7. Übungsblatt zur Vorlesung Algebraische Topologie I im Wintersemester 2022/2023 bei Prof. Dr. S. Goette

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Mittwoch, den 6.12. (im Briefkasten von Jonas Schnitzer im 3.OG der Ernst-Zermelo-Straße)

Aufgabe 1 (10 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Es sei (X, A) ein Paar, dann sind X/A und $X/\!\!/A$ homotopieäquivalent.

(ii) Es sei $\{X_i\}_{i\in I}$ eine Familie von gut punktierten Räumen, dann ist auch $\bigvee_{i\in I} X_i$ gut punktiert.

(iii) Das Smashprodukt $(S^1, e_1) \wedge (D^1, 0)$ ist homotopieäquivalent zu D^2.

(iv) Es sei $f\colon X \to Y$ stetig, dann ist Y ein Deformationsretrakt von Zf

(v) Es sei X ein topologischer Raum und $A, B \subseteq X$ Teilmengen mit $X = A \cup B$ und $A \cap B \neq \emptyset$ so, dass $(A, A \cap B)$ p-zusammenhängend und $(B, A \cap B)$ q-zusammenhängend sind, dann ist $\iota\colon (A, A \cap B) \to (X, B)$ eine $(p + q)$-zusammenhängende Abbildung.

Aufgabe 2 (10 Punkte = 3+3+4 Punkte) Bestimmen Sie für die folgenden Sequenzen von Gruppen jeweils den Kolimes G und geben Sie auch die Abbildungen $g_k\colon G_k \to G$ an.

(i) $\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 4} \dots$

(ii) $\mathbb{R} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot 4} \dots$

(iii) $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 4} \dots$

Aufgabe 3 (10 Punkte = 2+5+3 Punkte) Zeigen Sie:

(i) Die stabile Homotopiegruppe $\pi_3^s(S^2) \cong \pi_1^s(S^0)$ wird von der Hopf-Faserung $p\colon S^3 \to S^2$ erzeugt.

(ii) Es bezeichne $\iota\colon \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^2$ die Inklusion mit $(z_0 : z_1) \mapsto (z_0 : z_1 : 0)$. Dann ist $\iota_*[p] = 0 \in \pi_3(\mathbb{C}P^2)$.

(iii) Es gilt dann auch $\iota_*[p] = 0 \in \pi_3^s(\mathbb{C}P^2)$.

Aufgabe 4 (10 Punkte = 2+5+3 Punkte) Es sei $i\colon A \to X$ eine Kofaserung und eine Homotopieäquivalenz. Zeigen Sie:

(i) Im Sinne von Definition 2.9 ist A ein starker Deformationsretrakt von X.

(ii) Es sei $p\colon E \to B$ eine Hurewicz-Faserung, und es seien $f\colon A \to E$ und $g\colon X \to B$ Abbildungen mit $p \circ f = g \circ i$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & B \end{tikzcd} .$$

Dann gibt es eine Abbildung $h\colon X \to E$ mit $f = h \circ i$ und $g = p \circ h$.

(iii) Formulieren und beweisen Sie die Eckmann-Hilton-dualen Aussagen von (i) und (ii).