

Topologie & Algebraische Topologie — SS 23

Sebastian Goette

Inhaltsverzeichnis

Einführung	1
Kapitel 1. Kapitel 1 — Grundbegriffe	3
1.a. Metrische Räume	3
1.b. Topologische Räume	4
1.c. Trennungseigenschaften	8
1.d. Basen und Abzählbarkeitseigenschaften	12
1.e. Filter und Konvergenz	14
1.f. Unterräume und Produkte	17
1.g. Kompaktheit	22
1.h. Produkte kompakter Räume	25
1.i. Quotienten und Verklebung	29
1.j. Zusammenhang	34
1.k. Funktionenräume und die kompakt-offene Topologie	36
1.l. CW-Komplexe und topologische Mannigfaltigkeiten	39
1.m. Übungen zu Kapitel 1	44
Kapitel 2. Fundamentalgruppe und Überlagerungen	53
2.a. Homotopien und Homotopieäquivalenz	53
2.b. Die Fundamentalgruppe	56
2.c. Die Fundamentalgruppe der S^1	60
2.d. Der Satz von Seifert-van Kampen	63
2.e. Überlagerungen	70
2.f. Die universelle Überlagerung	75
2.g. CW-Komplexe	78
2.h. Übungen zu Kapitel 2	84
Kapitel 3. Homotopiegruppen	87
3.a. Höhere Homotopiegruppen	87
3.b. Die lange exakte Homotopiesequenz eines Paares	92
3.c. Faserungen	97
3.d. Der Ausschneidungssatz	102
3.e. Der Satz von Brouwer und Hopf	106
3.f. Kofaserungen und Quotienten	111
3.g. Konstruktionen mit gut punktierten Räumen	114
3.h. Stabile Homotopiegruppen	118
3.i. Gerahmter Bordismus	123
3.j. Die erste stabile Homotopiegruppe der Sphären	130
3.k. Übungen zu Kapitel 3	134
Kapitel 4. Elementare Homotopietheorie	141

4.a.	Adjungierte Funktoren, Limiten und Kolimiten	141
4.b.	Eine angenehme Kategorie topologischer Räume	146
4.c.	Das Exponentialgesetz	150
4.d.	CW-Komplexe und der Satz von Whitehead	157
4.e.	Modellkategorien	166
4.f.	Faser- und Kofaser-Sequenzen	170
4.g.	Übungen zu Kapitel 4	176
Kapitel 5.	Homologie	183
5.a.	Die Eilenberg-Steenrod-Axiome	183
5.b.	Zelluläre Homologie	190
5.c.	Übungen zu Kapitel 5	202
Literatur		205
Stichwortverzeichnis		207

Einführung

Bevor wir mit dem eigentlichen Stoff der Vorlesung beginnen, möchte ich Ihnen ein paar Beispiele geben, zum einen Aussagen, die sich in der Sprache der Topologie formulieren lassen, zum anderen Aussagen aus anderen Gebieten der Mathematik, die sich aber topologisch beweisen lassen. Nicht alle diese Beispiele werden in der Vorlesung tatsächlich auftreten, weil sie zum Teil etwas mehr Hintergrundwissen brauchen — sei es topologisch, sei es aus einem anderen Gebiet der Mathematik — als wir in dieser Vorlesung lernen können.

0.1. BEISPIEL. Sei

$$B^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1 \}$$

die (offene) Einheitskreisscheibe, und sei

$$D^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1 \}$$

ihr Abschluss.

Der *Brouwersche Fixpunktsatz* besagt:

0.2. SATZ (Brouwer). *Jede stetige Abbildung $f: D^n \rightarrow D^n$ der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe auf sich selbst hat mindestens einen Fixpunkt.*

Das heißt, es existiert $x_0 \in D^n$ mit

$$f(x_0) = x_0 .$$

Hierbei bedeutet stetig das gleiche wie in der Analysis.

Vergleichen Sie diesen Satz mit dem Fixpunktsatz von Banach:

0.3. SATZ (Banach). *Sei X ein vollständiger normierter Vektorraum, und sei $F: X \rightarrow X$ eine Abbildung zu der ein $\lambda < 1$ existiert, so dass*

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \lambda \|x - y\| \tag{*}$$

für alle $x, y \in X$. Dann hat F einen eindeutigen Fixpunkt.

Wir vergleichen die Sätze von Banach und Brouwer.

- (1) Der Satz von Banach ist insofern allgemeiner, als das er für mehr Räume funktioniert, denn der Satz von Brouwer gilt nur für gewisse Teilmengen des \mathbb{R}^n . Er ist schärfer, denn er liefert einen *eindeutigen* Fixpunkt. Außerdem liefert der Beweis ein Verfahren zur approximativen Bestimmung des Fixpunkts.
- (2) Der Satz von Brouwer ist insofern allgemeiner, als er mehr Abbildungen zulässt. Wir könnten nämlich den Satz von Brouwer auch für Abbildungen $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ formulieren, so dass $F(D^n) \subset D^n$. Aus dem Banachschen Satz folgt ja unter anderem, dass der Einheitskreis um den Fixpunkt in sich abgebildet wird. Auf der anderen Seite kann eine Abbildung den Einheitskreis in sich abbilden, ohne dass sie die Lipschitz-Bedingung (*) erfüllt. Der Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes sagt uns allerdings nicht, wie wir den Fixpunkt auffinden können.

Die Sätze sind also verschieden. Der Banachsche Fixpunktsatz ist ein „metrischer“ Satz, während der Brouwersche Fixpunktsatz ein „topologischer“ Satz ist.

0.4. BEISPIEL. Unter der n -dimensionale Einheitssphäre verstehen wir die Menge

$$S^n = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1 \} .$$

Ein Einheitsvektorfeld auf der S^n ist eine stetige Abbildung $V: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass

$$|V(x)| = 1 \quad \text{und} \quad V(x) \perp x .$$

0.5. SATZ (vom Igel). *Sei n gerade, dann existiert kein stetiges Einheitsvektorfeld auf S^n .*

Mit anderen Worten: ein gerade-dimensionaler Igel ohne Glatzpunkt lässt sich nicht kämmen (Igel lassen sich sowieso nicht kämmen — sie stellen ihre Stacheln auf, wenn man's versucht).

Auf der anderen Seite existiert solch ein Vektorfeld immer, wenn n ungerade ist. In diesem Fall identifizieren wir $\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{C}^{\frac{n+1}{2}}$ und setzen einfach $V(x) = ix$.

0.6. BEISPIEL. Das folgende Beispiel ist mit dem zweiten verwandt, auch wenn man das nicht auf den ersten Blick erkennen kann. Sei A eine Algebra über \mathbb{R} , d.h., A ist ein reeller Vektorraum, und es existiert eine \mathbb{R} -bilineare Multiplikationsabbildung $*$: $A \times A \rightarrow A$. Diese muss weder assoziativ noch kommutativ sein.

Wir nennen A eine *Divisionsalgebra*, wenn zu jedem $a \in A \setminus \{0\}$ ein $a' \in A$ existiert, so dass

$$a' * (a * b) = (b * a) * a' = b$$

für alle $b \in A$ gilt.

0.7. SATZ (Kervaire, Milnor). *Die einzigen endlich-dimensionalen Divisionsalgebren über \mathbb{R} sind \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{H} (die Quaternionen) und $\mathbb{C}a$ (die Oktaven).*

Diesen Satz werden wir in der Vorlesung sicherlich nicht beweisen. Genau wie beim Fundamentalsatz der Algebra handelt es sich hier um einen rein algebraischen Satz, der sich aber nur mit analytischen / topologischen Methoden beweisen lässt. Die Liste der algebraischen Resultate, die mit topologischen Methoden bewiesen werden, wird immer länger.

Kapitel 1 — Grundbegriffe

Wir lernen in diesem Kapitel den Begriff des topologischen Raumes und der stetigen Abbildungen kennen. Außerdem definieren wir noch zahlreiche Eigenschaften von topologischen Räumen und Abbildungen, und beweisen ein paar kleine Sätze, die wir in späteren Kapiteln benötigen werden. Einiges sollte aus Analysis bekannt sein — zumindest im metrischen Fall.

1.a. Metrische Räume

Wir erinnern uns kurz an die Definition von metrischen Räumen und stetigen Abbildungen im Sinne der Analysis. Wenn wir von einer Definition „im Sinne der Analysis“ sprechen, meinen wir damit eine Beschreibung, die Worte wie „für alle $\varepsilon > 0$ existiert ...“ enthält.

1.1. DEFINITION. Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d) aus einer Menge X und einer Abbildung $d: X \times X \rightarrow [0, \infty]$, die

- (1) *positiv* ist, das heißt, $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$,
- (2) *symmetrisch* ist, das heißt, $d(x, y) = d(y, x)$, und
- (3) die *Dreiecksungleichung* $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ erfüllt,

jeweils für alle $x, y, z \in X$.

1.2. BEISPIEL. Es folgen einige einfache Beispiele von Metriken.

- (1) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ und \mathbb{C} , jeweils mit $d(x, y) = |y - x|$.
- (2) Jeder normierte Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ ist metrisch mit $d(x, y) = \|y - x\|$.
- (3) Jede Menge M trägt eine Metrik

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \text{ und} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (4) Jede Teilmenge $Y \subset X$ eines metrischen Raumes (X, d) ist wieder ein metrischer Raum mit der induzierten Metrik $d|_Y = d|_{Y \times Y}$.

Weitere Beispiele folgen in den Übungen 1.114 und 1.116.

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $\varepsilon > 0$ und $x \in X$. Der ε -Ball um x ist die Menge

$$B_\varepsilon(x) = \{x' \in X \mid d(x, x') < \varepsilon\}.$$

1.3. DEFINITION. Seien $(X, d), (Y, d')$ metrische Räume. Eine Abbildung $F: (X, d) \rightarrow (Y, d')$ heißt *stetig am Punkt* $x \in X$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$F(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(F(x)).$$

F heißt *stetig*, wenn F an allen Punkten $x \in X$ stetig ist.

Das ist genau die Definition, die Sie aus Analysis kennen. Wir erinnern uns an eine weitere Definition. Im folgenden bezeichne $\mathcal{P}X$ die Potenzmenge von X . Da wir es in der Topologie häufig mit Mengen von Mengen — wie der Potenzmenge — zu tun haben, verwenden wir für solche Mengen kalligraphische Buchstaben, um sie zum Beispiel von Punktmenge zu unterscheiden.

1.4. DEFINITION. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *offen in X* , wenn zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $B_\varepsilon(x) \subset U$. Die Gesamtheit aller offenen Mengen $\mathcal{O}_d \subset \mathcal{P}X$ heißt die *metrische Topologie* auf X zur Metrik d . Sei $x \in X$, dann heißt eine beliebige Teilmenge $V \subset X$ eine *Umgebung von x* , wenn es eine offene Menge U gibt mit $x \in U \subset V$.

1.5. BEMERKUNG. Die Offenheit einer Menge U hängt ab vom umgebenden Raum X und der gewählten Metrik d . So ist etwa die Menge $[-\pi, \pi] \cap \mathbb{Q}$ offen in \mathbb{Q} , aber nicht in \mathbb{R} . Aus der Analysis wissens Sie aber auch, dass unterschiedliche Metriken den gleichen Konvergenzbegriff und somit die gleiche Topologie induzieren können.

1.6. BEMERKUNG. Zu Definition 1.4 äquivalent ist die folgende Charakterisierung offener und abgeschlossener Mengen in metrischen Räumen. Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede Folge $(a_i)_i$ in A , die in (X, d) im Sinne der Analysis konvergiert, der Grenzwert $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i$ in A liegt. Eine Teilmenge $U \subset X$ ist offen, wenn $X \setminus U$ abgeschlossen ist.

Wir wollen jetzt zeigen, wie man Stetigkeit auch definieren kann, wenn man nicht die Metrik kennt, sondern nur ihre offenen Mengen. Auch das sollte aus der Analysis bekannt sein.

1.7. SATZ. Seien (X, d) und (Y, d') metrische Räume. Eine Abbildung $F: (X, d) \rightarrow (Y, d')$ ist genau dann stetig, wenn die Urbilder aller offenen Teilmengen von Y in X wiederum offen sind.

BEWEIS. Wir nehmen an, dass F stetig ist im Sinne von Definition 1.3. Sei $V \subset Y$ offen, und sei $x \in F^{-1}(V) \subset X$ beliebig. Da V offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(F(x)) \subset V$. Aufgrund der Stetigkeit von F existiert ein $\delta > 0$, so dass $F(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(F(x)) \subset V$ gilt, insbesondere folgt $B_\delta(x) \subset F^{-1}(V)$. Da x beliebig war, ist also $F^{-1}(V)$ offen in X .

Wir nehmen jetzt an, dass Urbilder offener Mengen offen sind. Seien $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Da der Ball $B_\varepsilon(F(x))$ in Y offen ist, ist auch $U = F^{-1}(B_\varepsilon(F(x)))$ offen in X , und natürlich liegt x in U . Also existiert ein $\delta > 0$, so dass $B_\delta(x) \subset U$ gilt. Es folgt $F(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(F(x))$. Da x und ε beliebig waren, ist F also stetig im Sinne von Definition 1.3. \square

1.b. Topologische Räume

Wir erinnern uns an die Definition topologischer Räume und stetiger Abbildungen aus der Analysis. Zur Motivation betrachten wir die entsprechenden Definitionen für metrische Räume aus dem letzten Abschnitt.

1.8. BEMERKUNG. Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei \mathcal{O}_d die von d definierte Topologie auf X .

- (1) Die leere Menge \emptyset und X selbst sind nach Definition 1.4 offen, gehören also zu \mathcal{O}_d .
- (2) seien U_1, \dots, U_k offen, und sei $x \in U_1 \cap \dots \cap U_k$. Da die U_i offen sind, existieren $\varepsilon_i > 0$, so dass $B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i$. Sei $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$, dann ist $\varepsilon > 0$, und es gilt $B_\varepsilon(x) \subset U_1 \cap \dots \cap U_k$. Da x beliebig war, ist $U_1 \cap \dots \cap U_k$ also wieder offen.
- (3) Sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_d$ eine beliebig grosse Ansammlung offener Mengen. Sei

$$x \in \bigcup \mathcal{U} = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U,$$

dann existiert also ein $U \in \mathcal{U}$, so dass $x \in U$. Da U offen ist, existiert $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(x) \subset U \subset \bigcup \mathcal{U}$. Da x beliebig war, ist $\bigcup \mathcal{U}$ also wieder offen.

