http://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/lehre/ws2022/DQ/

Übungsblatt 7

Abgabe: 5.12.2022

Übung 7.1 (5 Punkte) Es sei $D \subseteq TM$ eine glatte involutive Distribution so, dass $\dim D_p = \dim D_{\Phi_t^X(p)}$ für alle $p \in M$ und $X \in \Gamma^\infty(D)$. Zeigen Sie, dass D integrabel ist.

Übung 7.2 (5 Punkte) Finden Sie ein Beispiel für eine reguläre Distribution, bei der keines der Blätter eingebettet ist.

Übung 7.3 (5 Punkte) Identifizieren Sie $(\mathfrak{so}(3), [\,\cdot\,,\,\cdot\,]) \cong (\mathbb{R}^3, \times)$ als Liealgebren und berechnen Sie die symplektische Blätterung sowie die jeweiligen symplektischen 2-Formen.

Übung 7.4 (5 Punkte=1+1+1+1+1 Punkte) Es seien M eine Mannigfaltigkeit, G eine Liegruppe und $\Phi\colon M \times G \to M$ eine glatte Abbildung mit

$$\Phi(m, gh) = \Phi(\Phi(m, g), h) \text{ für alle } m \in M \text{ und } g, h \in G$$

und $\Phi(m, e) = m$ für alle $m \in M$. Eine solche Abbildung heißt Rechtswirkung von G auf M. Zeigen Sie:

(*i*) Die Abbildung $\mathsf{Lie}(\Phi)\colon \mathfrak{g} \ni \xi \mapsto \xi_M := (m \mapsto T_e\Phi(\,\cdot\,, m)(\xi)) \in \mathfrak{X}(M)$ ist eine Liealgebra-Abbildung.

(*ii*) Die Abbildung $\mathrm{conj}\colon G \times G \to G$ mit

$$\mathrm{conj}(h, g) = g^{-1}hg$$

ist eine Rechtswirkung.

(*iii*) Die Abbildung

$$\mathrm{Ad}\colon \mathfrak{g} \times G \ni (\xi, g) \mapsto \mathrm{Ad}_g(\xi) := T_e\mathrm{conj}(\,\cdot\,, g)(\xi) \in \mathfrak{g}$$

ist eine lineare Rechtswirkung.

(*iv*) Die Abbildung $\mathrm{Ad}_g\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ist eine Liealgebra-Abbildung.

(*v*) Die Abbildung $\mathsf{Lie}(\mathrm{Ad})\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(\mathfrak{g})$ ist in einer Basis $\{e_i\}_{i\in I}$ gegeben durch

$$\mathsf{Lie}(\mathrm{Ad})(e_i) = x^j C^k_{ji} \frac{\partial}{\partial x^k}.$$