14. ÜBUNGSBLATT zur Vorlesung Algebraische Topologie I im Wintersemester 2022/2023 bei Prof. Dr. S. Goette

---

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Mittwoch, den 7.2. (im Briefkasten von Jonas Schnitzer im 3.OG der Ernst-Zermelo-Straße)

Aufgabe 1 (10 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) $\pi_\bullet$ ist ein allgemeiner reduzierter Homologiefunktor.

(ii) Es sei $S^\infty = \operatorname{colim} S^n$ bezüglich der Inklusionen als Äquatoren. Dann gilt $\tilde{h}_\bullet(S^\infty) = 0$.

(iii) Es gilt $\pi_k(S^\infty) = 0$ für $k \geq 1$.

(iv) In einer exakten Sequenz von Gruppen der Form

$$0 \leftarrow \mathbb{Z}/2 \leftarrow B \leftarrow \mathbb{Z}/3 \leftarrow 0$$

gilt $B \cong \mathbb{Z}/6$.

(v) In einer exakten Sequenz von Gruppen der Form

$$0 \leftarrow \mathbb{Z}/2 \leftarrow B \leftarrow \mathbb{Z}/4 \leftarrow 0$$

gilt $B \cong \mathbb{Z}/8$.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Gegeben sei eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \longleftarrow A_{n-1} \xleftarrow{h_n} C_n \xleftarrow{g_n} B_n \xleftarrow{f_n} A_n \xleftarrow{h_{n+1}} C_{n+1} \longleftarrow \dots$$

in $\mathcal{C} = \mathcal{M}od_R$. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(i) Für alle n existiert $k_n \colon B_n \to A_n$ mit $k_n \circ f_n = \mathrm{id}_{A_n}$.

(ii) Für alle n exisiert $\ell_n \colon C_n \to B_n$ mit $g_n \circ \ell_n = \mathrm{id}_{C_n}$.

(iii) Für alle n existiert ein Isomorphismus $\phi_n \colon B_n \to A_n \oplus C_n$, so dass $\phi_n \circ f_n$ die natürliche Inklusion und $g_n \circ \phi_n^{-1}$ die natürliche Projektion ist,.

Zeigen Sie außerdem, dass dann $h_n = 0$ gilt, und dass es natürliche Bijektionen zwischen den Mengen der möglichen Folgen $(k_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ in (1), $(\ell_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ in (2), sowie der $(\phi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ in (3) gibt.

Aufgabe 3 (10 Punkte) Beweisen Sie die Exaktheit der Mayer-Vietoris-Sequenz 5.6 an einer der beiden fehlenden Stellen, also bei $\tilde{h}_n(X)$ oder bei $\tilde{h}_n(A \cap B)$.

Aufgabe 4 (10 Punkte = 4+3+3 Punkte) Es sei $X = A \cup B$, so dass $(A, A \cap B)$ und $(B, A \cap B)$ Kofaserungen seien so, dass $(A, A \cap B)$ p-zusammenhängend und $(B, A \cap B)$ q-zusammenhängend sind. Konstruieren Sie ein Analogon zur Mayer-Vietoris-Sequenz 5.6 für die „unstabilen" Homotopiegruppen $\pi_\bullet$ wie in Bemerkung 5.9. Wie weit lässt sich diese Sequenz nach links beziehungsweise rechts fortsetzen? Für π_1 kennen wir bereits den Satz 2.39 von Seifert-van Kampen. Unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen lässt er sich in diese Sequenz „einbauen"?