MATHEMATIK IM ALLTAG

PROF. DR. S. GOETTE, JONAS LENTHE

In diesem Proseminar geht es darum, in unserem Alltag „versteckte“ Mathematik „wiederzuentdecken“. Jeder einzelne Vortrag beschreibt einen Gegenstand, eine Technik, ein Problem oder ein Phänomen des täglichen Lebens. Dabei soll zunächst erklärt werden, worum es geht, und wieso Mathematik ins Spiel kommt. Anschließend sollen die auftretenden Probleme mathematisch beschrieben und — wenn möglich — gelöst werden. Dazu sind oft neue mathematische Begriffe zu definieren oder Sätze zu beweisen. Ziel ist es, am Ende eines Vortrages das Thema aus mathematischer Sicht zu verstehen.

Die angegebene Literatur ist immer nur als Ausgangspunkt gedacht; die Vortragenden sollten zusätzliche Quellen suchen, um den Vortragsgegenstand oder die dafür benötigte Mathematik besser zu verstehen oder verwandte Teilaspekte mit aufzugreifen.

Es folgt eine Reihe von Themenvorschlägen, geordnet nach Themenbereichen. Bei der Vorbesprechung wählen wir daraus bis zu 15 Vorträge aus.

Sollten Sie Interesse an einem Thema haben, das unten nicht aufgeführt ist, und zu dessen mathematischem Inhalt Sie Literatur kennen, dann schreiben Sie bitte rechtzeitig (mehrere Tage vor der Vorbesprechung) eine e-mail an den Dozenten. Falls das Thema in den Rahmen des Proseminars passt, dürfen Sie auch darüber vortragen.

1. Rechenverfahren

Anwendungen der Mathematik im Alltag erfordern oftmals numerische Berechnungen. Die Verfahren, die hier vorgestellt werden sollen, kommen teilweise in anderen Vorträgen zum Einsatz. Grundkenntnisse in Numerik (oder Informatik) sind hilfreich, aber nicht notwendig.

1. Additions- und Schiebe-Algorithmen. Taschenrechner, vor allem ältere Modelle, verfügen über eine sehr einfache Hardware. In diesem Vortrag sollen daher Algorithmen vorgestellt werden, die die Exponentialfunktion, Winkel- und Hyperbelfunktionen und ihre Inversen mit möglichst einfachen Mitteln vergleichsweise schnell und vor allem zuverlässig ausrechnen.
Literatur: [17], [18], Stichworte jeweils CORDIC und BKM.

2. Die Zahl π. Es gibt viele Reihen, Iterationsverfahren, etc. . . , die gegen die Kreiszahl π konvergieren. Dieser Vortrag soll einige davon vorstellen und erklären, warum und wie schnell die Verfahren konvergieren.
Literatur: [18], Stichwort: Numerical approximations of π.

3. Schnelle Fouriertransformation und schnelle Multiplikation. Dieser Vortrag soll erklären, was eine diskrete Fouriertransformation ist und wie sie

schnell berechnet werden kann. Eine Anwendung ist ein schnelles Verfahren zur Multiplikation großer Zahlen.
Literatur: [17], Stichworte: Schnelle Fourier-Transformation, Schönhage-Strassen-Algorithmus
Vorkenntnisse: Algebra

4. Mechanisches Rechnen. Auch vor der Einführung von Taschenrechnern und Computern gab es bereits — meist recht spezialisierte — mechanische Rechenhilfen, beginnend mit dem Abakus über Rechenschieber, Staffelwalzen- und Sprossenradmaschinen bis hin zu Planimetern. Dieser Vortrag sollte einen Überblick über verschiedene historische Rechenmaschinen geben und dann mindestens eines der moderneren Geräte hinsichtlich Funktionsweise und Handhabung ausführlich erklären.
Literatur: [17], Stichworte: Planimeter, Rechenmaschine

2. Datenverarbeitung/Kryptographie

Kryptographie ist die Wissenschaft von der Verschlüsselung. Die folgenden zwei Vorträge behandeln Public-Key-Verschlüsselungsverfahren. Diese ermöglichen eine abhörsichere Kommunikation, ohne dass vorher geheime Vereinbarungen getroffen wurden. Public-Key-Verfahren beruhen auf sogenannten Falltürfunktionen, Funktionen, die leicht zu berechnen sind, für deren Umkehrung es aber keinen effizienten Algorithmus gibt.

