Übungsblatt 6

Abgabe: 28.11.2022

Übung 6.1 (5 Punkte) Es sei (M, π) eine Poissonmannigfaltigkeit und $\iota\colon C \hookrightarrow M$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass dass es ein Poisson Bivektorfeld $\pi_C \in \mathfrak{X}^2(C)$ gibt so, dass C eine Poissonuntermannigfaltigeit ist genau dann wenn $I(C) = \{f \in \mathscr{C}^\infty(M) \mid \iota^* f = 0\}$ ein Poissonideal ist, d.h.

$$\{I(C), \mathscr{C}^\infty(M)\} \subseteq I(C).$$

Übung 6.2 (5 Punkte = 2+1+2 Punkte) Es sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $D \subseteq TM$ eine reguläre involutive Distribution mit $\dim(D_p) = k$ für alle $p \in M$. Zeigen Sie:

(i) Für alle $p \in M$ existiert eine Karte (U, x) um p und lokale Schnitte $X_1, \ldots, X_k \in \Gamma^\infty(D\big|_U)$, so dass

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=k+1}^{n} X_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

für nicht weiter bestimmte Funktionen $X_i^j \in \mathscr{C}^\infty(U)$.

(ii) Für die Vektorfelder aus *(i)* gilt

$$[X_i, X_j] = 0 \quad \text{für alle } i, j \in \{1, \ldots, k\}.$$

(iii) Folgern Sie, dass D integrabel ist.

Übung 6.3 (5 Punkte) Es sei $\alpha = \mathrm{d}z - x\,\mathrm{d}y \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie, dass $\ker \alpha \subseteq TM$ eine glatte reguläre Distribution ist, die nicht involutiv ist.

Übung 6.4 (5 Punkte) Zeigen Sie, dass die Distribution $D \subseteq T\mathbb{R}^2$, die gegeben ist durch

$$D_{(x,y)} = \begin{cases} T_{(x,y)}\mathbb{R}^2, & \text{für } x > 0 \\ \langle \frac{\partial}{\partial x}\big|_{(x,y)} \rangle, & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

glatt und involutiv, aber nicht integrabel ist.