Wir benutzen diese drei Beobachtungen über \mathcal{O}_d , um den allgemeinen Begriff einer Topologie zu definieren.

1.9. DEFINITION. Sei X eine Menge. Eine *Topologie* auf X ist eine Teilmenge \mathcal{O} der Potenzmenge $\mathcal{P}X$ mit folgenden Eigenschaften.

- (1) Die leere Menge \emptyset und X selbst liegen in \mathcal{O} .
- (2) Seien $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{O}$, dann liegt auch $U_1 \cap \dots \cap U_k \in \mathcal{O}$.
- (3) Sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$, dann liegt auch $\bigcup \mathcal{U}$ in \mathcal{O} .

Ein *topologischer Raum* ist ein Paar (X, \mathcal{O}) aus einer Menge X und einer Topologie \mathcal{O} auf X .

1.10. BEISPIEL. Sei (X, d) ein metrischer Raum, dann definiert \mathcal{O}_d nach Bemerkung 1.8 eine Topologie auf X . Umgekehrt heißt eine Topologie \mathcal{O} auf X *metrisierbar*, wenn es eine Metrik d auf X gibt, so dass $\mathcal{O} = \mathcal{O}_d$. Die meisten topologischen Räume, denen wir später begegnen, werden metrisierbar sein. Dennoch gibt es interessante und wichtige topologische Räume, die nicht metrisierbar sind.

1.11. BEISPIEL. Sei X eine beliebige Menge. Wir definieren zwei “triviale“ Topologien auf X .

- (1) Sei $\mathcal{O}_\delta = \mathcal{P}X$, dann ist jede Teilmenge von X offen bezüglich \mathcal{O}_δ . Wir nennen \mathcal{O}_δ die *diskrete Topologie* auf X . Die diskrete Topologie wird von der Metrik aus Beispiel 1.2 (3) induziert.
- (2) Das andere Extrem ist $\mathcal{O}_K = \{\emptyset, X\} \subset \mathcal{P}X$. Diese Topologie heißt *Klumpentopologie* (*indiskrete Topologie*). Diese Topologie ist nur metrisierbar, wenn X höchstens einen Punkt enthält, wie wir später sehen werden.

1.12. DEFINITION. Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *offen* bezüglich \mathcal{O} , falls $U \in \mathcal{O}$. Sei $x \in X$ und $V \subset X$ mit $x \in V$, dann heißt V eine *Umgebung* von x bezüglich \mathcal{O} , falls es eine offene Menge $U \in \mathcal{O}$ gibt, so dass $x \in U \subset V$ gilt. Sei $A \subset X$, dann heißt A *abgeschlossen* bezüglich \mathcal{O} , falls das Komplement $X \setminus A$ offen ist.

1.13. DEFINITION. Sei (X, \mathcal{O}) topologischer Raum, und sei $Y \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Das *Innere* $\overset{\circ}{Y}$ von Y in X ist die größte offene Teilmenge von X , die ganz in Y enthalten ist. Der *Abschluss* \overline{Y} von Y in X ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X , die Y enthält. Der *Rand* von Y in X ist die Menge $\partial Y = \overline{Y} \setminus \overset{\circ}{Y}$.

1.14. BEMERKUNG. Sei (X, \mathcal{O}) topologischer Raum, und sei $Y \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Wir wollen uns überlegen, dass es die oben definierten Teilmengen wirklich gibt. Es gilt

$$\overset{\circ}{Y} = \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{O} \\ U \subset Y}} U \quad \text{und} \quad \overline{Y} = \bigcap_{\substack{X \setminus A \in \mathcal{O} \\ A \supset Y}} A.$$

Die erste Menge ist offen nach Definition 1.9 (3). Für die zweite zeigt man analog, dass das Komplement offen ist. Ausserdem ist

$$\overline{X \setminus Y} = X \setminus \overset{\circ}{Y}, \quad (X \setminus Y)^\circ = X \setminus \overline{Y}, \quad \text{und} \quad \partial(X \setminus Y) = \partial Y.$$

1.15. BEISPIEL. Das Innere und der Abschluss einer Menge hängen vom umgebenden Raum und seiner Topologie ab. Sei $V = [-\pi, \pi] \cap \mathbb{Q}$, dann gilt

$$\begin{array}{lll} \text{in } \mathbb{Q} : & \overset{\circ}{V} = V, & \overline{V} = V, & \partial V = \emptyset, \\ \text{und in } \mathbb{R} : & \overset{\circ}{V} = \emptyset, & \overline{V} = [-\pi, \pi], & \partial V = [-\pi, \pi]. \end{array}$$

Falls es klar ist, von welcher Topologie \mathcal{O} auf welchem Raum X wir reden, lassen wir den Zusatz „bezüglich \mathcal{O} “ oder „in X “ in der Regel weg. Wir haben in Satz 1.7 ein „topologisches“ Kriterium für die Stetigkeit von Abbildungen zwischen metrischen Räumen kennengelernt. Wir erheben dieses Kriterium zur Definition.

1.16. DEFINITION. Es sei $F: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Dann heißt F

- (1) *stetig am Punkt* $x \in X$ genau dann, wenn für alle Umgebungen $V \subset Y$ von $F(x)$ das Urbild $F^{-1}(V)$ wieder eine Umgebung von x ist, und
- (2) *stetig* genau dann, wenn Urbilder offener Mengen offen sind, wenn also $F^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$ für alle $U \in \mathcal{O}_Y$.

Es bezeichne $C(X, Y)$ die Menge aller stetigen Abbildungen von X nach Y .

Wenn eine stetige Abbildung $F: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ bijektiv ist und $F^{-1}: (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ ebenfalls stetig ist, heißt F ein *Homöomorphismus*.

- 1.17. BEISPIEL. (1) Nach Satz 1.7 sind Abbildungen zwischen metrischen Räumen genau dann im topologischen Sinne stetig, wenn sie im metrischen Sinne stetig sind.
- (2) Seien (X, \mathcal{O}_X) , (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume, und sei y_0 ein Punkt in Y . Die konstante Abbildung $F: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ mit $F(x) = y_0$ für alle $x \in X$ (kurz: $F \equiv y_0$) ist immer stetig, denn für jede offene Menge $U \subset Y$ gilt

$$F^{-1}(U) = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{O}_X & \text{falls } y_0 \notin U, \text{ und} \\ X \in \mathcal{O}_X & \text{falls } y_0 \in U. \end{cases}$$

1.18. BEMERKUNG. Seien (X, \mathcal{O}_X) , (Y, \mathcal{O}_Y) , (Z, \mathcal{O}_Z) topologische Räume.

- (1) Die Identität $\text{id}_X: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ auf X mit $\text{id}_X(x) = x$ für alle $x \in X$ ist immer stetig, denn für alle $U \in \mathcal{O}_X$ gilt

$$\text{id}_X^{-1}(U) = U \in \mathcal{O}_X .$$

- (2) Seien $F: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ und $G: (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$ stetige Abbildungen, dann ist auch $G \circ F: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$ stetig. Sei nämlich $U \subset Z$ offen in Z , dann ist $G^{-1}(U)$ offen in Y , und somit ist $F^{-1}(G^{-1}(U))$ offen in X . Da also $(G \circ F)^{-1}(U) = F^{-1}(G^{-1}(U)) \in \mathcal{O}_X$ für alle $U \in \mathcal{O}_Z$, ist $G \circ F$ stetig.

Mit einer *Klasse* bezeichnen wir eine beliebige Ansammlung von Mengen. Manche Klassen sind Mengen, alle anderen nennt man *echte Klassen*. Ein Beispiel für eine echte Klasse ist die Klasse aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten. Da Elemente von Klassen selbst bloß Mengen und keine echten Klassen sind, erhalten wir hier kein Paradoxon.

1.19. DEFINITION. Eine *Kategorie* \mathcal{C} besteht aus

- (1) einer Klasse von *Objekten* $\text{Obj}(\mathcal{C})$,
- (2) zu je zwei Objekten $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ einer Menge $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ von *Morphismen*,
- (3) je einem ausgezeichneten Morphismus $\text{id}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ für jedes Objekt $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, und
- (4) zu je drei Objekten $X, Y, Z \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ einer *Verkettung*

$$\circ: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \quad \text{mit} \quad (f, g) \mapsto g \circ f ,$$

so dass die folgenden zwei Axiome gelten.

Identität. Seien $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ und $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, dann gilt

$$f = f \circ \text{id}_X = \text{id}_Y \circ f .$$

Assoziativität. Für alle $X, Y, Z, W \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ und alle $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W)$, gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f .$$

In der Literatur werden gelegentlich auch Klassen von Morphismen zwischen zwei gegebenen Objekten zugelassen. Solche Kategorien werden wir in dieser Vorlesung voraussichtlich nicht brauchen.

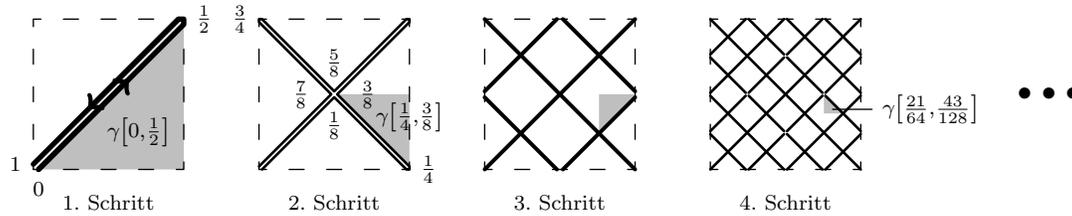


ABBILDUNG 1.1. Eine flächenfüllende Kurve

1.20. BEISPIEL. Es folgen einige typische Beispiele von Kategorien.

- (1) Die Kategorie Set hat als Objekte alle Mengen, und als Morphismen alle Abbildungen zwischen Mengen.
- (2) Die Kategorie Grp hat als Objekte alle Gruppen, und als Morphismen alle Gruppenhomomorphismen.
- (3) Sei \mathbb{k} ein Körper, dann hat die Kategorie $Vec_{\mathbb{k}}$ als Objekte alle \mathbb{k} -Vektorräume, und als Morphismen alle \mathbb{k} -linearen Abbildungen.
- (4) Die Kategorie Top hat als Objekte alle topologischen Räume, und als Morphismen alle stetigen Abbildungen, siehe Bemerkung 1.18.

In jedem dieser Beispiele ist die Identität die Identität der zugrundeliegenden Menge, und die Komposition die Hintereinanderschaltung von Abbildungen.

Schließlich wollen wir an ein pathologisches Beispiel erinnern, das uns zeigt, dass stetige Abbildungen mitunter unerwartete Eigenschaften an den Tag legen.

1.21. BEISPIEL. Es gibt stetige, surjektive Abbildungen vom Einheitsintervall $I = [0, 1]$ in die Menge $I \times I \subset \mathbb{R}^2$. Zum Beispiel kann man zwei Kopien der Kochschen Schneeflockenkurve (mit dem richtigen Parameter) aneinandersetzten, siehe Abbildung 1.1. Die entstehende Kurve γ ist stetig, sogar $\frac{1}{2}$ -Höldersch. In jedem Schritt γ_{i+1} wird jede Strecke der Kurve γ_i durch vier Strecken der halben Länge ersetzt. Man überzeugt sich, dass die Folge $(\gamma_i)_i$ gleichmäßig konvergiert. Den Bildpunkt $\gamma(t)$ kann man durch Intervallschachtelung bestimmen.

Wir können auch verschiedene Topologien auf ein und demselben Raum vergleichen.

1.22. DEFINITION. Seien \mathcal{O} und \mathcal{O}' zwei Topologien auf einer Menge X . Dann ist \mathcal{O}' *feiner* als \mathcal{O} und \mathcal{O} *größer* als \mathcal{O}' , wenn $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$.

1.23. BEMERKUNG. Eine Topologie \mathcal{O}' auf X ist nach Definition 1.16 genau dann feiner als \mathcal{O} , wenn die Identität $\text{id}_X: (X, \mathcal{O}') \rightarrow (X, \mathcal{O})$ stetig ist. Mit Bemerkung 1.18 (2) folgt: Sei die Abbildung $F: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ stetig, sei \mathcal{O}'_X feiner als oder gleich \mathcal{O}_X , und sei \mathcal{O}'_Y gröber als oder gleich \mathcal{O}_Y , dann ist auch $F: (X, \mathcal{O}'_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}'_Y)$ stetig.

Faustregel: je feiner eine Topologie auf X ist, desto weniger Folgen in X konvergieren, desto weniger Abbildung nach X sind stetig, und desto mehr Abbildungen von X in einen anderen Raum sind stetig.

1.24. BEISPIEL. Sei $X = \mathbb{R}^n$, sei \mathcal{O}_d die metrische Topologie zur Standardmetrik, und sei \mathcal{O}_f die Topologie zur französischen Eisenbahnmetrik aus Übung 1.114. Dann ist die diskrete Topologie $\mathcal{O}_\delta = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ aus Beispiel 1.11 (1) feiner als \mathcal{O}_f , die Topologie \mathcal{O}_f ist feiner als \mathcal{O}_d , und \mathcal{O}_d ist wiederum feiner als die Klumpentopologie $\mathcal{O}_K = \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$ aus Beispiel 1.11 (2).

1.c. Trennungseigenschaften

Wir untersuchen die Frage, ob es in einem topologischen Raum genug offene Mengen gibt, so dass man vorgegebene Punkte oder Teilmengen voneinander „trennen“ kann. Wenn das gut genug geht, kann man zeigen, dass es „viele“ reellwertige Funktionen auf dem Raum gibt.

Wir beantworten diese Frage zunächst für metrische Räume. Sei dazu $I = ([0, 1], \mathcal{O}_d)$ das reelle Einheitsintervall, wie üblich versehen mit der metrischen Topologie.

1.25. SATZ. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt bezüglich \mathcal{O}_d :

- (1) einpunktige Teilmengen von X sind abgeschlossen;
- (2) seien $A_0, A_1 \subset X$ abgeschlossen und disjunkt, dann existieren disjunkte offene Mengen $U_0, U_1 \in \mathcal{O}$ mit $A_0 \subset U_0$ und $A_1 \subset U_1$;
- (3) seien $A_0, A_1 \subset X$ abgeschlossen und disjunkt, dann gibt es eine stetige Funktion $f: X \rightarrow I$ mit $A_0 = f^{-1}\{0\}$ und $A_1 = f^{-1}\{1\}$.

