http://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/lehre/ws2022/DQ/

Übungsblatt 5

Abgabe: 21.11.2022

Übung 5.1 (5 Punkte) Zeigen Sie Lemma 2.4.2.

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, dass die Aussage an einem Punkt trivial ist und benutzen Sie weiter, dass die Flüsse kommutierender Vektorfelder kommutieren.

Übung 5.2 (5 Punkte = 2+3 Punkte) Es sei $\mathfrak{g}$ eine endlich dimensionale Lie-Algebra und $(\,\cdot\,)_M \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ ein Lie-Algebramorphismus.

(*i*) Für eine Basis $\{e_i\}_{i\in\{1,\dots,k\}} \subseteq \mathfrak{g}$ definieren wir für die zugehörigen Koordinaten x_i von $\mathfrak{g}^*$

$$\pi_M = \frac{1}{2} x_k C_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_\ell} \wedge (e_\ell)_M \in \mathfrak{X}(\mathfrak{g}^* \times M),$$

wobei die C_{ij}^k die Strukturkonstanten der Lie-Algebra sind. Zeigen Sie, dass π ein Poissonbivektorfeld ist.

(*ii*) Es sei nun G eine Liegruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Zeigen Sie für $(\,\cdot\,)_G \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(G)$ mit

$$(\xi)_G(g) = T_e \ell_g(\xi),$$

dass (T^*G, π_0) (π_0 ist das Poissonbivektorfeld zu der kanonischen symplektischen Struktur ω_0) und $(\mathfrak{g}^* \times G, \pi_G)$ als Poissonmannigfaltigkeiten isomorph sind.

Übung 5.3 (5 Punkte = 1+2+2 Punkte) Es sei $(\mathfrak{g}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ eine endlich dimensionale reelle Lie-Algebra mit Basis $\{e_i\}_{1\le i\le N}$ und es sei $\lambda \in \Lambda^2\mathfrak{g}^*$ mit $C_{ij}^k \lambda_{k\ell} e^i \wedge e^j \wedge e^\ell = 0$ gegeben, wobei $\{e^i\}_{1\le i\le N}$ die duale Basis zu $\{e_i\}_{1\le i\le N}$ ist und die C_{ij}^k durch $[e_i, e_j] = C_{ij}^k e_k$ eindeutig definiert sind. Zeigen Sie :

(*i*) $\pi_\lambda = \pi_{\mathfrak{g}} + \lambda_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} \in \mathfrak{X}^2(\mathfrak{g}^*)$ ist ein Poissonbivektorfeld.

(*ii*) Die Abbildung

$$[\,\cdot\,,\,\cdot\,]_\lambda \colon \mathfrak{g} \oplus \mathbb{R} \times \mathfrak{g} \oplus \mathbb{R} \ni \big((\xi, k), (\eta, \ell)\big) \mapsto ([\xi, \eta], \lambda(\xi, \eta)) \in \mathfrak{g} \oplus \mathbb{R}$$

definiert eine Lieklammer auf $\mathfrak{h} := \mathfrak{g} \oplus \mathbb{R}$ und die kanonische Projektion $p \colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ ist ein Lie-Algebramorphismus.

(*iii*) Die Abbildung

$$\iota\colon \mathfrak{g}^* \ni \alpha \mapsto (\alpha, 1) \in \mathfrak{g}^* \oplus \mathbb{R} \simeq \mathfrak{h}^*$$

ist eine Poissonuntermannigfaltigkeit bezüglich π_λ und $\pi_{\mathfrak{h}}$. *Eine Lie-Algebra die durch ein solches λ definert wird nennt sich zentrale Erweiterung.*

Übung 5.4 (5 Punkte = 1+4 Punkte) Gegeben sei $D = \bigcup_{p\in\mathbb{R}} D_p \subseteq T\mathbb{R}$ mit

$$D_p = \begin{cases} \mathbb{R} - \operatorname{span}\{\frac{\partial}{\partial x}\big|_p\}, & \text{für } p > 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(*i*) Zeigen Sie, dass D eine glatte involutive Distribution ist.

(*ii*) Zeigen Sie, dass für jede offene Umgebung U von 0 der $\mathscr{C}^\infty(U)$-Modul $\Gamma^\infty(D\big|_U)$ nicht endlich erzeugt ist.

Hinweis: Die Aussage ist äquivalent zu der Aussage, dass

$$I = \{f \in \mathscr{C}^\infty(U) \mid f(p) = 0 \ \forall p \leq 0\}$$

kein endlich erzeugter $\mathscr{C}^\infty(U)$-Modul ist. Nehmen Sie an, dass I durch $\{g_i\}_{1\leq i\leq k}$ endlich erzeugt wird und zeigen Sie, dass für $h = \sum_{i=1}^k g_i^2$ auch $h^{\frac{1}{2}}$ und $h^{\frac{1}{4}}$ elemente in I sind. Für den restlichen Beweis könnte die Cauchy-Schwarz'sche-Ungleichung helfen.