Übungsblatt 3

Abgabe: 7.11.2022

Übung 3.1 (5 Punkte = 3+2 Punkte)

(*i*) Zeigen Sie *Milnor's exercise*: Es sei $\phi\colon \mathscr{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$ ein einserhaltender Algebramorphismus, dann gilt $\phi(f) = \delta_m(f) := f(m)$ für ein eindeutiges $m \in M$.

(*ii*) Zeigen Sie damit, dass jeder Algebramorphismus $\Phi\colon \mathscr{C}^\infty(N) \to \mathscr{C}^\infty(M)$ der pullback einer glatten Abbildung $\phi\colon M \to N$ ist.

Übung 3.2 (5 Punkte = 1+2+1+1 Punkte) Eine Liegruppe ist eine Mannigfaltigkeit G, so dass die Gruppenmultiplikation und somit auch die Inversenabbildung glatt sind.

(*i*) Es bezeichne $\ell_g\colon G \to G$ die Abbildung $\ell_g(h) = gh$. Zeigen Sie, dass ℓ_g für alle $g \in G$ ein Diffeomorphismus ist.

(*ii*) Ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(G)$ heißt linksinvariant, wenn $\ell_g^* X = X$ für alle $g \in G$ gilt. Zeigen Sie, dass die linksinvarianten Vektorfelder $\mathfrak{X}(G)^G$ eine endlichdimensionale Liealgebra bilden indem Sie zeigen, dass

$$L_G\colon \mathfrak{X}(G)^G \ni X \mapsto X(e) \in T_eG =: \mathfrak{g}$$

ein Isomorphismus ist. Hier bezeichne $e \in G$ das neutrale Element von G.

(*iii*) Zeigen Sie, dass linksinvariante Vektorfelder immer einen vollständigen Fluss haben.

(*iv*) Zeigen Sie, dass für jeden glatten Gruppenmorphismus $\phi\colon G \to H$ die Abbildung

$$\mathsf{Lie}(\phi) = L_H^{-1} \circ T_e\phi \circ L_G\colon \mathfrak{X}(G)^G \to \mathfrak{X}(H)^H$$

ein Lie-Algebramorphismus ist.

Übung 3.3 (5 Punkte = 3+2 Punkte) Es sei (M, π) eine n-dimensionale Poissonmannigfaltigkeit mit einer Volumenform $\mu \in \Gamma^\infty(\Lambda^n T^*M)$.

(*i*) Zeigen Sie, dass die eindeutige Abbildung $\Delta_\mu\colon \mathscr{C}^\infty(M) \to \mathscr{C}^\infty(M)$, die

$$\Delta_\mu(f)\mu = \mathscr{L}_{X_f}\mu$$

erfüllt, ein Poisson Vektorfeld ist.

(ii) Zeigen Sie, dass wenn μ' eine weitere Volumenform ist, dann existiert eine Funktion g, so dass $\Delta_\mu - \Delta_{\mu'} = X_g$.

Übung 3.4 (5 Punkte = 1+2+2 Punkte) Es sei (M, π) eine Poissonmannigfaltigkeit und $p \in M$. Wir bezeichnen mit $\nu_p(\pi) = T_pM/\operatorname{im}(\pi^\sharp(p))$, sowie $\nu_p(\pi)^* \hookrightarrow T_p^*M$ den Dualraum.

(i) Zeigen Sie, dass $\nu_p(\pi)^* = \{\mathrm{d}f\big|_p \mid f \in \mathscr{C}^\infty(M) \text{ mit } X_f\big|_p = 0\}$

(ii) Zeigen Sie, dass

$$[\,\cdot\,,\,\cdot\,]\colon \nu_p(\pi)^* \times \nu_p(\pi)^* \ni (\mathrm{d}f\big|_p, \mathrm{d}g\big|_p) \mapsto \mathrm{d}\{f, g\}\big|_p \in \nu_p(\pi)^*$$

für $f, g \in \mathscr{C}^\infty(M)$ mit $X_f\big|_p = X_g\big|_p = 0$ eine Lieklammer definiert.

(iii) Es sei nun (N, π_N) eine weitere Poissonmannigfaltigkeit und $\phi\colon M \to N$ eine immersive Poissonabbildung. Zeigen Sie, dass $T_p\phi(\operatorname{im}\pi^\sharp(p)) \subseteq \operatorname{im}\pi_N^\sharp(\phi(p))$ und, dass die induzierte Abbildung

$$\nu_p(\phi)^*\colon \nu_{\phi(p)}(\pi_N)^* \to \nu_p(\pi)^*$$

ein Liealgebramorphismus ist.