10. Übungsblatt zur Vorlesung Algebraische Topologie I im Wintersemester 2022/2023 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Auf diesem Übungsblatt gibt es 40 Punkte + 20 Bonuspunkte. Abgabe ist am Mittwoch, den 10.1. (im Briefkasten von Jonas Schnitzer im 3.OG der Ernst-Zermelo-Straße)

Aufgabe 1 (10 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Der vergessliche Funktor $|\cdot|\colon kw\mathcal{H} \to \mathcal{S}et$ hat ein Linkssadungiertes.

(ii) Der vergessliche Funktor $|\cdot|\colon k\mathcal{T}op \to \mathcal{S}et$ hat ein Rechtsadungiertes.

(iii) Der vergessliche Funktor $|\cdot|\colon kw\mathcal{H} \to \mathcal{S}et$ hat ein Rechtsadungiertes.

(iv) In einer abgeschlossenen monoidalen Kategorie $(\mathcal{C}, \otimes, \mathrm{hom}, E)$ sind $\mathrm{hom}(E, X)$ und X isomorph.

(v) Es sei $(\mathcal{C}, \otimes, E)$ monoidal, dann ist $\mathrm{Hom}(E, \cdot)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ treu, das heißt injektiv auf Morphismen.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, dann bezeichne $\mathcal{C}^{op}$ die Kategorie mit den gleichen Objekten und

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \quad \text{und} \quad f \circ_{op} g = g \circ f$$

für alle f, g und für alle $X, Y \in \mathcal{C}$.

Überprüfen Sie:

(i) Sei $\mathcal{I}$ ein Diagramm. $\mathcal{I}$-Limiten in $\mathcal{C}$ sind $\mathcal{I}^{op}$-Kolimiten in $\mathcal{C}^{op}$ und umgekehrt.

(ii) Funktoren $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entsprechen Funktoren $F\colon \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}^{op}$ und Funktoren $G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}^{op}$ entsprechen Funktoren $G\colon \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$.

(iii) Es seien $F\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ adjungierte Funktoren, dann sind auch $G\colon \mathcal{D}^{op} \rightleftarrows \mathcal{C}^{op} : F$ adjungiert.

(iv) Es seien $F\colon \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}^{op} : G$ adjungierte Funktoren, dann sind auch $G\colon \mathcal{D} \rightleftarrows \mathcal{C}^{op} : F$ adjungiert.

Aufgabe 3 (10 Punkte) Es sei $(\mathcal{C}, \otimes, \mathrm{hom}, E)$ eine abgeschlossene monoidale Kategorie.

(i) Benutzen Sie die Adjunktion $\cdot \otimes Y \dashv \mathrm{hom}(Y, \cdot)$ und die Funktorialität von $\otimes$ im zweiten Argument, um zu zeigen, dass $\mathrm{hom}(\cdot, Z)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ein kontravarianter Funktor ist, das heißt ein Funktor $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^{op}$.

(ii) Zeigen Sei, dass $\mathrm{hom}(\cdot, \cdot)$ ein *Bifunktor* ist, das heißt, dass für alle $f\colon Z \to W$, $g\colon X \to Y$ gilt

$$\mathrm{hom}(X, f) \circ \mathrm{hom}(g, Z) = \mathrm{hom}(g, W) \circ \mathrm{hom}(Y, f)\colon\ \mathrm{hom}(Y, Z) \longrightarrow \mathrm{hom}(X, W)\ .$$

Aufgabe 4 (10 Punkte = 4+4+2 Punkte) Zeigen Sie:

(i) Disjunkte Vereinigungen von Familien in $kw\mathcal{H}$ sind kompakt erzeugt und schwach Hausdorff.

(ii) Sei $X_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow \dots$ eine Familie in $kw\mathcal{H}$ so, dass X_i in X_{i+1} für alle $i \in \mathbb{N}$ abgeschlossen ist. Dann ist der Kolimes in Top wieder kompakt erzeugt und schwach Hausdorff.

(iii) CW-Komplexe sind schwach Hausdorff (und nach 9.1 (iii) auch kompakt erzeugt).

Aufgabe 5 (10 Punkte = 4+2+2+2 Punkte) Es seien X, Y, Z in $kw\mathcal{H}$. Zeigen Sie:

(i) $kC(\cdot, Z)\colon kw\mathcal{H} \rightleftarrows kw\mathcal{H}^{op} : kC(\cdot, Z)$ ist eine Adjunktion.

(ii) $kC(X \sqcup Y, Z) \cong k(kC(X, Z) \times kC(Y, Z))$.

(iii) $kC(X, k(Y \times Z)) \cong k(kC(X, Y) \times kC(X, Z))$.

(iv) Was muss eine abgeschlossene monoidale Kategorie $(\mathcal{C}, \otimes, \hom, E)$ erfüllen so, dass (i) und (ii) analog gelten?

Aufgabe 6 (10 Punkte) Wir betrachten den inversen Limes X der Folge

$$S^1 \xleftarrow{\cdot 1} S^1 \xleftarrow{\cdot 2} S^1 \xleftarrow{\cdot 3} S^1 \longleftarrow \cdots$$

in $k\mathcal{T}op$. Bestimmen Sie eine Abbildung der universellen Überlagerung $\mathbb{R} \to S^1$ des ersten Raumes in den Limes X. Ist diese Abbildung eine Einbettung? Ist sie surjektiv?