9. Übungsblatt

Abgabetermin 19.12.2022

Übung 9.1 (5 Punkte = 1+2+2 Punkte) Es sei $\phi\colon M \times G \to M$ eine Gruppenwirkung einer Liegrupe G auf eine Mannigfaltigkeit M. ϕ heißt frei, wenn für alle $m \in M$ die Implikation

$$\phi(m, g) = m \quad \Longrightarrow \quad g = e$$

gilt. ϕ heißt eigentlich, wenn die Abbildung

$$M \times G \ni (m, g) \mapsto (m, \phi(m, g)) \in M \times M$$

eine eigentliche Abbildung ist. Es sei nun $\Phi\colon E \times G \to E$ eine weitere Gruppenwirkung und $\pi\colon E \to M$ eine äquivariante Abbildung, d.h. $\pi(\Phi(e, g)) = \phi(\pi(e), g)$ für alle $e \in E$ und $g \in G$. Zeigen Sie:

1. Wenn ϕ frei wirkt, dann wirkt auch Φ frei.
2. Wenn ϕ eigentlicht wirkt, dann wirkt auch Φ eigentlich.
3. Die Punkttransformation $T_*\phi\colon T^*M \times G \to T^*M$ aus Aufgabe 4.3 einer Liegruppenwirkung $\phi\colon M \times G \to M$ ist wieder eine Liegruppenwirkung und falls ϕ frei und eigentlich wirkt, dann wirkt auch $T_*\phi$ frei und eigentlich.

Übung 9.2 Es sei $\phi\colon M \times G \to M$ eine Liegruppenwirkung. Zeigen Sie, dass die Vektorfelder ξ_M aus Aufgabe 7.4 einen vollständigen Fluss besitzen, indem Sie diesen angeben.
Hinweis: Aufgabe 3.2 (*iii*)

Übung 9.3 (5 Punkte = 2+3 Punkte) Es sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit mit $\dim M = 2n$. Eine Untermannigfaltigkeit $\iota\colon C \to M$ heißt koisotrop, wenn

$$T_cC^\perp = \{v_c \in T_{\iota(c)}M \mid \omega(v_{\iota(c)}, T_c\iota w_c) = 0 \;\; \forall w_c \in T_cC\} \subseteq T_c\iota T_cC$$

Zeigen Sie:

1. $\dim C \geq n$
2. Das Bild einer 1-Form $\alpha\colon M \to T^*M$ ist eine koisotrope Untermannigfaltigkeit bezüglich der kanonischen symplektischen 2-Form ω_0, genau dann wenn α geschlossen ist.

Übung 9.4 (5 Punkte = 2+3 Punkte) Es sei $\mathcal{F} \subseteq TM$ eine reguläre involutive Distribution auf M und es sei $\iota\colon C \to M$ eine eingebettete Untermannigfaltigkeit so, dass $\mathcal{F}_C := TC \cap \mathcal{F}\big|_C \subseteq TC$ ein Unterbündel ist. Zeigen Sie:

1. $\mathcal{F}_C$ ist eine reguläre involutive Distribution.
2. Die Abbildung

$$\iota^*\colon \Gamma^\infty(\Lambda^\bullet \mathcal{F}) \to \Gamma^\infty(\Lambda^\bullet \mathcal{F}_C),$$

   die gegeben ist durch

$$\iota^*\omega\big|_c(X_1, \ldots, X_k) = \omega\big|_{\iota(c)}(T_c\iota X_1, \ldots, T_c\iota X_k)$$

   erfüllt $\iota^* \mathrm{d}_{\mathcal{F}} = \mathrm{d}_{\mathcal{F}_C} \iota^*$.