4. Übungsblatt zur Vorlesung Algebraische Topologie I im Wintersemester 2022/2023 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Mittwoch, den 15.11. (im Briefkasten von Jonas Schnitzer im 3.OG der Ernst-Zermelo-Straße)

Aufgabe 1 (10 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Das Paar (D^2, S^1) is 1-zusammenhängend.

(ii) Es sei $p\colon E \to B$ eine Faserung mit Faser F. Es seien zudem E und B wegzusammenhängend. Dann ist p eine k-zusammenhängende Abbildung, wenn F ein $k-1$-zusammenhängender Raum ist.

(iii) Es sei $p\colon E \to B$ eine Faserung mit Faser F. Es seien zudem E und B wegzusammenhängend. Dann ist F ein $k-1$-zusammenhängender Raum, wenn p eine k-zusammenhängende Abbildung ist.

(iv) Es seien S^1_+, S^1_- der obere beziehungsweise der untere Halbkreis. Dann ist die Inklusion $(S^1_+, \partial S^1_+) \to (S^1, S^1_-))$ 1-zusammenhängend.

(v) Es sei X ein n-zusammenhängender Raum für $n \geq 2$, dann ist ΩX ein n-zusammenhängender Raum.

Aufgabe 2 (10 Punkte = 3+2+2+3 Punkte) Es sei $p\colon E \to B$ eine punktierte Serre-Faserung mit Faser F. Zu jedem Punkt $f \in F$ und jeder Schleife γ in B am Basispunkt finden wir mit der Homotopieliftungseigenschaft 3.22 einen Weg $\bar\gamma_f\colon I \to E$ mit $\bar\gamma_f(0) = f$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Wir erhalten eine wohldefinierte Abbildung $\rho\colon \pi_0(F) \times \pi_1(B) \to \pi_0(F)$ mit $\rho([f], [\gamma]) = [\bar\gamma_f(1)]$.

(ii) Für alle $[\gamma] \in \pi_1(B)$ gilt $\rho([e_0], [\gamma]) = \partial[\gamma]$.

(iii) Die Abbildung ρ ist eine Gruppenwirkung von rechts.

(iv) Es gibt eine natürliche Bijektion $\pi_0(F)/\pi_1(B) \to \operatorname{im} i_* \subset \pi_0(E)$.

Aufgabe 3 (10 Punkte = 5+5 Punkte) Es seien X, Y topologische Räume. Definiere den *Verbund* von X und Y als Quotienten

$$X * Y = (X \times Y \times I)/\sim \,,$$

wobei „$\sim$“ erzeugt wird durch

$$(x, y, 0) \sim (x, y', 0) \qquad \text{und} \qquad (x, y, 1) \sim (x', y, 1) \qquad \text{für alle } x,\, x' \in X \text{ und alle } y,\, y' \in Y\,.$$

Geben Sie Homöomorphismen

(i) $S^k * \mathrm{pt} \cong D^{k+1}$ und

(ii) $S^k * S^\ell \cong S^{k+\ell+1}$ für alle k, ℓ

an.

Aufgabe 4 (10 Punkte = 3+4+3 Punkte) Es seien (X, x_0), (Y, y_0) punktierte Räume, und es sei $X * Y$ wie oben definiert. Wir identifizieren X, Y mit Unterräumen von $X * Y$ durch $x \mapsto [(x, y_0, 0)]$, $y \mapsto [(x_0, y, 1)]$ für alle $x \in X$, $y \in Y$, wählen als Basispunkt $\big[\big(x_0, y_0, \frac{1}{2}\big)\big]$ und setzen $U = X * Y \setminus Y$ und $V = X * Y \setminus X$.

(i) Zeigen Sie, dass U, V, $U \cap V$ jeweils zu X, Y und $X \times Y$ homotopieäquivalent sind.

(ii) Bestimmen Sie die von den Inklusionen induzierten Abbildungen

$$\pi_k(U \cap V) \to \pi_k(U) , \qquad \pi_k(V) \to \pi_k(X * Y)$$

und die Gruppen $\pi_k(U, U \cap V)$.

(iii) Die Räume X und Y seien p- beziehungsweise q-zusammenhängend. Wie hoch zusammenhängend ist dann $X * Y$?

Hinweis: Betrachten Sie die natürlichen Abbildung zwischen den langen exakten Sequenz der Paare $(U, U \cap V) \to (X * Y, V)$ und benutzen Sie den Ausschneidungssatz.