sich zu paarweise kommutierenden Vektorfeldern auf $\mathbb{R}^n$ fortsetzen lassen, welche auf $B_{\frac{1}{2}}(0)$ mit den üblichen Koordinatenvektorfeldern übereinstimmen.

(*iv*) Zeigen Sie damit folgendes Lemma:

Lemma *Es sei M eine Mannigfaltigkeit und $\pi_p \in \Lambda^2 T_pM$ ein Bivektor. Dann existiert ein Poisson Bivektorfeld $\pi \in \Gamma^\infty(\Lambda^2 TM)$ mit $\pi(p) = \pi_p$.*