BEWEIS. Zu (1). Zu zeigen ist die Offenheit von $X \setminus \{x\}$ für ein beliebiges $x \in X$. Sei dazu $x \neq y \in X$, dann folgt

$$B_{d(x,y)}(y) \subset X \setminus \{x\}.$$

Also ist $X \setminus \{x\}$ offen nach 1.4.

(3) \implies (2). Wähle f wie in (3). Da f stetig ist, sind die Mengen $U_0 = f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ und $U_1 = f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ disjunkt und offen in X , da $[0, \frac{1}{2})$ und $(\frac{1}{2}, 1]$ disjunkt und offen in I sind.

Punkt (3) lassen wir als Übung 1.122. □

1.26. DEFINITION. Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}) hat die *Trennungseigenschaft* oder erfüllt das *Trennungsaxiom*

- (T0) wenn es zu je zwei Punkten $x \neq y$ in X eine offene Menge $U \in \mathcal{O}$ gibt mit $x \in U, y \notin U$ oder $x \notin U, y \in U$,
- (T1) wenn alle einpunktigen Mengen $\{x\}$ für $x \in X$ abgeschlossen sind,
- (T2) oder ist ein *Hausdorff-Raum*, wenn es zu je zwei Punkten $x \neq y$ in X disjunkte offene Mengen $U, V \in \mathcal{O}$ mit $x \in U$ und $y \in V$ gibt,
- (T3) wenn es zu jeder abgeschlossenen Teilmenge $A \subset X$ und jedem Punkt $x \in X \setminus A$ disjunkte offene Mengen $U, V \in \mathcal{O}$ mit $A \subset U$ und $x \in V$ gibt,
- (T3a) wenn es zu jeder abgeschlossenen Teilmenge $A \subset X$ und jedem Punkt $x \in X \setminus A$ eine stetige Funktion $f: (X, \mathcal{O}) \rightarrow I$ mit $f(A) \subset \{0\}$ und $f(x) = 1$ gibt,
- (T4) wenn es zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Teilmengen $A, B \subset X$ disjunkte offene Mengen $U, V \in \mathcal{O}$ mit $A \subset U$ und $B \subset V$ gibt.

Ein topologischer Raum heißt *regulär*, wenn er die Eigenschaften (T1) und (T3) erfüllt, *vollständig regulär* oder *Tychonoff-Raum*, wenn er die Eigenschaften (T1) und (T3a) erfüllt, und *normal*, wenn er die Eigenschaften (T1) und (T4) erfüllt.

Die für uns zunächst wichtigste Trennungseigenschaft ist „hausdorffsch“. Bemerkung 1.27 und Beispiel 1.28 sollen das verdeutlichen.

1.27. BEMERKUNG. Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum.

- (1) Wenn (X, \mathcal{O}) hausdorffsch ist, dann hat jede Folge in X höchstens einen Grenzwert. Das heißt, zu jeder Folge $(x_i)_i$ gibt es höchstens einen Punkt $x \in X$, so dass für jede Umgebung U von x fast alle Folgenglieder x_i in U liegen. Denn wäre $y \in X \setminus \{x\}$ ein weiterer Grenzwert, so könnte man x und y durch disjunkte offene Umgebungen U und V trennen, und fast alle Folgenglieder müssten in $U \cap V = \emptyset$ liegen.

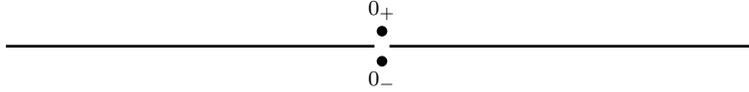


ABBILDUNG 1.2. Ein nicht Hausdorffscher Raum

- (2) Wenn sich zwei Punkte $x, y \in X$ nicht durch disjunkte offene Umgebungen trennen lassen, gilt $f(x) = f(y)$ für jede stetige Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Denn wäre $f(x) \neq f(y)$, so könnte man $f(x)$ und $f(y)$ in \mathbb{R} durch disjunkte offene Intervalle $I, J \subset \mathbb{R}$ trennen. Aber dann trennten $f^{-1}(I)$ und $f^{-1}(J)$ bereits x und y .

1.28. BEISPIEL. Betrachte den Raum $X = (-1, 0) \cup \{0_+, 0_-\} \cup (0, 1)$ mit der folgenden Topologie \mathcal{O} . Eine Teilmenge $U \subset X$ sei offen, wenn zu jedem Punkt $x \in U \setminus \{0_+, 0_-\}$ ein $\varepsilon_x > 0$ mit $(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \subset U \setminus \{0_+, 0_-\}$ existiert, und falls $0_- \in U$ oder $0_+ \in U$, ein $\varepsilon_0 > 0$ mit $(-\varepsilon_0, 0) \cup (0, \varepsilon_0) \subset U$ existiert, siehe Abbildung 1.2. Man überzeugt sich leicht, dass (X, \mathcal{O}) die Trennungseigenschaften (T0) und (T1) erfüllt. Die Hausdorff-Eigenschaft (T2) ist jedoch verletzt, da der Schnitt je zweier Umgebungen von 0_+ und 0_- eine kleine Menge der Form $(-\varepsilon, 0) \cup (0, \varepsilon)$ mit $\varepsilon > 0$ enthält. Als Beispiel für eine Folge mit zwei Grenzwerten betrachten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = 0_+ \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = 0_- .$$

Andererseits konvergiert die konstante Folge $(0_+)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht gegen 0_- , und eine Folge, deren Glieder abwechselnd 0_+ und 0_- sind, divergiert.

Ein wichtiges Hilfsmittel in der Topologie ist das Lemma von Urysohn, wonach jeder (T4)-Raum „viele stetige Funktionen“ trägt.

1.29. LEMMA (Urysohn). Sei (X, \mathcal{O}) ein (T4)-Raum. Dann existiert zu je zwei abgeschlossenen, disjunkten Teilmengen $A, B \subset X$ eine stetige Funktion $f: X \rightarrow I$ mit $f|_A \equiv 0$ und $f|_B \equiv 1$.

Es gilt auch die Umkehrung: wenn zu je zwei abgeschlossenen, disjunkten Teilmengen $A, B \subset X$ eine stetige Funktion $f: X \rightarrow I$ mit $f|_A \equiv 0$ und $f|_B \equiv 1$ existiert, dann ist X ein (T4)-Raum. Dazu betrachten wir beispielsweise die offenen Mengen $f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ und $f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$.

1.30. BEISPIEL. Wir geben zwei einfache Beispiele.

- (1) Die einpunktigen Mengen $\{0\}, \{1\} \subset \mathbb{R}$ sind abgeschlossen und disjunkt. Wir trennen sie mit Hilfe der stetigen Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{falls } x \leq 0, \text{ und} \\ 1 & \text{falls } x \geq 1. \end{cases}$$

- (2) Die Teilmengen $[1, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$ und $[\sqrt{2}, 2] \cap \mathbb{Q}$ sind in \mathbb{Q} abgeschlossen und disjunkt. Wir trennen sie mit der stetigen Funktion

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < \sqrt{2}, \text{ und} \\ 1 & \text{falls } x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

All das geht nur, weil $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

BEWEIS. Siehe [Que, Abschnitt 7.A]. Sei

$$D = \left\{ a 2^{-k} \mid a, k \in \mathbb{N}, 0 \leq a \leq 2^k \right\}$$

die Menge der dyadischen Zahlen im Einheitsintervall I . Wir wollen induktiv zu allen $d \in D$ eine offene Menge U_d konstruieren, so dass $A \subset \overline{U}_d \subset U_{d'} \subset X \setminus B$ für alle $d, d' \in D$ mit $d < d'$. Für $t \in I$ definieren wir dann offene Mengen

$$U_t = \bigcup_{d \in D \cap [0, t]} U_d,$$

und wiederum gilt $\overline{U}_t \subset U_{t'}$ für alle $t, t' \in I$ mit $t < t'$, da zwischen t und t' noch beliebig viele dyadische Zahlen liegen.

Mit $U_t = \emptyset$ für $t < 0$ und $U_t = X$ für $t > 1$ definieren wir

$$f(x) = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid x \in U_t\} \in [0, 1].$$

Aus $A \subset U_0 \subset U_1 \subset X \setminus B$ folgt sofort $f|_A \equiv 0$ und $f|_B \equiv 1$. Um Stetigkeit zu zeigen, betrachten wir für $t \in I$ und $x \in X$ mit $f(x) = t$ sowie $\varepsilon > 0$ das Intervall $(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \cap I$. Sei $0 < \delta < \varepsilon$, dann folgt

$$x \in U_{t+\delta} \setminus \overline{U}_{t-\delta} \subset f^{-1}(t - \varepsilon, t + \varepsilon),$$

also ist f stetig.

Nun zur Konstruktion der Familie $(U_d)_{d \in D}$. Zu (T4) äquivalent ist die folgende Aussage: sei $A \subset Y \subset X$, A abgeschlossen und Y offen, dann existiert eine offene Menge U , so dass $A \subset U \subset \overline{U} \subset Y$.

Wir wählen also zunächst $U_0 \in \mathcal{O}$ mit $A \subset U_0 \subset \overline{U}_0 \subset X \setminus B$, und $U_1 = X \setminus B \in \mathcal{O}$. Seien jetzt alle U_d mit Nenner 2^k bestimmt, dann wählen wir $U_{(2a+1)2^{-k-1}}$ induktiv so, dass

$$\overline{U}_{as^{-k}} \subset U_{(2a+1)2^{-k-1}} \subset \overline{U}_{(2a+1)2^{-k-1}} \subset U_{(a+1)2^{-k}}. \quad \square$$

1.31. BEMERKUNG. Urysohn's Lemma 1.29 ist nicht ganz so stark wie Satz 1.25 (3), denn dort galt sogar $f^{-1}(0) = A$ und $f^{-1}(1) = B$. Wenn nämlich $f^{-1}(0) = A$ gilt, dann können wir die abgeschlossene Menge A als Durchschnitt abzählbar vieler offener Mengen schreiben, etwa

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left[0, \frac{1}{n}\right).$$

Und das muss in allgemeinen (T4)-Räumen nicht gelten.

1.32. SATZ (Tietze). *Es sei X ein (T4)-Raum, $A \subset X$ abgeschlossen und $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert eine stetige Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f|_A = g$.*

Der Beweis basiert auf dem Lemma 1.29 von Urysohn. Man erhält das Lemma von Urysohn zurück, indem man auf der abgeschlossenen Teilmenge $A \cup B \subset X$ die Funktion g mit $g|_A \equiv 0$ und $g|_B \equiv 1$ betrachtet. Insbesondere gilt auch hier die Umkehrung: wenn man jede stetige Funktion auf einer abgeschlossenen Teilmenge auf den ganzen Raum fortsetzen kann, dann erfüllt der Raum (T4). Wir greifen hier vor auf die Unterraumtopologie aus Abschnitt 1.f.

BEWEIS. Siehe [Que, Abschnitt 7.B]. Wir setzen zunächst Funktionen $g: A \rightarrow [-1, 1]$ stetig auf X fort. Anschließend betrachten wir Funktionen $g: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Sei also $g: A \rightarrow [-1, 1]$ gegeben. Wir konstruieren induktiv eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|f_n(x)| \leq 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{für alle } x \in X, \quad (\text{a})$$

$$|f_n(a) - g(a)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{für alle } a \in A, \quad (\text{b})$$

$$\text{und} \quad |f_k(x) - f_\ell(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{für alle } k, \ell \geq n \text{ und alle } x \in X. \quad (\text{c})$$

Die Funktion $f_0 \equiv 0$ erfüllt bereits (a) und (b).

Gegeben f_n , betrachte die nach Definition 1.49 abgeschlossenen Teilmengen

$$B_n = \left\{ x \in A \mid f_n(x) - g(x) \leq -\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\}$$

und

$$C_n = \left\{ x \in A \mid f_n(x) - g(x) \geq \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\}$$

von X . Nach Urysohns Lemma 1.29 existiert eine stetige Funktion $h_n: X \rightarrow [-\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n, \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n]$ mit $h_n|_{B_n} \equiv \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$ und $h_n|_{C_n} \equiv -\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n$. Dann hat die Funktion $f_{n+1} = f_n + h_n$ wieder die Eigenschaften (a) und (b).

Außerdem gilt (c), denn

$$|f_{n+k}(x) - f_n(x)| \leq \sum_{j=0}^{k-1} |h_{n+j}(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^j < \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Im Grenzwert erhalten wir eine Funktion

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n: X \rightarrow \mathbb{R}.$$

Wegen (c) ist die Konvergenz gleichmäßig, also ist die Grenzfunktion stetig nach Analysis I. Aus (b) folgt $f|_A = g$, und wegen (a) hat f Werte in $[-1, 1]$.

Sei jetzt $g: A \rightarrow (-1, 1)$ gegeben, dann liefert die obige Konstruktion zunächst eine stetige Fortsetzung $f: X \rightarrow [-1, 1]$. Da aber $B = f^{-1}(\{-1, 1\})$ abgeschlossen und zu A disjunkt ist, erhalten wir mit dem Lemma von Urysohn eine Funktion $u: X \rightarrow [0, 1]$ mit $u|_A \equiv 1$ und $u|_B \equiv 0$, und die Funktion uf ist eine Fortsetzung von g mit Werten in $(-1, 1)$. Da $(-1, 1)$ homöomorph zu \mathbb{R} ist, folgt der obige Satz. \square

1.33. BEMERKUNG. Aus Satz 1.25 und den obigen Definitionen ergeben sich die folgenden Implikationen.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{metrisierbar} & \implies & \text{normal} & \implies & \begin{array}{c} \text{vollständig} \\ \text{regulär /} \\ \text{Tychonoff} \end{array} & \implies & \text{regulär} & \implies & \begin{array}{c} \text{Hausdorff} \\ \text{(T2)} \end{array} & \implies & \text{(T1)} & \implies & \text{(T0)} \\ & & & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & & & & \\ & & & & \text{(T4)} & & \text{(T3a)} & \implies & \text{(T3)} & & & & & \end{array}$$

Aus metrisierbar folgt normal wegen Satz 1.25. Die drei vertikalen Pfeile beruhen direkt auf den Definitionen. Aus (T3a) folgt (T3) wie (2) aus (3) in Satz 1.25, genauso folgt regulär aus vollständig regulär. Um aus regulär hausdorffsch zu folgern, ersetzen wir die abgeschlossene Menge in (T3) durch einen Punkt, der nach (T1) abgeschlossen ist. Aus normal folgt vollständig regulär mit (T1) und Urysohns Lemma 1.29. Aus hausdorffsch folgt (T1) wie im Beweis von 1.25 (1), und (T1)-Räume sind offensichtlich (T0).

