Übungsblatt 4

Abgabe: 14.11.2022

Übung 4.1 (5 Punkte) Zeigen Sie Proposition 2.3.1.

Übung 4.2 Es sei (M, π) eine Poissonmannigfaltigkeit, so dass $\pi(p) = 0$. Nach Aufgabe 3.4 wissen wir, dass

$$[\,\cdot\,,\,\cdot\,]\colon T_p^*M \times T_p^*M \ni (\mathrm{d}f\big|_p, \mathrm{d}g\big|_p) \mapsto \mathrm{d}\{f, g\}\big|_p \in T_p^*M$$

eine Lieklammer definiert. Nach Korollar 2.3.3 wissen wir nun auch, dass diese eine lineare Poissonklammer ϕ_{lin} auf T_pM induziert. Eine Poissonstruktur π mit $\pi(p) = 0$ heißt linearisierbar bei p, wenn es einen lokalen Diffeomorphismus $\phi\colon U \to V$, wobei $U \subseteq T_pM$ eine Umgebung von 0_p ist und $V \subseteq M$ eine Umgebung von p ist, gibt mit $\phi(0_p) = p$ der eine Poissonabbildung ist. Finden Sie jeweils ein Beispiel für eine linearisierbare und eine nicht-linearisierbare Poissonstruktur.

Hinweis: Im $\mathbb{R}^2$ ist jedes Bivektorfeld ein Poissonbivektorfeld.

Übung 4.3 (Punkttransformationen, 5 Punkte = 1+4 Punkte) Es seien (M_i, ω_i) symplektische Manigfaltigkeiten. Eine glatte Abbildung $\phi\colon M_1 \to M_2$ heißt Symplektomorphismus wenn $\phi^*\omega_2 = \omega_1$.

(*i*) Zeigen Sie, dass ein Symplektomorphismus genau dann eine Poissonabbildung ist, wenn er ein lokaler Diffeomorphismus ist.

(*ii*) Es sei $\phi\colon Q \to Q'$ ein Diffeomorphismus, dann definieren wir

$$T_*\phi\colon T^*Q \ni \alpha_p \mapsto \alpha_p \circ T_{\phi(p)}\phi^{-1} \to T^*Q'.$$

Zeigen Sie, dass $T_*\phi$ ein Symplektomorphismus bezüglich der kanonischen symplektischen Formen auf T^*Q und T^*Q' ist.

Übung 4.4 (5 Punkte = 4+1 Punkte) Es sei (Q, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und es sei $V \in \mathscr{C}^\infty(Q)$. Wir betrachten $g^{-1} \in \Gamma^\infty(\mathrm{S}^2TQ)$ und definieren die Funktion

$$H\colon T^*Q \ni \alpha_q \mapsto \frac{1}{2}g^{-1}(\alpha_q, \alpha_q) + V(q) \in \mathbb{R}.$$

Wir bezeichnen mit $p\colon T^*M \to M$ die Bündelprojektion.

(i) Zeigen sie, dass die Kurve

$$\gamma\colon I \ni t \mapsto p(\Phi_t^{X_H}(\alpha_p)) \in Q,$$

wobei X_H das Hamilton'sche Vektorfeld bezüglich der kanonischen Poissonklammer auf T^*Q bezeichne, das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \dot\gamma(0) = g^\flat(\alpha_q) \\ \nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t) = -\operatorname{grad} V(\gamma(t)) \end{cases}$$

löst.

(ii) Es sei $A \in \Omega^1(M)$. Wir betrachten den Diffeomorphismus

$$T_A\colon T^*Q \ni \alpha_q \mapsto \alpha_q + A(q) \in T^*Q.$$

Zeigen Sie, dass $T_A^*\omega_0 = \omega_0 - p^*\,\mathrm{d}A$.

Hinweis: [für Physiker] In Aufgabe (i) können wir H als Energiefunktion mit kinetischem und potentiellem Teil auffassen. Die Integralkurve des Hamilton'schen Vektorfeldes liefert dann die Newton'schen Bewegungsgleichungen. In Aufgabe (ii) übernimmt A die Rolle eines Vektorpotentials für ein Magentfeld $B = \mathrm{d}A$ und $(T^*Q, \omega_0, T_{-A}^*H)$ beschreibt die Bewegungsglichung eines Teilchens mit angeschaltetem Magnetfeld. Der Diffeomrophismus induziert nun eine Isomorphismus von Hamilton'sche Systemen:

$$T_{-A}\colon (T^*Q, \omega_0, T_{-A}^*H) \longrightarrow (T^*Q, \omega_0 - p^*B, H).$$

Ist nun ein magnetischer Monopol anwesend, dann gilt $\mathrm{d}B = 0$, aber es existiert kein globales Vektorpotential A. Nichtsdestotrotz ergibt die rechte Seite noch Sinn, da sie nicht von A abhängt.