1. Übungsblatt zur Vorlesung Algebraische Topologie I im Wintersemester 2022/2023 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Mittwoch, den 25.10. (im Briefkasten von Jonas Schnitzer im 3.OG der Ernst-Zermelo-Straße)

Aufgabe 1 (10 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Es sei X ein topologischer Raum und $\{A_i\}_{i\in I}$ abgeschlossene Teilmengen mit $X = \bigcup_{i\in I} A_i$. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn $f|_{A_i}\colon A_i \to Y$ stetig für alle $i \in I$ ist.

(ii) Es sei X ein topologischer Raum und $\{U_i\}_{i\in I}$ offene Teilmengen mit $X = \bigcup_{i\in I} U_i$. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn $f|_{U_i}\colon U_i \to Y$ stetig für alle $i \in I$ ist.

(iii) Es seien X quasikompakt und Y Hausdorffsch. Jede stetige Bijektion $f\colon X \to Y$ ist ein Homöomorphismus.

(iv) Es seien X und Y homotopieäquivalent. Ist X Hausdorffsch, so auch Y.

(v) Es seien X und Y homotopieäquivalent. Ist X zusammenhängend, so auch Y.

Aufgabe 2 (10 Punkte = 5+5 Punkte) Konstruieren Sie Homöomorphismen

(i) $f\colon I^k/\partial I^k \to S^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$,

(ii) $g\colon (I^k/\partial' I^k,\, \partial I^k/\partial' I^k) \to (D^k, S^{k-1})$.

Aufgabe 3 (10 Punkte = 3+5+2 Punkte) Es seien (X_i, x_i) für $i \in J$ punktierte Räume. Zeigen Sie:

(i) der punktierte Raum

$$(X, x_0) = \left(\prod_{i\in J} X_i, (x_i)_{i\in J}\right)$$

mit den Projektionen $p_i\colon (X, x_0) \to (X_i, x_i)$ erfüllt die universelle Eigenschaft eines Produktes (aus Satz 1.53(3)) in der Kategorie $\mathcal{T}op_+$;

(ii) es gilt $\pi_k(X, x_0) \cong \prod_{i\in J} \pi_k(X_i, x_i)$, wobei die Abbildung $p_{i*} = \pi_k p_i$ der Projektion auf den Faktor $\pi_k(X_i, x_i)$ entspricht.

(iii) Sei $j \in J$, und sei $\iota_j\colon X_j \to X$ die Inklusion, die $y \in X_j$ auf $(y_i)_{i\in J}$ mit $y_j = y$ und $y_i = x_i$ für $i \neq j$ abbildet. Beschreiben Sie die Abbildung $\iota_{j*}\colon \pi_k(X_j, x_j) \to \pi_k(X, x_0)$.

Aufgabe 4 (10 Punkte = 3+2+3+2 Punkte) Es seien $k, l \geq 0$ und es sei (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum.

(i) Zeigen Sie:

$$\partial I^{k+l} = \partial I^k \times I^l \ \cup \ I^k \times \partial I^l \subset I^k \times I^l \cong I^{k+l}.$$

(ii) Die Bijektion $\mathcal{C}(I^k \times I^l, X) \cong \mathcal{C}(I^k, \mathcal{C}(I^l, X))$ aus Satz 1.101 bilde F auf f ab. Dann ist $F|_{\partial I^{k+l}}$ genau dann konstant x_0, wenn f nach $\Omega^l(X) \subset \mathcal{C}(I^l, X)$ abbildet und $f(x)$ für alle $x \in \partial I^k$ die konstante Abbildung nach x_0 liefert.

(iii) Konstruieren Sie eine natürliche Bijektion

$$\pi_{k+l}(X) \to \pi_k(\Omega^l(X)).$$

(iv) Handelt es sich um einen Gruppenhomomorphismus falls $k \geq 1$?