In den Übungen 1.123–1.125 wird deutlich, dass (T3), (T3a) und (T4) ohne (T1) wenig aussagen.

1.34. BEMERKUNG. Wir haben gesehen, wie hilfreich Trennungssaxiome beispielsweise dann sind, wenn es darum geht, stetige Funktionen nach \mathbb{R} mit der Standardtopologie zu konstruieren. Es gibt aber auch Bereiche der Mathematik, in denen das nicht im Vordergrund steht. Dann benötigt man auch keine Trennungssaxiome, beispielsweise sind algebraische Varietäten mit der Zariski-Topologie in den meisten Fällen nicht Hausdorffsch. Wir lernen später eine andere Charakterisierung der Hausdorff-Eigenschaft kennen, die sich leichter auf andere Kategorien von Räumen übertragen lässt.

1.d. Basen und Abzählbarkeitseigenschaften

Um eine Topologie \mathcal{O} zu definieren, ist es häufig unbequem, alle offenen Mengen anzugeben. Stattdessen sucht man möglichst kleine Teilmengen \mathcal{U} von \mathcal{O} , so dass \mathcal{O} selbst die größte Topologie ist, für die alle Mengen in \mathcal{U} offen sind. So wird man auf die Begriffe „Basis“ und „Subbasis“ geführt. Für spätere Überlegungen ist es oft hilfreich zu wissen, dass manche topologischen Räume eine „kleine“ — sprich abzählbare — Basis besitzen.

1.35. DEFINITION. Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ heißt *Basis* von \mathcal{O} , wenn

$$\mathcal{O} = \left\{ \bigcup \mathcal{U} \mid \mathcal{U} \subset \mathcal{B} \right\} = \left\{ \bigcup_{i \in I} U_i \mid I \text{ Menge, } U_i \in \mathcal{B} \text{ für alle } i \in I \right\}.$$

Eine Teilmenge $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$ heißt *Subbasis* von \mathcal{O} , wenn die Menge

$$\{ U_1 \cap \dots \cap U_k \mid k \in \mathbb{N}, U_1, \dots, U_k \in \mathcal{S} \}$$

eine Basis von \mathcal{O} bildet.

Mit anderen Worten: \mathcal{B} ist eine Basis, wenn sich jede offene Menge als (beliebige) Vereinigung von Elementen aus \mathcal{B} schreiben lässt. \mathcal{S} ist eine Subbasis, wenn sich jede offene Menge als (beliebige) Vereinigung von Durchschnitten je endlich vieler Elemente aus \mathcal{S} schreiben lässt. Insbesondere ist jede Basis auch eine Subbasis.

1.36. BEISPIEL. Es folgen Basen und Subbasen für einige uns wohlbekannte Topologien.

- (1) Sei X eine Menge. Die einpunktigen Teilmengen von X bilden eine Basis der diskreten Topologie \mathcal{O}_δ auf X . Und da alle einpunktigen Mengen offen sind, muss jede Basis von \mathcal{O}_δ alle einpunktigen Mengen enthalten. Die Menge $\{X\}$ bildet eine Basis der Klumpentopologie \mathcal{O}_K , und die leere Menge bildet eine Subbasis, denn $\bigcap \emptyset = X \in \mathcal{P}X$ nach Konvention.
- (2) Sei (X, d) ein metrischer Raum, dann bildet die Menge \mathcal{B} aller metrischen Bälle mit Radius $1/k$ für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ eine Basis der metrischen Topologie \mathcal{O}_d . Sei nämlich $U \in \mathcal{O}_d$. Nach Definition 1.4 existiert zu jedem $x \in U$ ein Radius $0 < \varepsilon_x$ so dass $B_{\varepsilon_x}(x) \subset U$, und zu ε_x existiert nach dem Axiom des Archimedes eine Zahl $k_x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so dass $0 < 1/k_x \leq \varepsilon_x$. Also gilt

$$U = \bigcup_{x \in U} B_{1/k_x}(x) \quad \text{und} \quad \{ B_{1/k_x}(x) \mid x \in U \} \subset \mathcal{B}.$$

Darüberhinaus ist eine Teilmenge $V \subset X$ genau dann eine Umgebung von $x \in X$, wenn sie einen der abzählbar vielen offene Bälle $B_{1/k}(x)$ mit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ enthält.

- (3) Sei $X = \mathbb{R}^n$ mit der Standard-Topologie versehen. Dann bildet die Menge aller metrischen Bälle mit rationalem Radius um Mittelpunkte mit rationalen Koordinaten bereits eine Basis der metrischen Topologie. Diese Basis ist abzählbar, während \mathcal{O} selbst überabzählbar ist.

Die letzten beiden Beispiele sollen als Motivation für die folgende Definition dienen.

1.37. DEFINITION. Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum. Dann hat (X, \mathcal{O}) die *Abzählbarkeitseigenschaft* oder erfüllt das *Abzählbarkeitsaxiom*

- (A1) wenn jeder Punkt $x \in X$ eine abzählbare Menge $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{P}X$ von Umgebungen besitzt, so dass $V \subset X$ genau dann eine Umgebung von x ist, wenn es ein $U \in \mathcal{U}_x$ mit $U \subset V$ gibt, und
- (A2) wenn \mathcal{O} eine abzählbare Basis besitzt.

Eine Teilmenge $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{O}$ wie in (A1) heißt auch *Umgebungsbasis*. Aus (A2) folgt (A1), denn sei \mathcal{B} eine abzählbare Basis von X und $x \in X$, dann ist

$$\mathcal{U}_x = \{ U \in \mathcal{B} \mid x \in U \}$$

eine abzählbare Umgebungsbasis von x . Das zweite Abzählbarkeitsaxiom lässt sich benutzen, um topologische Argumente induktiv über „kleine“ Mengen zu führen. Das erste Abzählbarkeitsaxiom wird häufig benötigt, um topologische Begriffe über Folgen zu erklären, so wie im folgenden Satz.

1.38. SATZ. *Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum mit der Abzählbarkeitseigenschaft (A1). Dann ist eine Menge $A \subset X$ genau dann abgeschlossen, wenn sie folgenabgeschlossen ist, das heißt, wenn jede Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in A , die in X konvergiert, ihre Grenzwerte in A annimmt.*

Beachte, dass der Grenzwert einer Folge nicht eindeutig sein muss, wenn der Raum nicht Hausdorff (T2) ist. Wenn X das Axiom (A1) nicht erfüllt, ist der obige Satz falsch. Wir geben unten eine andere, ähnliche Charakterisierung abgeschlossener Mengen an.

BEWEIS. Sei A abgeschlossen, und sei $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X$ eine Folge mit Grenzwert $x \in X \setminus A$. Wir wollen zeigen, dass dann nicht alle a_i in A liegen können. Da $X \setminus A$ eine offene Umgebung von x ist, existiert ein $i_0 > 0$, so dass $a_i \notin A$ für alle $i \geq i_0$.

Sei umgekehrt A nicht abgeschlossen, das heißt, es gibt einen Punkt $x \notin A$, so dass jede Umgebung V von x die Menge A schneidet. Da (A1) gilt, können wir eine abzählbare Umgebungsbasis $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von x wählen. Da endliche Durchschnitte offener Mengen offen sind, sind endliche Durchschnitte von Umgebungen von x wiederum Umgebungen von x , und wir setzen $U_i = V_1 \cap \dots \cap V_i$. Dann ist $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Umgebungsbasis mit der Eigenschaft, dass $U_j \subset U_i$ für alle $j \geq i$. Sei $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_i \in A \cap U_i$. Eine Teilmenge $V \subset X$ ist Umgebung von x genau dann, wenn es ein i_0 gibt mit $U_i \subset V$ für alle $i \geq i_0$. Es folgt $a_i \in V$ für alle $i \geq i_0$. Daraus folgt, dass x ein Grenzwert unserer Folge a_i ist. \square

1.39. BEMERKUNG. Für allgemeine metrisierbare Räume gilt nur (A1), siehe Beispiel 1.36 (2). Es gilt aber der *Metrisationssatz von Urysohn*: Wenn (X, \mathcal{O}) die zweite Abzählbarkeitseigenschaft (A2) hat, dann ist (X, \mathcal{O}) genau dann metrisierbar, wenn (X, \mathcal{O}) regulär ist, also (T1) und (T3) erfüllt. Man beachte, dass (X, \mathcal{O}) nach Satz 1.25 dann sogar normal ist.

Die allgemeinen Metrisationssätze von Bing, Nagata und Smirnov geben ein genaues topologisches Äquivalent zur Metrisierbarkeit, sind aber leider nicht ganz so einfach zu formulieren, siehe [Que, Abschnitt 10.B].

Wir können eine Subbasis oder Basis aber auch dazu verwenden, eine Topologie zu definieren.

1.40. SATZ. *Sei X eine Menge, und seien $\mathcal{B}, \mathcal{S} \subset \mathcal{P}X$ beliebig.*

- (1) *Wenn für je endlich viele $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}$ mit $k \geq 0$ eine Untermenge $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ existiert, so dass $B_1 \cap \dots \cap B_k = \bigcup \mathcal{U}$, dann existiert eine eindeutige Topologie $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ auf X mit Basis \mathcal{B} . Wir nennen $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ die durch die Basis \mathcal{B} definierte Topologie.*
- (2) *Es existiert eine eindeutige Topologie $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ auf X mit Subbasis \mathcal{S} . Sei \mathcal{O}_X eine beliebige Topologie auf X mit $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}_X$, dann gilt $\mathcal{O}_{\mathcal{S}} \subset \mathcal{O}_X$. Wir nennen $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ die durch die Subbasis \mathcal{S} definierte Topologie.*

Insbesondere ist $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ die *kleinste* oder *größte* Topologie auf X , bezüglich der alle Mengen der Subbasis \mathcal{S} offen sind. In Übung 1.128 sehen wir, dass man Konvergenz von Folgen in X und Stetigkeit von Abbildungen nach X allein anhand der Elemente einer Subbasis überprüfen kann.

BEWEIS. Zu (1). Die Menge $\mathcal{O} = \{ \bigcup \mathcal{U} \mid \mathcal{U} \subset \mathcal{B} \}$ enthält $\emptyset = \bigcup \emptyset$ und erfüllt Axiom (3) in Definition 1.9. Nach Voraussetzung gilt $X = \bigcap \emptyset \subset \mathcal{O}$, somit ist auch Axiom (1) erfüllt. Um

Axiom (2) zu zeigen, seien $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k \subset \mathcal{B}$, dann folgt

$$\left(\bigcup \mathcal{U}_1\right) \cap \dots \cap \left(\bigcup \mathcal{U}_k\right) = \bigcup_{U_1 \in \mathcal{U}_1, \dots, U_k \in \mathcal{U}_k} U_1 \cap \dots \cap U_k.$$

Nach Voraussetzung gilt $U_1 \cap \dots \cap U_k \in \mathcal{O}$ für alle Terme auf der rechten Seite, und da Axiom (3) gilt, auch für deren Vereinigung. Also ist \mathcal{O} eine Topologie.

Man sieht leicht, dass jede Topologie \mathcal{O}' , die \mathcal{B} enthält, alle offenen Mengen aus \mathcal{O} enthalten muss, also folgt $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$. Wäre umgekehrt $U \in \mathcal{O}' \setminus \mathcal{O}$, dann ließe U sich nicht als Vereinigung von Elementen aus \mathcal{O} schreiben, \mathcal{B} wäre dann also keine Basis von \mathcal{O}' . Also ist $\mathcal{O}_{\mathcal{B}} = \mathcal{O}$ die einzige Topologie mit Basis \mathcal{B} .

Zu (2) setze

$$\mathcal{B} = \left\{ U_1 \cap \dots \cap U_k \mid k \geq 0, U_1, \dots, U_k \in \mathcal{S} \right\},$$

dann erfüllt \mathcal{B} die Voraussetzung von (1) und definiert eine Topologie $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ mit Subbasis \mathcal{S} . Wie unter (1) lässt sich zeigen, dass das die einzige Topologie auf X mit Subbasis \mathcal{S} ist; in der Tat enthält jede Topologie \mathcal{O}_X mit $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}_X$ bereits $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$. \square

1.e. Filter und Konvergenz

Wir kommen auf das Problem zurück, dass Satz 1.38 nur für Räume gilt, die das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllen. Als Alternative zum Versuch, eine Topologie mittels konvergenter Folgen zu beschreiben, betrachten wir jetzt die Konvergenz von Filtern. Wir benutzen diesen Begriff später auch, um den Satz von Tychonoff zu beweisen.

Um zu verstehen, warum sich eine Topologie nicht immer nur mit Hilfe von Folgen beschreiben lässt, konstruieren wir zunächst einen Raum, der das erste Abzählbarkeitsaxiom verletzt. Dazu betrachten wir die Ordnungstopologie auf einer wohlgeordneten Menge, die eine überabzählbare Ordinalzahl enthält.

1.41. BEMERKUNG. Es sei X eine Menge mit einer Ordnung \prec , das heißt, es gilt

- (1) *Totalität* und *Antisymmetrie*. Für $x, y \in X$ gilt genau eine der drei Aussagen $x \prec y$, $y \prec x$ oder $x = y$.
- (2) *Transitivität*. Für $x, y, z \in X$ implizieren $x \prec y$ und $y \prec z$, dass $x \prec z$.

Dann definieren wir die Ordnungstopologie „ \mathcal{O}_{\prec} “ als die Topologie mit der Subbasis

$$\mathcal{S}_{\prec} = \left\{ (-\infty, x) \mid x \in X \right\} \cup \left\{ (x, \infty) \mid x \in X \right\},$$

wobei $(-\infty, x) = \{ y \in X \mid y \prec x \}$ und $(x, \infty) = \{ y \in X \mid x \prec y \}$.

Dabei sind „ $\pm\infty$ “ hier zwei Symbole, keine Elemente von X . Endliche Durchschnitte solcher Mengen liegen entweder wieder in \mathcal{S} oder sind von der Form

$$(x, y) = \{ z \in X \mid x \prec z \text{ und } z \prec y \}.$$

Als Beispiel erhalten wir auf \mathbb{R} mit der üblichen Anordnung „ $<$ “ genau die Standardtopologie. Trotz der ähnlichen Bezeichnung ist das hier jedoch nicht die Topologie aus Übung 1.124.

