5. ÜBUNGSBLATT zur Vorlesung Algebraische Topologie I im Wintersemester 2022/2023 bei Prof. Dr. S. Goette

---

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Mittwoch, den 22.11. (im Briefkasten von Jonas Schnitzer im 3.OG der Ernst-Zermelo-Straße)

Aufgabe 1 (10 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Es sei $p\colon E \to B$ ein Faserbündel mit typischer Faser F so, dass $\pi_k(F) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein Homöomorphismus $E \cong B \times F$.

(ii) Es sei (X, A) ein Paar. Wenn $\pi_0(A) \to \pi_0(X)$ injektiv ist, so ist besitzt $\pi_1(X, A)$ eine natürliche Gruppenstruktur.

(iii) Es sei (X, A) ein Paar. Wenn $\pi_1(A) \to \pi_1(X)$ injektiv ist, so ist $\pi_2(X, A)$ abelsch.

(iv) Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung mit $\|f(x) - x\| \leq 1$, dann ist f surjektiv.

(v) Es sei $f\colon S^n \to S^n$ stetig. Wenn f homotop zu einer konstanten Abbildung ist, dann hat f einen Fixpunkt.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Zeigen Sie: die Hintereinanderausführung von punktierten Abbildungen von S^n nach S^n macht die Gruppe $\pi_n(S^n)$ zu einem Ring isomorph zu $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 3 (10 Punkte = 5+5 Punkte) Beweisen Sie die folgenden Aussagen für alle $n \geq 1$.

(i) Betrachte $D^n \subset \mathbb{R}^n$. Es sei $f\colon D^n \to \mathbb{R}^n$ mit $S^{n-1} \subset f^{-1}(S^{n-1})$ und $\deg f|_{\partial D^n} \neq 0$ gegeben, dann gilt $D^n \subset \operatorname{im}(f)$.

(ii) Es seien $f_1, \ldots, f_n\colon I^n \to \mathbb{R}$ gegeben, so dass $f_i(x) < 0$ falls $x_i = 0$ und $f_i(x) > 0$ falls $x_i = 1$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und alle $x \in I^n$. Dann existiert ein $x_0 \in I^n$ mit $f_1(x_0) = \cdots = f_n(x_0) = 0$.

Aufgabe 4 (10 Punkte = 6+4 Punkte) Zeigen Sie:

(i) Die Abbildung $O(n) \to S^{n-1}$ mit $g \mapsto ge_n \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Faserbündel mit Faser $O(n-1)$.

(ii) Folgern Sie, dass $\pi_k(O(n)) \cong \pi_k(O(n-1))$ und $\pi_k(SO(n)) \cong \pi_k(SO(n-1))$ für $k < n-2$.