9. Übungsblatt zur Vorlesung Algebraische Topologie I im Wintersemester 2022/2023 bei Prof. Dr. S. Goette

---

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung. Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet und wenn nicht anders angegeben gleichmäßig auf die Teilaufgaben verteilt. Abgabe ist am Mittwoch, den 20.12. (im Briefkasten von Jonas Schnitzer im 3.OG der Ernst-Zermelo-Straße)

Aufgabe 1 (10 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Der Funktor $ab\colon \mathcal{G}rp \to \mathcal{A}b$, der auf Objekten gegeben ist durch $ab(G) = G/[G, G]$ und Morphismen auf ihre jeweiligen Äquivlanzklassen abbildet, hat einen linksadjungierten Funktor.

(ii) Der Funktor ab aus Aufgabe (i) hat einen rechtsadjungierten Funktor.

(iii) CW-Komplexe sind kompakt erzeugt.

(iv) CW-Komplexe sind lokal kompakt.

(v) Die Kategorie der Mengen wird durch die symmetrische Differenz zu einer monoidalen Kategorie.

Aufgabe 2 (10 Punkte = 4+4+2 Punkte) Zeigen Sie:

(i) Der Funktor $k\colon \mathcal{T}op \to k\mathcal{T}op$ ist rechtsadjungiert zum Inklusionsfunktor $k\mathcal{T}op \hookrightarrow \mathcal{T}op$, das heißt, für alle $X \in k\mathcal{T}op$, $Y \in \mathcal{T}op$ gibt es eine natürliche Bijektion

$$\hom_{k\mathcal{T}op}(X, kY) = \hom_{\mathcal{T}op}(X, Y) \;.$$

(ii) Es sei $X \in k\mathcal{T}op$ und $A \subset X$ eine Teilmenge. Dann hat kA die charakteristische Eigenschaft eines Unterraums in der Kategorie $k\mathcal{T}op$ aus Satz 1.50.

(iii) Es sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von Räumen in $k\mathcal{T}op$, dann hat $k\prod_{i\in I} X_i$ die universelle Eigenschaft eines Produkts in der Kategorie $k\mathcal{T}op$ aus Satz 1.53.

Aufgabe 3 (10 Punkte) Zeigen Sie in Analogie zu Aufgabe 3.129: wenn X ein kompakt erzeugter schwach Hausdorff-Raum und (X, A) eine Kofaserung in der Kategorie $kw\mathcal{H}$ ist, dann ist $A \subset X$ eine k-abgeschlossene Teilmenge.

Aufgabe 4 (10 Punkte = 4+4+2 Punkte) Wir betrachten die topologischen Räume

$$X = \bigvee_{i \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} (I, 0) \quad \text{und} \quad Y = \bigvee_{j \in \mathbb{N}} (I, 0)$$

mit der Teilmenge

$$P = \{(\tfrac{1}{1+i_j}, \tfrac{1}{1+i_j}) \in I_i \times I_j \mid i \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, j \in \mathbb{N}\} \subset X \times Y.$$

Zeigen Sie:

(i) Statten wir den Raum $X \times Y$ mit der CW-Topologie, die durch die abgeschlossenen 2-Zellen $\overline{e}^2_{ij} = [0,1] \times [0,1]$ für $(i,j) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}$ gegeben ist, aus, dann ist P abgeschlossen.

(ii) In der Produkttopologie ist P nicht abgeschlossen und es gilt $0 \in \overline{p}$.

Hinweis: Jede Umgebung von 0 enthält in der Produkttopologie eine Teilmenge der Form

$$\Big(\bigvee_{i \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} [0, a_i)\Big) \times \Big(\bigvee_{j \in \mathbb{N}} [0, b_j)\Big).$$

(iii) Die CW-Topologie auf $X \times Y$ ist die gleiche wie die auf $k(X \times Y)$.