5. Der RSA-Code. Die Multiplikation zweier Primzahlen ist einfach, jedoch eine große Zahl in Primfaktoren zu zerlegen, sprengt schnell die Kapazitäten eines jeden Rechners. Auf dieser Asymmetrie beruht der RSA-Code.
Literatur: [18], Stichwort „RSA“, [15]
Vorkenntnisse: Algebra

6. Diskrete Logarithmen. In machen endlichen zyklischen Gruppen mit gegebenem Erzeuger g lässt sich die Potenz $h = g^n$ für gegebenes n schnell berechnen, während kein effizientes Verfahren bekannt ist, dass den „Logarithmus“ n bei gegebenem h bestimmt. Hierauf basieren das Diffie-Hellmann-, das ElGamal- und das DSA-Verfahren.
Literatur: [15]; [17], Stichworte „Diffie-Hellman-Schlüsselaustausch“, „Elgamal-Kryptosystem“
Vorkenntnisse: Algebra

7. Quantencomputer und der Shor-Algorithmus. Ein Quantencomputer benutzt verschränkte Qubits anstelle gewöhnlicher Bits zur Datenverarbeitung. Schon lange vor dem Bau der ersten Quantencomputer hat Shor einen effizienten Algorithmus zur Primfaktorzerlegung mittels eines Quantencomputers entwickelt. Er soll hier vorgestellt werden.
Literatur: [18], Stichwort „Shor algorithm“
Vorkenntnisse: Algebra. Auch Quantenmechanik I ist hilfreich.

3. Datenverarbeitung/Musik

8. Schwingungen und das Abtasttheorem. Das Abtasttheorem ist in der Signalverarbeitung von zentraler Bedeutung. Es kommt überall dort zum Tragen, wo man analoge Signale digital übertragen möchte. In dem Vortrag soll dieses Theorem bewiesen werden. Dafür ist die Fourieranalyse das wichtigste mathematische Hilfsmittel.
Literatur: [17], Stichwort: Nyquist-Shannon-Abtasttheorem [18], Stichwort: Nyquist-Shannon-sampling theorem [1], Kapitel: Schwingungen, p.193-202

9. Audio-Kompression. Audio-Formate wie MP3, AAC oder Vorbis komprimieren die digital erfassten Klangdaten, indem kaum oder gar nicht hörbare Teile des Audiosignals weggelassen werden. Ein wichtiger Bestandteil ist dabei immer eine modifizierte diskrete Kosinustransformation (MDCT). Dieser Vortrag soll diese Transformation und ihre Inverse einführen. Darüberhinaus können die benutzten Kompressionsverfahren und die im Zusammenhang damit auftretenden Probleme beschrieben werden.
Literatur: [17], [18], Stichworte: MP3, MDCT, Vorbis

10. Fehlerkorrigierende Codes. Der erste effiziente fehlerkorrigierende Code wurde von B. W. Hamming eingeführt, der sogenannte Hammingcode. Für CDs und QR-Codes verwendet man Reed-Solomon-Codes. Die Grundprinzipien solcher Codes sollen hier erklärt werden.
Literatur: [1], [15]

4. Wirtschaft und Gesellschaft

11. Das Nash-Gleichgewicht. Mit Spieltheorie kann man nicht nur Spiele im üblichen Sinne, sondern unterschiedlichste strategische Konfliktsituationen beschreiben. Zunächst sollte erklärt werden, was mit „Spiel“ und „reinen“ und „ gemischten Strategien“ gemeint ist. Ein Nash-Gleichgewicht besteht aus Strategien für alle beteiligten Spieler, so dass es sich für keinen Spieler lohnt, die Strategie zu wechseln, wenn die Mitspieler ihre Strategie beibehalten. Der Vortrag soll zeigen, dass Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien immer existieren.
Literatur: [12], [5], [11]
Vorkenntnisse: Topologie ist hilfreich (Brouwerscher Fixpunktsatz)

12. Der Satz vom Diktator. Nach Wahlen oder Abstimmungen entsteht bei den Beteiligten manchmal das Gefühl, dass das Abstimmungsverfahren zu einem „ungerechten“ Ergebnis geführt hat. Verschiedene mathematische Kriterien für „Gerechtigkeit“ an ein solches Verfahren können unvereinbar sein. Der Satz von Arrow, umgangssprachlich auch Satz vom Diktator, ist ein Beispiel dafür. Der Vortrag soll diesen Satz erklären und beweisen und eventuell verwandte Sätze vorstellen.
Literatur: [18], Stichwort „Arrow’s impossibility theorem“

13. Sitzzuteilungsverfahren. Nach einer Bundestagswahl wird anhand der abgegeben Stimmen und mit Hilfe eines Auszählverfahrens eine Sitzverteilung

für das Parlament festgelegt. Mittlerweile ist seit Gründung der Bundesrepublik das dritte solche Verfahren in Kraft. In diesem Vortrag soll auf den Unterschied zwischen Divisor- und Quotenverfahren eingegangen werden, sowie auf den Unmöglichkeitssatz von Balinski und Young.
Literatur: [17], Stichworte „Sitzzuteilungsverfahren", „Unmöglichkeitssatz von Balinksi und Young".

