12. ÜBUNGSBLATT zur Vorlesung Algebraische Topologie I im Wintersemester 2022/2023 bei Prof. Dr. S. Goette

---

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Mittwoch, den 24.1. (im Briefkasten von Jonas Schnitzer im 3.OG der Ernst-Zermelo-Straße)

Aufgabe 1 (10 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Ein beliebiges Produkt endlicher punktierter CW-Komplexe ist ein CW-Komplex, und alle Produkte endlich vieler Faktoren mit den Basispunkten aus den restlichen Faktoren sind Unterkomplexe.

(ii) Die Kategorie der CW-Komplexe mit zellulären Abbildungen ist vollständig.

(iii) Das Bild einer zellulären Abbildung ist ein Unterkomplex.

(iv) Ein Retrakt einer abelschen Gruppe ist ein direkter Summand.

(v) Ein Retrakt einer beliebigen Gruppe ist Faktor in einem direkten Produkt.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Geben Sie k-zusammenhängende CW-Modelle für $(\mathbb{C}P^n, *)$ an für alle $k \leq 2n$.

Zusatz: Wie sieht es mit $(\mathbb{H}P^n, *)$ aus?

Aufgabe 3 (10 Punkte) Es sei $(w\mathcal{M}, f\mathcal{M}, c\mathcal{M})$ eine Modellstruktur.

(i) Zeigen Sie, dass $f\mathcal{M}$ gerade die Menge aller $p\colon E \to B$ in $\mathcal{M}$ ist, die für alle trivialen Kofaserungen $i\colon A \to X$ die Liftungseigenschaft

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & B \end{tikzcd}$$

erfüllen.

Hinweis: Wenn p die Liftungseigenschaft hat, zerlegen Sie $p = q \circ j$ wie in Axiom (M4) und schreiben Sie p als Retrakt von q.

(ii) Zeigen Sie mit (i), dass für eine Faserung $p\colon E \to B$ und eine beliebige Abbildung $f\colon A \to B$ der pull-back $f^*E \to A$ wieder eine Faserung ist.

Aufgabe 4 (10 Punkte = 4+3+3 Punkte) Es sei $f\colon A \to B$ ein Retrakt von $g\colon X \to Y$ im Sinne von Aufgabe 4 auf Blatt 3 in einer beliebigen Kategorie $\mathcal{C}$. Zeigen Sie:

(i) Wenn g ein Isomorphismus ist, dann ist auch f ein Isomorphismus.

(ii) Sei $\mathcal{C} = \mathcal{T}op$. Wenn g eine Homotopieäquivalenz ist, dann auch f.

(iii) Sei $\mathcal{C} = \mathcal{T}op$. Wenn g eine schwache Homotopieäquivalenz ist, dann auch f.

Hinweis: (ii) und (iii) folgen aus (i) dank Funktorialität.