8. Übungsblatt zur Vorlesung Algebraische Topologie I im Wintersemester 2022/2023 bei Prof. Dr. S. Goette

---

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Mittwoch, den 13.12. (im Briefkasten von Jonas Schnitzer im 3.OG der Ernst-Zermelo-Straße)

Aufgabe 1 (10 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Es bezeichne $A = (0, 1]$ und $B = C = [0, 1]$, dann existiert der Pushout $B \cup_A C$ in der Kategorie der Hausdorffräume.

(ii) Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $\mathcal{A}$ eine Unterkategorie. Weiterhin seien $a, b \in \mathcal{A}$ und es existiere das Koprodukt $a \sqcup b$ in $\mathcal{C}$ mit $a \sqcup b \in \mathcal{A}$, dann ist es auch ein Koprodukt in $\mathcal{A}$.

(iii) Der vergessliche Funktor $|\cdot|\colon \mathcal{V}ec_{\Bbbk} \to \mathcal{S}et$ besitzt einen Rechtsadjungierten Funktor.

(iv) Die Einhängung $S\colon \mathcal{T}op_+ \to \mathcal{T}op_+$ ist ein stetiger Funktor.

(v) Der Kern einer linearen Abbildung $f\colon X \to Y$ ist ein Limes in der Kategorie $\mathcal{V}ec_{\Bbbk}$.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Es seien $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $\mathcal{G}\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ Funktoren. Wir nennen natürliche Transformationen $\varepsilon\colon \mathcal{F} \circ \mathcal{G} \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ und $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ ein Einheitenpaar, wenn

$$\varepsilon_{\mathcal{F}X} \circ \mathcal{F}\eta_X = \mathrm{id}_{\mathcal{F}X} \quad \text{und} \quad \mathcal{G}\epsilon_Y \circ \eta_{\mathcal{G}Y} = \mathrm{id}_{\mathcal{G}Y}$$

für alle Objekte X von $\mathcal{C}$ und Y von $\mathcal{D}$ gilt.

Zeigen Sie wahlweise:

(i) Es sei $\Phi_{X,Y}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{G}Y)$ eine Adjunktion im Sinne von Definition 4.1, dann bilden

$$\varepsilon_Y = \Phi^{-1}_{\mathcal{G}Y,Y}(\mathrm{id}_{\mathcal{G}Y}) \quad \text{und} \quad \eta_X = \Phi_{X,\mathcal{F}X}(\mathrm{id}_{\mathcal{F}X})$$

ein Einheitenpaar.

(ii) Es sei ε und η ein Einheitenpaar, dann liefert $\Phi_{X,Y} = \mathcal{G}\cdot \circ \eta_X$ eine Adjunktion im Sinne von Definition 4.1.

Aufgabe 3 (10 Punkte) Es sei $\mathcal{I}$ die Kategorie mit einem Objekt aus Beispiel 4.5 und $\mathcal{F}\colon \mathcal{I} \to \mathcal{A}b$ ein Funktor. Beschreiben Sie $\mathcal{F}$ in Termen der linearen Algebra und geben Sie $\lim \mathcal{F}$ und $\mathrm{colim}\mathcal{F}$ an.

Aufgabe 4 (10 Punkte = 2+5+3 Punkte) Es seien $\mathcal{K} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{T}op$ die vollen Unterkategorien der kompakten beziehungsweise der vollständig regulären Räume.

(i) Beweisen Sie, dass die Stone-Čech-Kompaktifizierung aus Satz 1.73 ein kostetiger Funktor $\beta\colon \mathcal{T} \to \mathcal{K}$ ist.

(ii) Wir betrachten im $\mathbb{R}^n$ die Inklusionsabbildungen zwischen den Unterräumen

$$\overline{B_1(0)} \hookrightarrow \overline{B_2(0)} \hookrightarrow \cdots$$

Bestimmen Sie den Kolimes dieser Folge in der Kategorie $\mathcal{T}$ und in der Kategorie $\mathcal{K}$.