3. Übungsblatt zur Vorlesung Algebraische Topologie I im Wintersemester 2022/2023 bei Prof. Dr. S. Goette

---

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Donnerstag, den 8.11. (im Briefkasten von Jonas Schnitzer im 3.OG der Ernst-Zermelo-Straße)

Aufgabe 1 (10 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Es sei $p\colon E \to B$ ein Faserbündel, dann sind Bilder von offenen Mengen unter p wieder offen.

(ii) Es sei $p\colon E \to B$ eine stetige surjektive Abbildung so, dass $p^{-1}(\{b\})$ homöomorph zu $p^{-1}(\{b'\})$ für alle $b, b' \in B$ ist. Dann ist p ein Faserbündel.

(iii) Es sei $p\colon E \to B$ eine stetige surjektive Abbildung so, dass $p^{-1}(\{b\})$ homöomorph zu $p^{-1}(\{b'\})$ für alle $b, b' \in B$ ist. Dann ist p eine Serre-Faserung.

(iv) Es sei $p\colon E \to B$ eine punktierte Abbildung mit Faser F. Wenn $\pi_1(E, F) \cong \pi_1(B)$, dann ist p eine Serre-Faserung.

(v) Es bezeichne $\Phi\colon \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ die Gruppenwirkung $\Phi(\lambda, (x, y)) = (\lambda x, \frac{1}{\lambda} y)$ (siehe Aufgabe 3 in `https://home.mathematik.uni-freiburg.de/geometrie/lehre/ss2023/Topologie/pdf/Blatt6.pdf`). Die Quotientenabbildung $p\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{R}^\times$ ist ein Faserbündel.

Aufgabe 2 (10 Punkte = 2+2+2+4 Punkte) Es sei (X, A) ein punktiertes Paar. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Verkettung von Wegen definiert eine Abbildung $\rho\colon \pi_1(X, A) \times \pi_1(X) \to \pi_1(X, A)$.

(ii) Für die konstante Abbildung c auf x_0 und $[\gamma] \in \pi_1(X)$ gilt $\rho([c], [\gamma]) = j_*[\gamma]$.

(iii) Die Abbildung ρ ist eine Gruppenwirkung (von rechts) und setzt die Wirkung von $\pi_1(A)$ aus Satz 3.19 fort.

(iv) Es gibt eine natürliche Bijektion $\pi_1(X, A)/\pi_1(X) \to \operatorname{im} \partial \subset \pi_0(A)$.

Aufgabe 3 (10 Punkte) Beweisen Sie Lemma 3.20 in der aktuellen Version des Skripts. Achten Sie darauf, keine zusätzlichen Voraussetzungen einzuführen.

Aufgabe 4 (10 Punkte) Eine *Retraktion* von einer Abbildung $p\colon E \to B$ zu einer Abbildung $q\colon D \to A$ ist ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "I"] \arrow[d, "q"'] & E \arrow[r, "R"] \arrow[d, "p"'] & D \arrow[d, "q"'] \\ A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "r"] & A \end{tikzcd},$$

so dass $r \circ i = \mathrm{id}_A$ und $R \circ I = \mathrm{id}_F$. Man sagt auch, $q\colon D \to A$ ist ein *Retrakt* von $p\colon E \to B$.

Zeigen Sie: wenn p die Homotopieliftungseigenschaft für einen Raum X besitzt, dann gilt das auch für q. Insbesondere sind Retrakte von Serre- beziehungsweise Hurewicz-Faserungen wieder von diesem Typ.