Wir machen jetzt noch folgende Zusatzannahmen.

- (3) *Wohlordnung*. Jede nichtleere Teilmenge von X enthält ein kleinstes Element.
- (4) *Kleinste überabzählbare Ordinalzahl*. Es gibt ein Element $\omega_1 \in X$, so dass $(-\infty, \omega_1)$ überabzählbar ist, aber für alle $x \prec \omega_1$ die Teilmenge $(-\infty, x)$ abzählbar ist.

In $(\mathbb{R}, <)$ sind diese beiden Annahmen offensichtlich nicht erfüllt. In $(\mathbb{N}, <)$ gilt immerhin (3). In einer Vorlesung über Mengenlehre lernt man mehr über wohlgeordnete Mengen und Ordinalzahlen.

Der Abschluss der Menge $U = (-\infty, \omega_1)$ enthält das Element ω_1 . Denn sei ω_1 Element einer Basismenge B der Form (x, y) mit $x \in X \cup \{-\infty\}$ und $y \in X \cup \{\infty\}$, dann ist wegen (4) die Teilmenge $(x, \omega_1) = B \cap U$ überabzählbar, also insbesondere nicht leer.

Sei andererseits $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in U , die gegen einen Grenzwert $x \in X$ konvergiert. Wegen (3) gib es ein kleinstes Element $x' \in X \setminus ((-\infty, x) \cup \{x\})$, somit liegen fast alle Glieder der Folge in der Umgebung $(-\infty, x')$ von x , ohne Einschränkung gelte also $x_n \prec x'$ für alle $n \in \mathbb{N}$, das heißt $x_n \prec x$ oder $x_n = x$. Sei andererseits $y \prec x$, dann folgt $y \prec x_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt somit

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} (-\infty, x_n) = (-\infty, x).$$

Als Vereinigung einer abzählbaren Familie abzählbarer Mengen ist $(-\infty, x)$ selbst abzählbar, also $x \prec \omega_1$ wegen (4). Die Menge $U \subset X$ ist somit folgenabgeschlossen, aber nicht abgeschlossen.

Um im obigen Beispiel mit so etwas wie Folgen argumentieren zu können, könnten wir anstelle von Folgen also Familien mit beliebige großen „gerichteten“ Indexmengen betrachten. Das führt auf den Begriff eines „Netzes“, den wir hier aber nicht einführen wollen. Alternativ kann man auch Systeme aus immer kleineren Teilmengen eines Raumes X betrachten. Dahinter steht eine ähnliche Idee wie bei der Intervallschachtelung in der Analysis. Anschaulich wäre hierfür wohl der Begriff „Trichter“, es hat sich aber ein anderer Name durchgesetzt.

1.42. DEFINITION. Es sei X eine Menge. Ein *Filter* \mathcal{F} auf X ist eine Teilmenge $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}X$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\emptyset \notin \mathcal{F} \text{ und } X \in \mathcal{F}, \tag{1}$$

$$A \in \mathcal{F} \text{ und } B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}, \tag{2}$$

$$A \in \mathcal{F} \text{ und } A \subset B \subset X \implies B \in \mathcal{F}. \tag{3}$$

Ein Filter heißt *frei*, wenn $\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A = \emptyset$. Seien \mathcal{F}, \mathcal{G} Filter auf X mit $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, dann heißt \mathcal{G} *feiner* als \mathcal{F} .

1.43. BEISPIEL. Es folgen einige nicht ganz unwichtige Beispiele.

(1) Sei $A \subset X$ nicht leer, dann ist

$$\mathcal{F}_A = \{ B \subset X \mid A \subset B \}$$

ein Filter auf X . Er ist nie frei.

(2) Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann bilden die Umgebungen von x einen Filter \mathcal{U}_x , den *Umgebungsfilter* von x . Er ist ebenfalls nie frei.

(3) Es sei X eine unendliche Menge. Betrachte

$$\mathcal{F} = \{ A \subset X \mid X \setminus A \text{ ist endlich} \}.$$

Dann ist \mathcal{F} der sogenannte *koendliche* Filter auf X . Er ist immer frei, und möglicherweise das einfachste Beispiel eines freien Filters.

(4) Jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X induziert einen Filter

$$\mathcal{F}_{(x_n)_n} = \{ A \subset X \mid \text{es gibt } n_0 \in \mathbb{N}, \text{ so dass } x_n \in A \text{ für alle } n \geq n_0 \}.$$

Teilfolgen induzieren feinere Filter.

Wir wollen Grenz- und Häufungspunkte von Filtern so definieren, dass der Filter $\mathcal{F}_{(x_n)_n}$ aus Beispiel 1.43 (4) genau dann einen Grenz- oder Häufungspunkt hat, wenn das entsprechende für $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt. Dabei heißt ein Punkt $x \in X$ *Häufungspunkt* einer Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ in jeder Umgebung von x ein x_i liegt mit $i \geq n$. Insbesondere sind Grenzwerte von Teilfolgen immer Häufungspunkte.

1.44. DEFINITION. Es sei X ein topologischer Raum und \mathcal{F} ein Filter auf X .

- (1) Dann heißt $x \in X$ ein *Grenzwert* von \mathcal{F} , wenn \mathcal{F} den Umgebungsfilter \mathcal{U}_x von x enthält. Man sagt auch, dass \mathcal{F} gegen x konvergiert, kurz $\mathcal{F} \rightarrow x$.
- (2) Ein Punkt $x \in X$ heißt *Häufungspunkt* von \mathcal{F} , wenn $U \cap F \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathcal{U}_x$ und alle $F \in \mathcal{F}$ gilt.

In Übung 1.130 sehen wir, dass sich diese Definition für Filter, die von Folgen wie in Beispiel 1.43 (4) induziert werden, genau wie erwartet verhält. Wenn X das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, ist ein Punkt $x \in X$ genau dann Häufungspunkt einer Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn eine Teilfolge gegen x konvergiert. Bei Filtern gilt das analoge Resultat immer.

1.45. SATZ. *Ein Punkt x in einem topologischen Raum X ist genau dann Häufungspunkt eines Filters \mathcal{F} auf X , wenn es einen feineren Filter $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$ gibt, der gegen x konvergiert.*

BEWEIS. „ \implies “: Es sei $x \in X$ ein Häufungspunkt von \mathcal{F} . Dann enthält der feinere Filter

$$\mathcal{G} = \{ G \subset X \mid \text{es gibt } U \in \mathcal{U}_x \text{ und } F \in \mathcal{F} \text{ mit } U \cap F \subset G \}$$

den gesamten Umgebungsfilter \mathcal{U}_x , konvergiert also gegen x .

„ \impliedby “: Es sei $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$ ein feinerer Filter, der gegen x konvergiert. Für $U \in \mathcal{U}_x$ und $F \in \mathcal{F}$ folgt $U, F \in \mathcal{G}$, also auch $U \cap F \in \mathcal{G}$, und somit $U \cap F \neq \emptyset$. \square

Als nächstes wollen wir Abbildungen $F: X \rightarrow Y$ auf Filter anwenden. Im Falle einer Folge in X reicht es, F auf jedes Folgenglied einzeln anzuwenden, um eine Folge in Y zu erhalten. Im Falle von Filtern überlegen wir uns, dass F durch das zweifache Bilden von Urbildern die folgenden Abbildungen induziert:

$$F^{-1}: \mathcal{P}Y \rightarrow \mathcal{P}X \quad \text{und} \quad (F^{-1})^{-1}: \mathcal{P}\mathcal{P}X \rightarrow \mathcal{P}\mathcal{P}Y .$$

Das führt auf die folgende Definition.

1.46. DEFINITION. Es sei $F: X \rightarrow Y$ eine Abbildung von Mengen und \mathcal{F} ein Filter auf X . Dann definieren wir den *Bildfilter* $F\mathcal{F}$ auf Y durch

$$F\mathcal{F} = \{ V \subset Y \mid F^{-1}(V) \in \mathcal{F} \} .$$

1.47. BEMERKUNG. In den Übungen überprüfen wir die folgenden Aussagen.

- (1) Es sei $F: X \rightarrow Y$ eine Abbildung von Mengen und \mathcal{F} ein Filter auf F . Dann gilt

$$F\mathcal{F} = \{ V \subset Y \mid \text{es gibt } U \in \mathcal{F} \text{ mit } F(U) \subset V \} \subset \mathcal{P}Y .$$

- (2) Wir betrachten eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als Abbildung $x_\bullet: \mathbb{N} \rightarrow X$. Dann ist der von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ induzierte Filter $\mathcal{F}_{(x_n)_n}$ aus Beispiel 1.43 (4) gerade das Bild des koendlichen Filters auf \mathbb{N} aus Beispiel 1.43 (3) unter der Abbildung x_\bullet .
- (3) Die Bildfolge $(F(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ in Y induziert genau den Bildfilter $F\mathcal{F}_{(x_n)_n}$ auf Y .

Die letzte Bemerkung könnte uns verleiten, anstelle von „Folgenstetigkeit“ den Begriff „Filterstetigkeit“ einzuführen. Der folgende Satz zeigt, dass wir diesen Begriff bereits kennen.

1.48. SATZ. *Es sei $F: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen und $x \in X$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

- (1) Die Abbildung F ist am Punkt x stetig.
- (2) Für jeden \mathcal{F} Filter auf X mit $\mathcal{F} \rightarrow x$ gilt $F\mathcal{F} \rightarrow F(x)$.
- (3) Das Bild des Umgebungsfilters \mathcal{U}_x konvergiert gegen $F(x)$.

Selbstverständlich bleiben die Aussagen äquivalent, wenn wir vor jede noch „Für alle $x \in X$ “ dazuschreiben. Wir sehen also, dass Filterstetigkeit (im Gegensatz zur Folgenstetigkeit) äquivalent zu Stetigkeit ist. Außerdem sehen wir, dass der Umgebungsfilter \mathcal{U}_x ausreicht, um Stetigkeit bei x zu testen. Wenn wir Folgenstetigkeit bei x prüfen wollen, reicht eine einzelne Folge dazu in der Regel nicht aus.

BEWEIS. „(1) \Rightarrow (2)“: Es sei F stetig bei x und \mathcal{F} ein Filter auf X , der gegen x konvergiert. Nach Definition 1.44 (1) ist $\mathcal{U}_{F(x)} \subset F\mathcal{F}$ zu zeigen. Sei also $V \in \mathcal{U}_{F(x)}$, das heißt, $V \in Y$ ist eine Umgebung von $F(x)$. Da F stetig bei x ist, ist $F^{-1}(V)$ Umgebung von x , also $F^{-1}(V) \in \mathcal{U}_x \subset \mathcal{F}$, da \mathcal{F} gegen x konvergiert. Nach Definition 1.46 folgt $V \in F\mathcal{F}$, was zu zeigen war.

Die Richtung „(2) \Rightarrow (3)“ gilt, da \mathcal{U}_x nach Definition 1.44 (1) gegen x konvergiert.

Zu „(3) \Rightarrow (1)“ sei $V \subset Y$ eine Umgebung von $F(x)$. Zu zeigen ist, dass $F^{-1}(V)$ Umgebung von x ist. Nach Annahme gilt $V \in F\mathcal{U}_x$, also $F^{-1}(V) \in \mathcal{U}_x$ nach Definition 1.46. Aber dann ist $F^{-1}(V)$ eine Umgebung von x , was zu zeigen war. \square

Tatsächlich bestanden alle Beweise in diesem Abschnitt allein daraus, Definitionen korrekt aufzuschlüsseln. So gesehen sind Filter zunächst einmal nur eine (zugegeben nicht offensichtliche) Verallgemeinerung von Folgen, mit denen sich viele grundlegende Konzepte der Topologie äquivalent umformulieren lassen. Die wirkliche Stärke dieses Konzeptes lernen wir erst in Abschnitt 1.h kennen, wenn wir den Satz von Tychonoff beweisen.

1.f. Unterräume und Produkte

In diesem Abschnitt betrachten wir zum einen die Unterraum- oder Relativtopologie, die aus Analysis II möglicherweise schon bekannt ist. Zum anderen betrachten wir beliebige (also auch unendliche) Produkte topologischer Räume. Die Definition der Topologie auf dem Produktraum ist dabei vielleicht etwas unerwartet — es gibt andere Definitionen, die auf den ersten Blick genauso gut aussehen. Wir begründen die Definition unten zum einen damit, dass die Produkttopologie einige sehr schöne Eigenschaften hat. Zum anderen ist sie eine Verallgemeinerung der „Topologie der punktwisen Konvergenz“. Und schließlich ist es genau diese Topologie, mit der wir später den Satz von Tychonoff formulieren und beweisen können.

Außerdem lernen wir in diesem Abschnitt „universelle“ und „charakteristische“ Eigenschaften kennen. Eine charakteristische Eigenschaft beschreibt eine bestimmte Topologie auf einer gegebenen Menge eindeutig, und zwar nur dadurch, dass wir angeben, welche Abbildungen von Mengen stetig sein sollen. Eine universelle Eigenschaft beschreibt völlig analog ein Objekt in einer beliebigen Kategorie (hier \mathcal{Top} , siehe Beispiel 1.20 (4)), und zwar bis auf eindeutige Isomorphismen.

1.49. DEFINITION. Sei (X, \mathcal{O}_X) ein topologischer Raum, und sei $Y \subset X$. Die *Unterraumtopologie* (auch *Relativ-* oder *Spurtopologie*) \mathcal{O}_Y ist definiert durch

$$\mathcal{O}_Y = \{ Y \cap U \mid U \in \mathcal{O}_X \}.$$

Man überlegt sich, dass \mathcal{O}_Y eine Topologie ist, denn

$$\emptyset = Y \cap \emptyset \in \mathcal{O}_Y, \quad Y = Y \cap X \in \mathcal{O}_Y,$$

$$(Y \cap U_1) \cap \cdots \cap (Y \cap U_k) = Y \cap (U_1 \cap \cdots \cap U_k) \in \mathcal{O}_Y \quad \text{und} \quad \bigcup_{U \in \mathcal{U}} (Y \cap U) = Y \cap \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$$

für alle $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{O}_X$ und $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_X$.