5. Navigation und Kartographie

14. Das Global Positioning System. Das vom amerikanischen Militär entwickelte GPS ist heute das am meisten verbreitete Satellitennavigationssystem. Dieser Vortrag soll die Funktionsweise des GPS erklären und auch beschreiben, wie in der Praxis die Positionen der Satelliten festgestellt werden, und wie der Empfänger aus den gemessenen Daten seine Position bestimmt.
Literatur: [18], [17] Stichwort: „Global Positioning System"

15. Kartographie. Da die Erde nicht flach ist, gibt es keine wirklich maßstabstreuen Karten. In diesem Vortrag soll zunächst die Mercatorprojektion (unter der Annahme, dass die Erde eine Kugel ist) und ihre Bedeutung für die Schifffahrt erklärt werden. Anschließend sollte auf modernere, verwandte Kartensysteme (Gauß-Krüger und UTM) eingegangen werden.
Literatur: [17], Stichwort: Gauß-Krüger-Koordinaten, [18], Stichworte: Mercator projection, UTM

16. Algorithmen zur Routenplanung. Bei der Routenplanung geht es darum, einen optimalen Weg zwischen einem Start und einem Zielort zu finden. Dabei hängt der Begriff „optimal" im Allgemeinen von verschiedenen Parametern ab, z.B. versucht man einen Weg unter Zeitminimierung, Kostenminimierung sowie über bestimmte Zwischenorte zu realisieren. Mathematisch wird dieses Problem mit Hilfe der Graphentheorie betrachtet. Eine optimale Lösung kann man dann mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus bestimmen.
Literatur: [1]

6. Geometrie im Alltag

17. Knoten. Knoten finden in der Praxis vielseitig Anwendung. Deshalb ist das Knüpfen bestimmter Knoten auch eine der Prüfungsleistungen bei der Segel-, Kletterausbildung, bei der Feuerwehr und beim THW. In der Mathematik ist die Knotentheorie ein Teilgebiet der Topologie. Mit Hilfe der Physik kann man aber auch mathematisch erklären, ob ein bestimmter Knoten einfach lösbar ist, oder wie gut ein Knoten hält. Im Vortrag soll eine Einführung in die Knotentheorie gegeben werden.
Literatur: [1], [9], [10]

18. Kugelpackungen. Das Ziel einer dichtesten Kugelpackung besteht darin, möglichst viele gleichartige Kugeln in ein gegebenes Volumen zu packen. Dabei gibt es aber zwei verschiedene Problemstellungen: die Anzahl der Kugeln ist „klein" oder die Anzahl der Kugeln ist sehr groß (bzw. unendlich). In Dimension $n = 3$ ist bei einer Anzahl von weniger als 56 Kugeln die Wurstpackung optimal

(obwohl im Alltag meistens unpraktisch). Im Vortrag geht es darum, optimale Packungen mit sehr großer beziehungsweise unendlicher Stückzahl in Dimension $n = 2$ und $n = 3$ zu betrachten.
Literatur: [1]

19. Gelenke. Auch in mechanischen Gelenkmechanismen steckt Mathematik. James Watt konstruierte für seine Dampfmaschine einen Mechanismus, der eine pendelnde Kreisbewegung näherungsweise in eine geradlinige Auf- und Abbewegung überführt. Erst knapp hundert Jahre später wurde das Problem exakt von Peaucellier gelöst.
Literatur: [7], [14],[3]

20. Kaffeetassen-Katakaustik. Durch Lichtbrechung und -reflexion können sich interessante Muster ergeben. Dieser Vortrag soll erklären, wie sie zustandekommen.
Literatur: [16]

21. Planetenbewegung. Der Ursprung der Infinitesimalrechnung ist eng verknüpft mit Newton's Erkenntnis, daß sich die Kepler'schen Gesetze der Planetenbewegung herleiten lassen aus Newton's Gesetz "Kraft=Masse×Beschleunigung" zusammen mit dem Gesetz, daß die Gravitationskraft umgekehrt proportional ist zum Quadrat des Abstands. Das soll für Studierende ohne zweites Fach Physik erklärt werden, also wohl am besten von einem Studierenden, dessen zweites Fach nicht Physik ist.
Literatur: [13], 1.1-1.3
Vorkenntnisse: Analysis II.

