6. Übungsblatt zur Vorlesung Algebraische Topologie I im Wintersemester 2022/2023 bei Prof. Dr. S. Goette

---

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Mittwoch, den 29.11. (im Briefkasten von Jonas Schnitzer im 3.OG der Ernst-Zermelo-Straße)

Aufgabe 1 (10 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Es sei (X, A) ein Paar so, dass A homotopieäquivalent zu einem Punkt ist. Dann sind auch X und X/A homotopieäquivalent.

(ii) Es sei (X, A) eine Kofaserung. Dann sind (X, A) und $(X/A, \{*\})$ homotopieäquivalent.

(iii) Es sei $A = \{a\} \subseteq X = \{a, b\}$ mit der Topologie $\mathcal{O}_X = \{\emptyset, A, X\}$. Dann ist (X, A) eine Kofaserung.

(iv) Es sei (X, A) wie in (iii), dann ist $(X^2, X \times A \cup A \times X)$ eine Kofaserung.

(v) Es sei (X, A) eine Kofaserung und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X mit der Eigenschaft, dass für alle $a \in A$ und alle $x \in X$ die Implikation $x \sim a \implies x \in A$ gilt. Dann ist $(X/\sim, A/\sim)$ eine Kofaserung.

Aufgabe 2 (10 Punkte = 3+4+3 Punkte)

(i) Wenn (B, A) und (X, B) Kofaserungen sind, dann ist auch (X, A) Kofaserung.

(ii) Es sei (X, A) Kofaserung und Y beliebig, dann ist auch $(X \times Y, A \times Y)$ Kofaserung.

(iii) Ein Paar (X, A) sei Retrakt von (Y, B), siehe Aufgabe 4 auf Blatt 3. Das heißt, es gebe Abbildungen $i\colon (X, A) \to (Y, B)$ und $r\colon (Y, B) \to (X, A)$ mit $r \circ i = \mathrm{id}_X$. Wenn (Y, B) eine Kofaserung ist, dann ist auch (X, A) eine Kofaserung.

Aufgabe 3 (10 Punkte) Zeigen Sie: wenn X ein Hausdorff-Raum und (X, A) eine Kofaserung ist, dann ist $A \subset X$ abgeschlossen. Betrachten Sie dazu die stetigen Abbildungen

$$f\colon X \cong X \times \{1\} \hookrightarrow X \times I \qquad \text{und} \qquad g\colon X \cong X \times \{1\} \xrightarrow{r} Zi \hookrightarrow X \times I\ ,$$

und zeigen Sie zunächst

$$A = \left\{\, x \in X \;\middle|\; f(x) = (x, 1) = r(x, 1) = g(x) \in X \times I \,\right\} .$$

Aufgabe 4 (10 Punkte = 3+4+3 Punkte) Es sei (X, A) eine abgeschlossene Kofaserung und $f\colon A \to B$ stetig.

(i) Konstruieren Sie mit Hilfe der universellen Eigenschaften eine natürliche, stetige, bijektive Abbildung
$$(X \times I) \cup_{f \times \mathrm{id}_I} (B \times I) \longrightarrow (X \cup_f B) \times I \ .$$

(ii) Zeigen Sie die Stetigkeit der Umkehrabbildung.

Hinweis: Sie können dazu das Exponentialgesetz 1.101 benutzen.

(iii) Zeigen Sie, dass $(X \cup_f B, B)$ wieder eine abgeschlossene Kofaserung ist.