11. Übungsblatt zur Vorlesung Algebraische Topologie I im Wintersemester 2022/2023 bei Prof. Dr. S. Goette

---

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Mittwoch, den 17.1. (im Briefkasten von Jonas Schnitzer im 3.OG der Ernst-Zermelo-Straße)

Aufgabe 1 (10 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Die Funktoren $kC(\cdot, Z)\colon kw\mathcal{H}^{opp} \leftrightarrows kw\mathcal{H} : kC(\cdot, Z)$ sind adjungiert für alle $Z \in kw\mathcal{H}$.

(ii) Stetige Bijektionen zwischen kompakt erzeugten Räumen sind Homöomorphismen.

(iii) Der Raum $X = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}$ hat eine CW-Struktur.

(iv) Der Raum kX mit X aus (iii) hat eine CW-Struktur.

(v) $\mathbb{R}$ hat eine CW-Struktur.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Finden Sie CW-Strukturen auf

(i) $\Bbbk P^\infty = \operatorname{colim} \Bbbk P^n$ und

(ii) $S^\infty = \operatorname{colim} S^n$.

Aufgabe 3 (10 Punkte) Beweisen Sie Folgerung 4.41.

Aufgabe 4 (10 Punkte = 2+3+5 Punkte) Seien X, Y CW-Komplexe mit charakteristischen Abbildungen Φ_i^n, Ψ_j^n, dann sei Z der CW-Komplex auf der Menge $X \times Y$ mit den charakteristischen Abbildungen

$$\Phi_i^m \times \Psi_j^n\colon D^m \times D^n \cong D^{n+m} \to X \times Y.$$

Zeigen Sie:

(i) $\mathrm{id}\colon Z \to k(X \times Y)$ ist stetig.

(ii) Wenn X, Y endlich sind, ist $\mathrm{id}\colon Z \to k(X \times Y)$ ein Homöomorphismus.

(iii) $\mathrm{id}\colon Z \to k(X \times Y)$ ein Homöomorphismus.

Hinweis: Es reicht zu zeigen, dass für alle Kompakta K und alle stetigen $f\colon K \to X \times Y$ die Abbildungen $\mathrm{id} \circ f\colon K \to Z$ stetig ist.