1.50. SATZ. Sei (X, \mathcal{O}_X) ein topologischer Raum und sei $Y \subset X$ versehen mit der Unterraumtopologie \mathcal{O}_Y . Dann gilt:

- (1) \mathcal{O}_Y ist die größte Topologie auf Y , für die die Inklusion $\iota: Y \hookrightarrow X$ stetig ist.

(2) \mathcal{O}_Y ist die einzige Topologie, für die eine Abbildung F von einem beliebigen topologischen Raum (Z, \mathcal{O}_Z) nach Y genau dann stetig ist, wenn die Abbildung $\iota \circ F: Z \rightarrow X$ stetig ist.

BEWEIS. Da $\iota^{-1}(U) = U \cap Y$ gilt, folgt (1) bereits aus der Definition von \mathcal{O}_Y .

Zu (2) sei zunächst (Z, \mathcal{O}_Z) ein beliebiger topologischer Raum, und sei $F: Z \rightarrow Y$ eine Abbildung. Für eine offene Menge $V = U \cap Y \in \mathcal{O}_Y$ gilt

$$F^{-1}(V) = F^{-1}(\iota^{-1}(U)) = (\iota \circ F)^{-1}(U),$$

also ist F genau dann stetig bezüglich \mathcal{O}_Y , wenn $\iota \circ F$ stetig ist bezüglich \mathcal{O}_X .

Um zu zeigen, dass \mathcal{O}_Y die einzige Topologie mit dieser Eigenschaft ist, wählen wir eine beliebige Topologie \mathcal{O} auf Y , die die in (2) geforderte Eigenschaft besitzt. Da $\text{id}: (Y, \mathcal{O}) \rightarrow (Y, \mathcal{O})$ stetig ist, ist dann auch $\iota = \iota \circ \text{id}: (Y, \mathcal{O}) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ stetig. Aber da \mathcal{O}_Y diese Eigenschaft auch hat, ist somit auch $\text{id}_Y: (Y, \mathcal{O}) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ stetig. Die folgenden Diagramme erklären die beiden Beweisschritte.

$$\begin{array}{ccc} (Y, \mathcal{O}) & & (Y, \mathcal{O}) \xrightarrow{\text{id}_Y} (Y, \mathcal{O}_Y) \\ \text{id}_Y \downarrow & \searrow \iota & \searrow \iota \quad \downarrow \iota \\ (Y, \mathcal{O}) & \xrightarrow{\iota} & (X, \mathcal{O}_X) \end{array}$$

Mit vertauschten Rollen folgt analog die Stetigkeit von $\text{id}_Y: (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (Y, \mathcal{O})$, und \mathcal{O} ist sowohl gröber als auch feiner als \mathcal{O}_Y nach Bemerkung 1.23. Also stimmen \mathcal{O} und \mathcal{O}_Y überein. \square

Aus dem Beweis ergibt sich, dass die charakteristische Eigenschaft (2) ausreicht, um die Unterraumtopologie eindeutig festzulegen. Ihre Existenz mussten wir aber „von Hand“ zeigen.

Wir können jetzt die fehlenden Details im Satz 1.32 von Tietze nachtragen. Die Aussage „ $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig“ bezieht sich auf die Unterraumtopologie auf $A \subset X$. Und im Beweis betrachten wir abgeschlossene Teilmengen $B_n, C_n \subset A$ von A . Das heißt, es gibt eine abgeschlossene Teilmengen $E_n, F_n \subset X$ mit $B_n = A \cap E_n$ und $C_n = A \cap F_n$. Da A in X abgeschlossen ist, sind folglich B_n und C_n auch in X abgeschlossen, und wir dürfen das Lemma von Urysohn auf X anwenden.

1.51. DEFINITION. Seien (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume. Eine *Einbettung* von X nach Y ist eine injektive Abbildung $F: X \hookrightarrow Y$, so dass die induzierte Abbildung von (X, \mathcal{O}_X) nach $F(X) \subset Y$ mit der Unterraumtopologie ein Homöomorphismus ist.

Wir betrachten jetzt die Produkttopologie. Dazu bezeichnen wir mit

$$\prod_i X_i = \{ (x_i)_{i \in I} \mid x_i \in X_i \}$$

das kartesische Produkt einer Familie $(X_i)_{i \in I}$ von Mengen über einer beliebigen Indexmenge I , und mit $\pi_j: X \rightarrow X_j$ die Projektion auf die j -te Komponente, so dass $\pi_j((x_i)_{i \in I}) = x_j$.

1.52. DEFINITION. Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Das *topologische Produkt* der X_i ist definiert als

$$\prod_i (X_i, \mathcal{O}_i) = \left(\prod_i X_i, \mathcal{O}_\square \right),$$

wobei \mathcal{O}_\square erzeugt wird von der Subbasis

$$\mathcal{S}_\square = \{ \pi_i^{-1}(U_i) \mid i \in I \text{ und } U_i \in \mathcal{O}_i \}.$$

Da wir \mathcal{O}_\square mit Hilfe einer Subbasis erklärt haben, wissen wir aus Satz 1.40, dass \mathcal{O}_\square eine Topologie ist. Ein endlicher Durchschnitt von Mengen aus \mathcal{S}_\square hat die Gestalt

$$\prod_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I} \pi_i^{-1}(U_i) \quad \text{mit } U_i \in \mathcal{O}_i \text{ für alle } i \in I \text{ und } U_i = X_i \text{ für fast alle } i \in I.$$

Mit anderen Worten: eine Teilmenge $U \subset \prod_i X_i$ ist genau dann offen, wenn jeder Punkt x eine Umgebung der obigen Form hat.

1.53. SATZ. Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume.

- (1) Die Topologie \mathcal{O}_\square ist die grösste Topologie auf $\prod_i X_i$, für die alle Abbildungen $\pi_i: \prod_i X_i \rightarrow X_i$ stetig sind.
- (2) Die Topologie \mathcal{O}_\square ist die einzige Topologie \mathcal{O} auf dem kartesischen Produkt $\prod_i X_i$, so dass eine Abbildung G von einem beliebigen topologischen Raum (Z, \mathcal{O}_Z) in das Produkt $\prod_i X_i$ genau dann stetig ist, wenn die Abbildungen $\pi_i \circ G$ für alle $i \in I$ stetig sind.
- (3) Der Raum $(\prod_i X_i, \mathcal{O}_\square)$ zusammen mit den Abbildungen $(\pi_i: \prod_i X_i \rightarrow X_i)_{i \in I}$ ist ein Produkt in der Kategorie \mathbf{Top} , das heißt, zu jedem topologischen Raum (Z, \mathcal{O}_Z) und jeder Familie stetiger Abbildungen $(G_i: Z \rightarrow X_i)_{i \in I}$ existiert genau eine stetige Abbildung $G: Z \rightarrow Y$, so dass $G_i = \pi_i \circ G$ für alle $i \in I$.

1.54. BEMERKUNG. Die charakterisierende Eigenschaft (2) des Produkts wird durch das linke Diagramm veranschaulicht. In der rechten unteren Ecke steht eigentlich für jedes $i \in I$ ein separater Eintrag, mit separaten Abbildungen von den beiden anderen Objekten im Diagramm.

$$\begin{array}{ccc}
 & (\prod_i X_i, \mathcal{O}) & \\
 \nearrow G & \downarrow \pi_i & \\
 (Z, \mathcal{O}_Z) & \xrightarrow{\pi_i \circ G} & (X_i, \mathcal{O}_i)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & (Y, \mathcal{O}_Y) & \\
 \dashrightarrow G & \downarrow \eta_i & \\
 (Z, \mathcal{O}_Z) & \xrightarrow{G_i} & (X_i, \mathcal{O}_i)
 \end{array}
 \tag{1.1}$$

Im Gegensatz dazu zeigt das rechte Diagramm die universelle Eigenschaft (3). Ein Raum (Y, \mathcal{O}_Y) mit stetigen Abbildungen $\eta_i: Y \rightarrow X_i$ ist genau dann ein Produkt im Sinne von Satz 1.53 (3), wenn für alle (Z, \mathcal{O}_Z) mit stetigen Abbildungen $G_i: Z \rightarrow X_i$ genau eine stetige Abbildung G wie im rechten Diagramm existiert.

Ein typisches Beispiel dafür ist $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$. Aus Analysis II wissen Sie, dass eine Abbildung f in den \mathbb{R}^n genau dann stetig (oder beispielsweise auch differenzierbar) ist, wenn die Komponentenfunktionen f_1, \dots, f_n alle stetig (beziehungsweise differenzierbar) sind.

Das Produkt ist durch (3) bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt. Wenn also ein anderer Raum (Y, \mathcal{O}_Y) mit Abbildungen $(\eta_i: Y \rightarrow X_i)_i$ die Produkteigenschaft erfüllt, dann gibt es genau einen Homöomorphismus $G: Y \rightarrow \prod_i X_i$ mit $\eta_i = \pi_i \circ G$ für alle i . Dazu betrachten wir die folgenden vier Diagramme.

$$\begin{array}{ccc}
 & (\prod_i X_i, \mathcal{O}) & \\
 \dashrightarrow G & \downarrow \pi_i & \\
 (Y, \mathcal{O}_Y) & \xrightarrow{\eta_i} & (X_i, \mathcal{O}_i)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & (Y, \mathcal{O}_Y) & \\
 \dashrightarrow H & \downarrow \eta_i & \\
 (\prod_i X_i, \mathcal{O}) & \xrightarrow{\pi_i} & (X_i, \mathcal{O}_i)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & (\prod_i X_i, \mathcal{O}) & \\
 \dashrightarrow H \circ G & \downarrow \pi_i & \\
 (\prod_i X_i, \mathcal{O}) & \xrightarrow{\text{id}} & (X_i, \mathcal{O}_i)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & (Y, \mathcal{O}_Y) & \\
 \dashrightarrow G \circ H & \downarrow \eta_i & \\
 (Y, \mathcal{O}_Y) & \xrightarrow{\eta_i} & (X_i, \mathcal{O}_i)
 \end{array}$$

Die ersten beiden Diagramme zeigen die Existenz eindeutiger Abbildungen G und H , die letzten zwei Diagramme zeigen, dass H zu G invers ist, so dass G in der Tat ein Homöomorphismus ist. Da dieser Homöomorphismus stets eindeutig ist, kann man mit seiner Hilfe je zwei verschiedene Modelle für das Produkt miteinander identifizieren.

Man beachte, dass (geeignet formulierte) universelle Eigenschaften wie in Satz 1.53 (3) zwar die Eindeutigkeit der beschriebenen Objekte (bis auf eindeutige Isomorphismen) garantieren können, aber nicht die Existenz. Analog kann man in vielen Kategorien (wie Set , Top oder $\mathit{Vec}_{\mathbb{k}}$) Produkte definieren, muss deren Existenz aber jedesmal beweisen.

BEWEIS von Satz 1.53. Die Subbasis \mathcal{S}_{\square} enthält genau die Urbilder der offenen Teilmengen von X_i unter den Abbildungen π_i . Also sind alle π_i bezüglich einer Topologie \mathcal{O} auf $\prod_{i \in I} X_i$ genau dann stetig, wenn $\mathcal{O}_{\square} \subset \mathcal{O}$, und es folgt Behauptung (1).

Zu (2) sei G stetig. Dann sind auch die Abbildungen $\pi_i \circ G$ stetig nach (1).

Seien umgekehrt alle Abbildungen $\pi_i \circ G$ stetig. Nach Übung 1.128 folgt Stetigkeit von G bereits, wenn $G^{-1}(U) \in \mathcal{O}_Z$ nur für alle $U \in \mathcal{S}_{\square}$ gilt. Aber

$$G^{-1}(\pi_i^{-1}(U_i)) = (\pi_i \circ G)^{-1}U_i \in \mathcal{O}_Z$$

wegen Stetigkeit der Abbildungen $\pi_i \circ G$. Der Beweis der Eindeutigkeit ist analog zum Beweis des Satzes 1.50 (2).

Behauptung (3) folgt aus der entsprechenden Eigenschaft des kartesischen Produkts von Mengen und Behauptung (2). \square

1.55. BEMERKUNG. Die universelle Eigenschaft sagt, wann eine Abbildung in ein Produkt stetig ist. Sie sagt nichts über Abbildungen von einem Produkt in einen anderen Raum. Dazu erinnern wir uns an ein Beispiel aus der Analysis II. Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{falls } (x, y) \neq 0, \text{ und} \\ 0 & \text{falls } x = y = 0. \end{cases}$$

Dann sind zwar $f(\cdot, y): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $f(x, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für alle y beziehungsweise $x \in \mathbb{R}$ stetig, aber f nimmt in jeder Umgebung von 0 alle Werte zwischen -1 und 1 an, kann also bei 0 nicht stetig sein.

1.56. BEMERKUNG. Eine andere natürliche Topologie auf $\prod_i X_i$ ist die *Box-Topologie* \mathcal{O}_{\square} mit Basis

$$\mathcal{B}_{\square} = \left\{ \prod_{i \in I} U_i \mid U_i \in \mathcal{O}_i \text{ für alle } i \in I \right\}.$$

Wenn die Indexmenge I unendlich ist und unendlich viele X_i nicht die Klumpentopologie tragen, ist \mathcal{O}_{\square} echt feiner als \mathcal{O}_{\square} . Diese Topologie hat leider nicht so schöne Eigenschaften wie \mathcal{O}_{\square} , obwohl sie auf den ersten Blick einfacher aussieht. In Übung 1.140 fassen wir die Produkttopologie in dem Spezialfall, dass $X_i = X$ für alle $i \in I$, als *Topologie der punktweisen Konvergenz* von Folgen in $\text{Abb}(I, X)$ auf. Wenn die Menge I unendlich ist, erhalten wir für die Boxtopologie einen sehr viel restriktiveren Konvergenzbegriff.

Wir sagen, dass eine topologische Eigenschaft E (wie etwa eine Trennungs- oder Abzählbarkeitseigenschaft) unter einer Konstruktion (wie etwa dem Produkt oder der Unterraumkonstruktion) *vererbt* wird, wenn immer dann, wenn alle zugrundeliegenden Topologien die Eigenschaft E haben, auch die neu konstruierte Topologie diese Eigenschaft hat.

