2. Übungsblatt zur Vorlesung Algebraische Topologie I im Wintersemester 2022/2023 bei Prof. Dr. S. Goette

---

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Donnerstag, den 2.11. bis 12h (im Briefkasten von Jonas Schnitzer im 3.OG der Ernst-Zermelo-Straße)

Aufgabe 1 (10 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Es sei X ein topologischer Raum mit einer Äquivalenzrelation $\sim$, dann ist $p\colon X \to X/\sim$ eine Faserung.

(ii) Jede Überlagerung ist eine Faserung.

(iii) Es sei $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ eine Sequenz von Gruppen. Diese Sequenz ist genau dann bei A und B exakt, wenn f einen Isomorphismus $A \cong \ker g$ induziert.

(iv) Es sei $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ eine Sequenz von Gruppen. Diese Sequenz ist genau dann bei A und B exakt, wenn f einen Isomorphismus $A \cong \ker g$ induziert.

(v) Die Paare $(I^k, I^{k-1} \times \{0\})$ und $(I^k, \partial' I^k)$ sind homöomorph.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Beweisen Sie die Exaktheit der Sequenz aus Satz 3.19 an einer der fehlenden Stellen.

Aufgabe 3 (10 Punkte = 3+2+2+3 Punkte) Im Folgenden bedeute Faserung entweder Serre- oder Hurewicz-Faserung. Zeigen Sie:

(i) Sei $p\colon E \to B$ eine Faserung, und sei $f\colon A \to B$ stetig. Seien die Abbildungen $f^*p\colon f^*E \to A$ und $\bar{f}\colon f^*E \to E$ durch

$$f^*E = \left\{ (e, a) \in E \times A \;\middle|\; p(e) = f(a) \in B \right\}, \qquad (f^*p)(e, a) = a\,, \qquad \bar{f}(e, a) = e$$

gegeben, dann ist f^*p wieder eine Faserung.

(ii) Die konstante Abbildung $F \to \mathrm{pt}$ ist eine Faserung für alle F.

(iii) Die Projektion $B \times F \to B$ ist eine Faserung für alle F und alle B.

(iv) Seien $p\colon E \to B$ und $q\colon Y \to E$ Faserungen. Dann ist auch $p \circ q\colon Y \to B$ eine Faserung.

Aufgabe 4 (10 Punkte) Es sei $p\colon E \to B$ eine stetige Abbildung. Wir definieren

$$Pp = \{\, (e, \gamma) \in E \times C(I, B) \mid p(e) = \gamma(0) \,\}\ ,$$

dabei trage $C(I, B)$ die kompakt-offene Topologie und Pp die Unterraumtopologie. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(i) Die Abbildung p ist eine Hurewicz-Faserung.

(ii) Die Abbildung p hat die Homotopieliftungseigenschaft bezüglich des Raumes Pp und den Abbildungen

$$f = \pi_E\colon Pp \to E \qquad \text{und} \qquad h = \mathrm{ev} \circ (\pi_{C(I,B)} \times \mathrm{id}_I)\colon Pp \times I \to B\ .$$

(iii) Die Abbildung $r\colon C(I, E) \to Pp$ mit $g \mapsto (g(0), p \circ g)$ hat ein stetiges Rechtsinverses s.