7. Bildgebungsverfahren

22. Computer-Tomographie. In einem Computer-Tomographen wird ein Körper aus verschiedenen Richtungen mit Röntgen-Strahlen durchleuchtet. Die gemessenen Strahlungsverluste lassen sich mathematisch als die Radon-Transformierte der Dichtefunktion innerhalb des Körpers interpretieren. Um ein inneres Bild des Körpers zu erstellen, muss man also die Radon-Transformation invertieren.
Literatur: [4], Kapitel 1.7, 2.2, 5.3 [17], Stichwort: Computertomographie [18], Stichworte: CT scan, Radon transform
Vorkenntnisse: Analysis III.

23. Magnet-Resonanz-Tomographie. In einem Kernspin-Tomographen werden bestimmte Atomkerne (meist Wasserstoffatomkerne) im menschlichen Körper durch Magnetfelder angeregt. In diesem Vortrag soll zum einen der physikalische Hintergrund erklärt werden, und zum anderen die Mathematik, die benötigt wird, um aus den Messungen ein Bild zu rekonstruieren.
Literatur: [17], Stichwort: Magnetresonanztomographie [18], Stichworte: nuclear magnetic resonance, magnetic resonance imaging
Vorkenntnisse: Analysis III.

8. Andere Themen

24. Röntgenkristallographie. In der Röntgenkristallographie schießt man Röntgenstrahlen auf ein Kristallgitter. Die Wellenlänge der Röntgenstrahlen ist kurz genug, um ein Beugungsmuster zu erzeugen, wenn sie in der Probe gestreut werden. Man benutzt das Muster und die Intensität der Streuung, um mithilfe der Fourier-Transformation die Elektronendichte für den Kristall zu bstimmen.
Literatur: [18], Stichwort: X-ray crystallography, [8], [2]
Vorkenntnisse: Analysis III.

25. Origami. Die bekannte japanische Papierfalttechnik produziert nicht nur ästhetische Figuren. Sie kann auch für geometrische Konstruktionen benutzt werden, die mit Zirkel und Lineal nicht mehr durchführbar sind. Dieser Vortrag sollte beispielsweise Winkeldreiteilung oder Würfelverdoppelung durch Origami erklären.
Literatur: [6]

26. Benford's Gesetz. Bei den Zahlen einer Steuererklärung treten typischerweise die ersten Ziffern nicht alle mit derselben Häufigkeit auf. Ähnliches gilt auch in anderen Zusammenhängen. Diese Erfahrung soll diskutiert und begründet werden. Sie wird eingesetzt, um Betrügereien auf die Spur zu kommen.
Literatur: : http://www.educ.ethz.ch/unt/um/mathe/ana/benford
Vorkenntnisse: Analysis I, etwas Analysis III.

Literatur

[1] M. Aigner, E. Behrends (Hrsg.), Alles Mathematik — von Pythagoras zum CD-Player, Vieweg, 2000

[2] A. Authier, Dynamical theory of X-ray diffraction, International Union of Crystallography Monographs on Crystallography No. 11. Pp. xviii + 661, Oxford: Oxford University Press, 2001

[3] H.S.M. Coxeter, Introdution to Geometry, Wiley, 1969

[4] S. Deans, The Radon Transform and some of its Applications, Krieger, 1993

[5] M. Dresher, The Mathematics of Games of Strategy, Dover Publications, 1981

[6] H.-W. Henn, Papierfalten mit mathematischem Spürsinn, `http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/_personelles/people/henn/origa_hd.pdf`

[7] D. Hilbert, S. Cohn-Vossen, Anschauliche Geometrie, Wiss. Buchgesellschaft, 1973

[8] M. v. Laue: Röntgenstrahlinterferenzen. Akademische Verlagsanstalt, 1960.

[9] C. Livingston, Knot theory, MAA, 1993

[10] L.H. Kauffman, Knoten, Spektrum, 1995

[11] P. Morris, Introduction to Game Theory, Springer 1994

[12] J. F. Nash, Non-cooperative games, Ann. Math. 54 (1951), 286–295

[13] H. R. Petry, B. C. Metsch, Theoretische Mechanik, Oldenbourg 2005

[14] H. Rademacher, O. Toeplitz, Von Zahlen und Figuren, Springer 1968

[15] R.-H. Schulze, Codierungstheorie, Vieweg 2003

[16] C. Ucke, C. Engelhardt, Kaustik in der Kaffeetasse, Physik in unserer Zeit 29 (1998), 120-122, `http://www.ucke.de/christian/physik/ftp/lectures/kaustik3.pdf`

[17] Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, Wikimedia foundation, `http://de.wikipedia.org/`

[18] Wikipedia: The free Encyclopedia, Wikimedia foundation, `http://en.wikipedia.org/` Cambridge University Press 1995