- 1.57. SATZ. (1) *Es werden (T0) – (T3), (T3a), (A1) und (A2) auf Unterräume vererbt.*
 (2) *Es werden (T0) – (T3), (T3a) unter Produkten vererbt. Die Abzählbarkeitseigenschaften (A1) und (A2) werden vererbt, wenn die Indexmenge höchstens abzählbar ist.*

BEWEIS. Zu (1) betrachten wir nur (T3) und (T3a), die anderen Trennungsaxiome lassen sich analog beweisen. Sei also $A \subset Y$ abgeschlossen in der Unterraumtopologie auf $Y \subset X$. Dann lässt sich $Y \setminus A$ zu einer offenen Teilmenge von X fortsetzen, deren Komplement B in X abgeschlossen ist mit $A = Y \cap B$. Sei $y \in Y \setminus A \subset X \setminus B$. Wir nehmen an, dass (T3) in X gilt und finden disjunkte

offene Mengen $U, V \subset X$ mit $y \in U, B \subset V$. Dann sind $Y \cap U$ und $Y \cap V$ in Y offen und disjunkt und trennen y und A . Zu (T3a) betrachte A, B und y wie oben. Wenn es eine Funktion $f: X \rightarrow [0, 1]$ mit $B \subset f^{-1}(0)$ und $f(y) = 1$ gibt, dann ist $f|_Y$ stetig nach Satz 1.50 (2) und trennt y und A in Y .

Sei \mathcal{U}_x abzählbare Umgebungsbasis von $x \in Y \subset X$ in X , dann ist

$$\{Y \cap U \mid U \in \mathcal{U}_x\} \subset \mathcal{P}(Y)$$

eine abzählbare Umgebungsbasis von x in Y . Genauso überträgt sich (A2) von X auf den Unterraum Y .

Zu (2) betrachten wir wieder nur (T3) und (T3a), die anderen Trennungsaxiome funktionieren analog. Ein Raum (Y, \mathcal{O}_y) erfüllt (T3) genau dann, wenn es zu jeder Umgebung U von $y \in Y$ eine abgeschlossene Umgebung A mit $y \in A \subset U$ gibt. Denn wenn (T3) gilt und U Umgebung von y ist, dann ist auch das Innere $\overset{\circ}{U}$ Umgebung von y . Wir trennen $B = Y \setminus \overset{\circ}{U}$ von y durch disjunkte offene Mengen $V, W \subset X$. Dann ist $Y \setminus V$ abgeschlossene Umgebung, da $y \in W \subset Y \setminus V$, und es gilt $Y \setminus V \subset \overset{\circ}{U} = Y \setminus B \subset U$. Die Umkehrung gilt analog.

Sei also $x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ und sei U Umgebung von x . Nach Definition 1.52 und der Konstruktion im Beweis von Satz 1.40 (2) existieren $U_{i_1} \in \mathcal{O}_{i_1}, \dots, U_{i_k} \in \mathcal{O}_{i_k}$ mit

$$x \in \pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap \pi_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) \subset U \quad (*)$$

Nach unserer obigen Überlegung existieren abgeschlossene Umgebungen $A_{ij} \subset U_{ij}$ von x_{ij} , und

$$\pi_{i_1}^{-1}(A_{ij}) \cap \dots \cap \pi_{i_k}^{-1}(A_{i_k}) \subset U$$

ist eine abgeschlossene Umgebung von x in $\prod_{i \in I} X_i$. Also gilt (T3).

Zu (T3a) sei $x \in \prod_{i \in I} X_i$ wie oben und $B \subset \prod_{i \in I} X_i$ abgeschlossen. Setze $U = \prod_{i \in I} X_i \setminus B$. Dann existieren U_{i_1}, \dots, U_{i_k} wie in (*). Also gibt es Funktionen

$$f_{i_j}: X_{i_j} \rightarrow [0, 1] \quad \text{mit} \quad f_{i_j}|_{X_{i_j} \setminus U_{i_j}} = 0 \quad \text{und} \quad f_{i_j}(x_{i_j}) = 1.$$

Dann sind die $f_{i_j} \circ \pi_{i_j}$ nach Satz 1.53 (2) stetig, und

$$f = \min(f_{i_1} \circ \pi_{i_1}, \dots, f_{i_k} \circ \pi_{i_k}): \prod_{i \in I} X_i \rightarrow [0, 1]$$

ist als Minimum endlich vieler stetiger Funktionen wieder stetig mit $f(x) = 1$ und

$$B \subset X \setminus (\pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap \pi_{i_k}^{-1}(U_{i_k})) \subset f^{-1}(0).$$

Sei schließlich I höchstens abzählbar und \mathcal{B}_i eine abzählbare Basis von \mathcal{O}_i . Dann erhalten wir eine abzählbare Subbasis

$$\mathcal{S} = \bigcup_{i \in I} \pi_i^{-1} \mathcal{B}_i$$

von \mathcal{O}_\square , denn jedes Element $\pi_i^{-1}(U)$ von \mathcal{S}_\square lässt sich als Vereinigung von Elementen aus \mathcal{S} schreiben. Dann ist aber auch die Basis

$$\mathcal{B} = \{U_1 \cap \dots \cap U_k \mid k \in \mathbb{N}_0 \text{ und } U_1, \dots, U_k \in \mathcal{S}\}$$

von \mathcal{O}_\square abzählbar. Also wird (A2) und analog auch (A1) unter abzählbaren Produkten vererbt. \square

Normalität wird unter Produkten und Unterräumen nicht vererbt, also auch nicht (T4). Die Gegenbeispiele können keine metrischen Räume sein, da sich Metriken auf Unterräume und endliche, ja sogar abzählbare Produkte übertragen lassen (Übungen 1.133, 1.135, 1.139), womit diese nach Satz 1.25 wieder normal sind. Dann dürfen unsere Räume auch (A2) nicht erfüllen, da sie sonst nach Bemerkung 1.39 metrisierbar wären. Wir besprechen diese Gegenbeispiele daher nicht hier, sondern verweisen auf [Que], [SS] und Übung 1.148 (5).

1.g. Kompaktheit

Wir erinnern uns, dass abgeschlossene Intervalle $I \subset \mathbb{R}$ viele schöne Eigenschaften haben: stetige Funktionen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ besitzen auf I ein Maximum und ein Minimum, und jede Folge $(x_i)_i$ in I hat mindestens einen Häufungspunkt. Der Grund dafür ist der Satz von Heine-Borel, nach dem abgeschlossene Intervalle kompakt sind.

Wir lernen drei mögliche Definitionen von Kompaktheit kennen. Eine *offene Überdeckung* eines topologischen Raumes (X, \mathcal{O}) ist eine Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ mit $\bigcup \mathcal{U} = X$.

1.58. DEFINITION. Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum. Dann heißt X

- (1) *quasikompakt*, wenn es zu jeder offenen Überdeckung \mathcal{U} eine endliche Teilüberdeckung gibt, das heißt, eine Menge $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ mit $\bigcup \mathcal{U}_0 = X$,
- (2) *kompakt*, wenn er Hausdorffsch und quasikompakt ist,
- (3) *abzählbar kompakt*, wenn X Hausdorffsch ist und es zu jeder abzählbaren offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine endliche Teilüberdeckung gibt, das heißt, $X = \bigcup_{i=0}^N U_i$ für ein $N \in \mathbb{N}$, und
- (4) *folgenkompakt*, wenn X Hausdorffsch ist und jede Folge $x_i \in X$ eine konvergente Teilfolge besitzt.

In der Literatur wird teilweise die Hausdorff-Eigenschaft in (2)–(4) nicht verlangt.

1.59. BEMERKUNG. Es folgen einige wohlbekannte Eigenschaften kompakter Mengen.

- (1) Abgeschlossene Unterräume eines (abzählbar / folgen-) kompakten Raumes sind wieder (abzählbar / folgen-) kompakt. Denn sei etwa X kompakt, $A \subset X$ abgeschlossen und \mathcal{V} eine offene Überdeckung von A , dann existiert $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_X$ mit

$$\mathcal{V} = \{ U \cap A \mid U \in \mathcal{U} \}.$$

Dann ist aber $\mathcal{U} \cup \{X \setminus A\}$ offene Überdeckung von X , und eine endliche Teilüberdeckung \mathcal{U}' liefert uns auch eine endliche Teilüberdeckung von A , nämlich

$$\{ U \cap A \mid U \in \mathcal{U}' \}.$$

- (2) Es sei (X, \mathcal{O}_X) (abzählbar / folgen-) kompakt, (Y, \mathcal{O}_Y) ein Hausdorff-Raum und $F: X \rightarrow Y$ stetig, dann ist das Bild im $F \subset Y$, versehen mit der Unterraumtopologie, wieder (abzählbar / folgen-) kompakt (Übung 1.141).
- (3) Sei (X, \mathcal{O}) (abzählbar / folgen-) kompakt, und sei $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann ist f beschränkt und nimmt sein Maximum an. Dazu kombinieren wir (2) mit den Sätzen 1.61 und 1.62 unten.
- (4) Jeder kompakte Raum ist normal (Übung 1.142).
- (5) Sei (X, \mathcal{O}_X) ein Hausdorff-Raum, und sei $Y \subset (X, \mathcal{O}_X)$ kompakt in der Unterraumtopologie, dann ist $Y \subset X$ abgeschlossen.

1.60. SATZ. Sei (X, \mathcal{O}) ein Hausdorff-Raum.

- (1) Wenn X kompakt oder folgenkompakt ist, ist X auch abzählbar kompakt.
- (2) Es ist X genau dann abzählbar kompakt, wenn jede Folge in X einen Häufungspunkt besitzt.
- (3) Wenn X abzählbar kompakt ist und (A1) erfüllt, ist X folgenkompakt.
- (4) Wenn X abzählbar kompakt ist und (A2) erfüllt, dann ist X kompakt.

Die Punkte (2) und (3) zeigen wieder einmal, dass man mit Folgen vorsichtig umgehen muss, wenn das erste Abzählbarkeitsaxiom verletzt ist. Wir fassen den obigen Satz in einem Diagramm zusammen.

$$\text{kompakt} \begin{array}{c} \xleftarrow{(A2)} \\ \xrightarrow{\hspace{1cm}} \end{array} \text{abzählbar kompakt} \begin{array}{c} \xrightarrow{(A1)} \\ \xleftarrow{\hspace{1cm}} \end{array} \text{folgenkompakt}$$

Wir betrachten im Folgenden vor allem kompakte Räume. In der Analysis ist hingegen der Begriff der Folgenkompaktheit wichtiger.

BEWEIS VON SATZ 1.60. In (1) ist nur zu zeigen, dass jeder folgenkompakte Raum auch abzählbar kompakt ist, die andere Aussage ist klar. Sei also $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare offene Überdeckung. Wir nehmen an, dass es keine endliche Teilüberdeckung gibt. Wir dürfen außerdem annehmen, dass

$$U_i \not\subset \bigcup_{j=0}^{i-1} U_j$$

für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt, andernfalls lassen wir U_i weg und gehen zu einer kleineren Teilüberdeckung über. Wir wählen also eine Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit

$$x_i \in U_i \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} U_j.$$

Sei $x \in X$ ein Häufungspunkt (z.B. der Grenzwert einer konvergenten Teilfolge), dann gilt $x \in U_{i_0}$ für ein $i_0 \in \mathbb{N}$, also liegen unendlich viele Folgenglieder in U_{i_0} , im Widerspruch zur Konstruktion.

Zu (2) zeigen wir, dass jede Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in einem abzählbar kompakten Raum X einen Häufungspunkt besitzt, die Rückrichtung folgt wie in (1). Sei $A_n = \{x_i \mid i \geq n\} \neq \emptyset$, dann ist $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ die Menge aller Häufungspunkte. Wenn wir annehmen, dass $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ keinen Häufungspunkt besitzt, sei $U_n = X \setminus A_n$, dann ist $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare offene Überdeckung von X mit $U_m \subset U_n$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$. Es folgt, dass $X = \bigcup_{i=1}^n U_i = U_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, im Widerspruch zu $A_n \neq \emptyset$.

Zu (3) wähle nach (2) einen Häufungspunkt x der Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Wenn (A1) erfüllt ist, existiert eine abzählbare Umgebungsbasis $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von x , und wie im Beweis von Satz 1.38 dürfen wir annehmen, dass $V_j \subset V_i$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i < j$. Um eine Teilfolge mit Grenzwert x zu konstruieren, setzen wir $i_0 = 1$ und wählen induktiv $i_j > i_{j-1}$ für $j \geq 1$ so, dass $x_{i_j} \in V_j$. Aus $V_j \subset V_i$ für alle $i < j$ folgt $x_{i_k} \in V_j$ für alle $k \geq j$, also konvergiert $(x_{i_j})_{j \in \mathbb{N}}$ gegen x .

Für (4) nehmen wir an, dass $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ eine beliebige offene Überdeckung ist, und dass $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Basis von \mathcal{O} ist. Wenn wir eine abzählbare Teilüberdeckung von \mathcal{U} konstruieren können, folgt die Existenz einer endlichen Teilüberdeckung aus der Annahme, dass X abzählbar kompakt ist. Wir wählen jetzt zu jedem $i \in \mathbb{N}$ eine Menge $U_i \in \mathcal{U} \cup \{\emptyset\}$, so dass $V_i \subset U_i$, falls eine Menge $U \in \mathcal{U}$ mit $V_i \subset U$ existiert, und $U_i = \emptyset$ sonst. Da \mathcal{U} eine Überdeckung von X war, muss dann auch $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Überdeckung sein, denn jeder Punkt $x \in X$ ist in einem $U \in \mathcal{U}$ enthalten, und es existiert also ein i mit $x \in V_i \subset U$. Elimination aller Indizes i mit $U_i = \emptyset$ liefert eine höchstens abzählbare Teilüberdeckung von X , nach Voraussetzung existiert also auch eine endliche Teilüberdeckung. \square

Es folgen einige weitere Sätze aus der Analysis, die wir nicht noch einmal beweisen wollen.

1.61. SATZ. *Für einen metrischen Raum sind die Begriffe kompakt, abzählbar kompakt und folgenkompakt äquivalent.*

1.62. SATZ (Heine-Borel). *Eine Teilmenge des \mathbb{R}^n ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

1.63. SATZ (Lebesgue-Zahl). *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung von K . Dann existiert $\varepsilon > 0$, so dass für alle $x \in K$ ein $U \in \mathcal{U}$ mit $B_\varepsilon(x) \cap K \subset U$ existiert.*

Schließlich führen wir noch den Begriff der lokalen Kompaktheit ein.

