Übungsblatt 8

Abgabe: 12.12.2022

Übung 8.1 (5 Punkte = 2+3 Punkte) Es sei $p\colon M \to B$ ein Faserbündel mit typischer Faser F. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Ver}(M)$ das Unterbündel $\ker TP \subseteq TM$. Zeigen Sie:

(*i*) $\mathrm{Ver}(M)^*$ ist ein Faserbündel über B mit typischer Faser T^*F, welches wir mit $T_*p\colon \mathrm{Ver}(M)^* \to B$ bezeichnen.

(*ii*) $\mathrm{Ver}(M)^*$ besitzt eine reguläre Poissonstruktur π, so dass die symplektischen Blätter genau die Fasern von $T_*p\colon \mathrm{Ver}(M)^* \to B$ sind und jedes Blatt isomorph zu $(T^*F, \omega_{\mathrm{can}})$ ist.

Übung 8.2 (5Punkte = 2+3 Punkte) Es sei (M, π) eine reguläre Poissonmannigfaltigkeit mit zugehöriger geblätterter symplektischer 2-From $\omega \in \Gamma^\infty(\Lambda^2 \mathcal{F}^*)$, wobei $\mathcal{F} = \operatorname{im} \pi^\sharp \subseteq TM$.

(*i*) Zeigen Sie, dass es eine 2-Form $\Omega \in \Omega^2(M)$ gibt mit

$$\Omega(X, Y) = \omega(X, Y) \text{ für alle } X, Y \in \Gamma^\infty(\mathcal{F}).$$

(*ii*) Finden Sie ein Beispiel für eine reguläre Poissonmannigfaltigkeit, bei der Ω nicht geschlossen gewählt werden kann.

Übung 8.3 (5 Punkte) Es sei (M, π) eine reguläre Poissonmannigfaltigkeit mit $\dim M = 2n + 1$ und $\operatorname{rank}(\pi) = 2k$ und es sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Poissonvektorfeld, so dass

$$TM = \langle X \rangle \oplus \mathcal{F},$$

wobei $\mathcal{F} = \operatorname{im} \pi^\sharp$. Zeigen Sie, dass es dann die folgenden Objekte gibt:

- eine geschlossene 1-Form $\Theta \in \Omega^1(M)$ mit $\Theta(X) = 1$ und $\Theta(Y) = 0$ für alle $Y \in \Gamma^\infty(\mathcal{F})$.
- eine geschlossene 2-Form $\alpha \in \Omega^2(M)$ mit $\iota_X \alpha = 0$ und $\alpha(Y, Z) = \omega(Y, Z)$ für alle $Y, Z \in \Gamma^\infty(\mathcal{F})$

so dass

$$\mu = \Theta \wedge \alpha^n \in \Omega^{2n+1}(M)$$

eine Volumenform ist. Zeigen Sie, dass $\Delta_\mu \in \mathfrak{X}(M)$ aus Aufgabe 3.3 verschwindet.

Übung 8.4 (5 Punkte) Es sei $\mathcal{F} \subseteq TM$ eine reguläre involutive Distribution und es seien $\{e_i\}_{1\leq i\leq k} \in \Gamma^\infty(\mathcal{F}\big|_U)$ eine Basis. Zeigen Sie, dass das Bivektorfeld

$$\pi|_U = y_k C_{ij}^k \frac{\partial}{\partial y_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{\partial}{\partial y_i} \wedge e_i \in \mathfrak{X}(\mathcal{F}^*\big|_U)$$

für $C_{ij}^k := e^k([e_i, e_j]) \in \mathscr{C}^\infty(U)$ und y_i sind die zu $\{e_i\}_{1\leq i\leq k} \in \Gamma^\infty(\mathcal{F}|_U)$ assoziierten Koordinaten, ein Poissonbivektorfeld ist, dass man auf ganz $\mathcal{F}^*$ fortsetzen kann (hier ist $\mathcal{F}^*$ als Mannigfaltigekit zu verstehen).