13. Übungsblatt zur Vorlesung Algebraische Topologie I im Wintersemester 2022/2023 bei Prof. Dr. S. Goette

---

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Mittwoch, den 31.1. (im Briefkasten von Jonas Schnitzer im 3.OG der Ernst-Zermelo-Straße)

Aufgabe 1 (10 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Die Räume S^1 und $\Omega(\mathbb{C}P^\infty)$ sind schwach homotopieäquivalent.

(ii) Die Räume S^3 und $\Omega(\mathbb{H}P^\infty)$ sind schwach homotopieäquivalent.

(iii) Es sei $V_0 \to V_1 \to V_2$ eine bei V_1 exakte Sequenz von Vektorräumen, dann gibt es eine Fortsetzung zu einer unendlich langen exakten Sequenz.

(iv) Diese Fortsetzung ist eindeutig.

(v) Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige, punktierte Abbildung, dann gilt $-S(-Sf) = S^2 f$

Aufgabe 2 (10 Punkte = 3+5+2 Punkte) Es seien $f\colon A \to X$ und $g\colon A \to Y$ stetige, punktierte Abbildungen. Wir definieren den Homotopie-Pushout

$$Z = X\,{}_f{\cup}_g\,Y = X \sqcup A \wedge I_+ \sqcup Y/\sim\ ,$$

wobei wir $A\times\{0\}$ via f an X und $A\times\{1\}$ via g and Y ankleben. Wir erhalten Inklusionsabbildungen $i\colon X \to Z$ und $j\colon Y \to Z$. Zeigen Sie:

(i) Seien punktierte Abbildungen $p\colon X \to W$ und $q\colon Y \to W$ gegeben, so dass $p \circ f$ zu $q \circ g\colon A \to W$ homotop sind, dann existiert eine Abbildung $k\colon Z \to W$ mit $k \circ i = p$ und $k \circ j = q$.

(ii) Wenn man f und g durch punktiert homotope Abbildungen f', g' ersetzt, erhält man einen zu Z punktiert homotopieäquivalenten Raum $X\,{}_{f'}{\cup}_{g'}\,Y$.

(iii) Warum muss der Raum Z trotzdem kein Pushout in der Homotopiekategorie sein? Geben Sie dazu ein Beispiel.

Aufgabe 3 (10 Punkte) Es sei $f\colon X \to Y$ eine beliebige Abbildung. Beweisen Sie zwei der folgenden Aussagen aus Bemerkung 4.69.

(i) Die Pfadfaserung $Pf \to Y$ ist eine Hurewicz-Faserung mit Faser Ff.

(ii) Der Unterraum $\mathrm{im}(\iota) \cong X$ ist ein Deformationsretrakt von Pf.

(iii) Die Abbildung $f \circ (f^*\mathrm{ev}_1)$ ist zu $p\colon Pf \to Y$ punktiert homotop.

(iv) Wenn f eine Hurewicz-Faserung ist, ist $f^{-1}(y_0)$ zur Homotopiefaser Ff homotopieäquivalent.

Aufgabe 4 (10 Punkte = 4+4+2 Punkte) Beweisen Sie Eigenschaft (1) für die Sequenz $(*)$ aus Satz 4.71 an einer der Stellen Ff oder ΩY, indem Sie den Beweis von Satz Satz 4.66 mit Eckmann-Hilton-Dualität übertragen.