1.64. DEFINITION. Ein topologischer Raum heißt *lokalkompakt*, wenn jeder Punkt in X eine kompakte Umgebung besitzt.

- 1.65. BEISPIEL. (1) Die Räume \mathbb{R} und \mathbb{R}^n sind lokalkompakt, \mathbb{Q} und \mathbb{Q}^n jedoch nicht.
 (2) Es sei K kompakt und $U \subset K$ offen, dann ist U lokalkompakt nach Übung 1.143.

Wir können in Beispiel 1.65 (2) den Spieß umdrehen und fragen, ob jeder lokalkompakte Hausdorff-Raum Unterraum eines kompakten Raumes ist.

1.66. DEFINITION. Es sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum. Unter einer *Kompaktifizierung* von X versteht man eine Einbettung von X in einen kompakten Raum K , so dass das Bild von X dicht liegt.

Die Dichtheit ist dabei keine wirkliche Einschränkung. Sei etwa $\iota: X \rightarrow K$ eine Einbettung von X in ein Kompaktum K . Dann ist der Abschluss $\overline{\text{im } \iota}$ des Bildes wieder kompakt, und $X \subset \text{im } \iota$ ist dicht.

In vielen Bereichen der Analysis und Geometrie interessiert man sich für Kompaktifizierungen. Oftmals stellt man dabei bestimmte Anforderungen an den Raum K , die sich aus dem jeweiligen Problem ergeben. Wir geben hier nur eine sehr einfache Kompaktifizierung an, in gewissem Sinne die einfachst mögliche. Den Gegenpol bildet die Stone-Čech-Kompaktifizierung, die wir in Abschnitt 1.8 kennenlernen, mehr dazu in Bemerkung 1.74.

1.67. SATZ (Alexandroff- oder Ein-Punkt-Kompaktifizierung). *Es sei (X, \mathcal{O}) ein lokalkompakter Hausdorff-Raum und $\infty \notin X$ ein zusätzlicher Punkt. Dann definiert*

$$\mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O} \cup \{ \{\infty\} \cup X \setminus K \mid K \subset X \text{ kompakt} \}$$

eine kompakte Topologie auf $X' = X \cup \{\infty\}$. Wenn X selbst nicht kompakt war, liegt X dicht in X' .

Die stereographische Projektion zeigt, dass S^n homöomorph zur Alexandroff-Kompaktifizierung von \mathbb{R}^n ist, siehe Übung 1.144.

BEWEIS. Die Axiome einer Topologie lassen sich leicht überprüfen. Sei jetzt \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X' , dann gibt es mindestens ein $U_0 \in \mathcal{U}$ mit $\infty \in U_0$. Dann ist $K = X' \setminus U_0 \subset X$ nach Konstruktion kompakt, und wir erhalten eine offene Überdeckung

$$\mathcal{U}' = \{ K \cap U \mid U \in \mathcal{U} \}$$

von K . Sei $K = (K \cap U_1) \cup \dots \cup (K \cap U_n)$ eine endliche Teilüberdeckung, dann folgt $X' = U_0 \cup \dots \cup U_n$. Also ist X' quasikompakt. Die Hausdorff-Eigenschaft ist ebenfalls leicht zu überprüfen.

Da X' nur einen Punkt mehr als X enthält, liegt X genau dann dicht in X' , wenn $X \subset X'$ nicht abgeschlossen ist. Da abgeschlossene Unterräume kompakter Räume wieder kompakt sind, trifft das genau dann zu, wenn X selbst nicht kompakt ist. \square

Man kann fragen, ob die Alexandroff-Kompaktifizierung *funktoriell* ist, das heißt, ob es zu jeder stetigen Abbildung $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Fortsetzung $f': X' \rightarrow Y'$ mit $f'|_X = f$ und $f(\infty_X) = \infty_{Y'}$ gibt, wobei $\infty_X, \infty_{Y'}$ die zusätzlichen Punkte bezeichne. Nach Konstruktion ist f' genau dann stetig bei ∞_X , wenn Urbilder kompakter Mengen kompakt sind.

1.68. DEFINITION. Eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen heißt *eigentlich*, wenn die Urbilder aller kompakten Teilmengen wieder kompakt sind.

1.h. Produkte kompakter Räume

In diesem Abschnitt beweisen wir den Satz von Tychonoff, wonach beliebige Produkte kompakter Räume wieder kompakt sind. Es handelt sich hier um einen der tieferen Sätze dieser Vorlesung, auch wenn der Beweis am Ende relativ kurz sein wird. Das liegt daran, dass wir einen Großteil der Schwierigkeit in den Begriff des Ultrafilters und die Charakterisierung kompakter Mengen verschieben. Wir brauchen hier das Auswahlaxiom in Gestalt des Lemmas von Zorn, um zu zeigen, dass jeder Filter zu einem Ultrafilter verfeinert werden kann. Man kann sogar zeigen, dass das Auswahlaxiom zum Satz von Tychonoff äquivalent ist.

Der Satz von Tychonoff wird an manchen Stellen in der Mathematik benutzt. In der Funktionalanalysis zeigt man mit seiner Hilfe den Satz von Banach-Alaoglu, wonach der Einheitsball in einem Banach-Raum „schwach*-kompakt“ ist. Da man aber häufig mit Folgen argumentiert, braucht man stattdessen oft das Resultat, das der Einheitsball in einem Banach-Raum „schwach*-folgenkompakt“ ist, und das ist deutlich leichter zu zeigen. Wir konstruieren als Anwendung des Satzes von Tychonoff hier die Stone-Čech-Kompaktifizierung eines vollständig regulären Raumes. Im Gegensatz zur Ein-Punkt-Kompaktifizierung besteht die Idee darin, so viele Punkte hinzuzufügen, dass sich jede stetige beschränkte Funktion auf die Kompaktifizierung fortsetzen lässt.

1.69. DEFINITION. Ein Filter \mathcal{F} auf einer Menge X heißt *Ultrafilter*, wenn es keinen echt feineren Filter auf X gibt.

1.70. SATZ. *Es sei X eine Menge.*

- (1) *Jeder Filter \mathcal{F} auf X lässt sich zu einem Ultrafilter verfeinern.*
- (2) *Ein Filter \mathcal{F} auf X ist genau dann ein Ultrafilter, wenn für jede Teilmenge $A \subset X$ entweder $A \in \mathcal{F}$ oder $X \setminus A \in \mathcal{F}$ gilt.*

BEWEIS. Zu (1) betrachten wir die Menge $\Phi \subset \mathcal{P}\mathcal{P}X$ aller Filter auf X , die feiner sind als \mathcal{F} . Sie wird durch die Relation „ \subset “ geordnet. Jede totalgeordnete Teilmenge $\Psi \subset \Phi$ besitzt eine obere Schranke

$$\bigcup \Psi = \bigcup_{\mathcal{G} \in \Psi} \mathcal{G} \subset \mathcal{P}X,$$

und $\bigcup \Psi$ ist wieder ein Filter. Nach dem Lemma von Zorn enthält Φ ein maximales Element, und das ist nach Definition ein Ultrafilter, der \mathcal{F} verfeinert.

Zu (2) betrachte $A \subset X$ und einen Filter \mathcal{F} . Wegen der Filteraxiome (1) und (2) kann es keine Elemente $B, C \in \mathcal{F}$ geben mit $B \subset A$ und $C \subset X \setminus A$, denn dann wäre $\emptyset = B \cap C \in \mathcal{F}$. Also gilt entweder $F \cap A \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F}$, oder $F \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F}$. Ohne Einschränkung gelte ersteres. Dann betrachten wir einen neuen Filter

$$\mathcal{G} = \{ G \subset X \mid \text{es gibt } F \in \mathcal{F} \text{ mit } A \cap F \subset G \},$$

der \mathcal{F} verfeinert und A enthält. Wenn \mathcal{F} ein Ultrafilter ist, folgt $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ und damit insbesondere $A \in \mathcal{F}$. □

Der entscheidende Schritt im Beweis des Satzes von Tychonoff ist die folgende Charakterisierung quasikompakter Räume.

1.71. PROPOSITION. *Es sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

- (1) *Der Raum X ist quasikompakt.*
- (2) *Es sei \mathcal{A} ein System abgeschlossener Teilmengen von X , so dass $\emptyset \neq A_1 \cap \dots \cap A_k$ für je endlich viele $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$. Dann folgt $\emptyset \neq \bigcap \mathcal{A}$.*
- (3) *Jeder Ultrafilter auf X hat einen Grenzwert.*

Wir könnten einen Raum X "filterkompakt" nennen, wenn jeder Filter auf X eine konvergente Verfeinerung besitzt. Zusammen mit Satz 1.70 (1) zeigt die obige Proposition, dass überdeckungs- (quasi-) kompakt das gleiche wie filter- (quasi-) kompakt bedeutet.

BEWEIS. „(1) \Leftrightarrow (2)“: Hierzu benutzen wir, dass die offenen Mengen $X \setminus A$ für $A \in \mathcal{A}$ genau dann eine Überdeckung von X bilden, wenn $\bigcap \mathcal{A} = \emptyset$ gilt. Entsprechendes gilt für eine endliche Auswahl dieser Mengen. Daher sind diese beiden Aussagen äquivalent.

„(2) \Rightarrow (3)“: Es sei \mathcal{F} ein Ultrafilter auf X . Wir betrachten

$$\mathcal{A} = \{ A \in \mathcal{F} \mid A \text{ abgeschlossen} \} \subset \mathcal{F} .$$

Da \mathcal{F} ein Filter ist, ist jeder endliche Durchschnitt von Elementen von \mathcal{A} nicht leer, nach (2) existiert also mindestens ein Punkt $x \in \bigcap \mathcal{A}$. Es folgt $\mathcal{F} \rightarrow x$, denn sei $U \in \mathcal{U}_x$ Umgebung von x , dann ist $A = X \setminus \overset{\circ}{U}$ abgeschlossen mit $x \notin A$, folglich $A \notin \mathcal{A}$, und somit $A \notin \mathcal{F}$. Da \mathcal{F} ein Ultrafilter ist, folgt $\overset{\circ}{U} \in \mathcal{F}$ nach Satz 1.70 (2), und da $\overset{\circ}{U} \subset U$ auch $U \in \mathcal{F}$, was zu zeigen war.

„(3) \Rightarrow (2)“: Es sei \mathcal{A} wie in (2) gegeben. Da endliche Durchschnitte von Elementen aus \mathcal{A} nie verschwinden, ist

$$\mathcal{G} = \{ U \subset X \mid \text{es gibt } A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A} \text{ mit } A_1 \cap \dots \cap A_k \subset U \} \subset \mathcal{P}X$$

ein Filter auf X . Nach Satz 1.70 (1) lässt sich \mathcal{G} zu einem Ultrafilter \mathcal{F} verfeinern, und nach Voraussetzung existiert $x \in X$ mit $\mathcal{F} \rightarrow x$. Sei $A \in \mathcal{A}$, dann folgt $X \setminus A \notin \mathcal{F}$, insbesondere $X \setminus A \notin \mathcal{U}_x$, folglich ist die offene Menge $X \setminus A$ keine Umgebung von x . Also gilt $x \notin X \setminus A$, das heißt $x \in A$. Da x in allen Elementen aus \mathcal{A} enthalten ist, ist insbesondere $\bigcap \mathcal{A}$ nicht leer. \square

1.72. SATZ (Tychonoff). Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume, dann ist der Produktraum $\prod_{i \in I} (X_i, \mathcal{O}_i)$ genau dann quasikompakt, wenn alle Räume (X_i, \mathcal{O}_i) quasikompakt sind.

Da sich die Hausdorff-Eigenschaft nach Satz 1.57 (2) analog verhält, darf man im obigen Satz auch „quasikompakt“ überall durch „kompakt“ ersetzen.

Man beachte, dass die entsprechende Aussage für die Box-Topologie aus Bemerkung 1.56 bei unendlichen Indexmengen falsch wird.

BEWEIS. Die Richtung „ \Rightarrow “ ist analog zu Übung 1.141, also beschränken wir uns auf „ \Leftarrow “. Es sei $X = \prod_{i \in I} X_i$ ein beliebiges Produkt quasikompakter topologischer Räume (X_i, \mathcal{O}_i) mit den natürlichen Abbildungen $\pi_i: X \rightarrow X_i$. Gegeben sei ein Ultrafilter \mathcal{F} auf X . Zu zeigen ist, dass \mathcal{F} gegen ein Element $x \in X$ konvergiert.

Wir betrachten die Bildfilter $\pi_i \mathcal{F}$ auf X_i aus Definition 1.46. Mit der Charakterisierung aus Satz 1.70 (2) überprüft man, dass die $\pi_i \mathcal{F}$ wieder Ultrafilter sind. Also existiert ein Grenzwert $x_i \in X_i$ von $\pi_i \mathcal{F}$, und wir betrachten $x = (x_i)_{i \in I} \in X$.

Sei jetzt $U \subset X$ eine Umgebung von x . Zu zeigen ist $U \in \mathcal{F}$ nach Definition 1.44 (1). Nach Definition der Produkttopologie existiert eine endliche Teilmenge $I_0 \subset I$ und Umgebungen $U_i \subset X_i$ für alle $i \in I_0$, so dass

$$\bigcap_{i \in I_0} \pi_i^{-1}(U_i) \subset U .$$

Da $\pi_i \mathcal{F} \rightarrow x_i$, folgt $U_i \in \pi_i \mathcal{F}$, also $\pi_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{F}$ nach Definition 1.46. Aber dann ist der endliche Durchschnitt dieser Mengen wieder in \mathcal{F} enthalten, und damit auch seine Obermenge U . Es folgt $\mathcal{F} \rightarrow x$. \square

Man beachte, dass man im Beweis erneut das Auswahlaxiom anwenden muss, um x zu bestimmen, falls die einzelnen Grenzwerte $x_i \in X_i$ nicht eindeutig sind (was passieren kann, wenn die X_i nicht Hausdorff sind).

Wir haben in Satz 1.67 die Alexandroff-Kompaktifizierung X' eines topologischen Raumes X kennengelernt. Es ist nicht schwer zu sehen, dass es für jede Kompaktifizierung $X \hookrightarrow \overline{X}$ von X eine eindeutige Abbildung $\overline{X} \rightarrow X'$ gibt, die auf X selbst die Identität induziert. Die Stone-Čech-Kompaktifizierung hat genau die umgekehrte Eigenschaft.

1.73. SATZ (Stone-Čech-Kompaktifizierung). *Es sei X ein vollständig regulärer topologischer Raum. Dann existiert eine Kompaktifizierung $X \hookrightarrow \beta X$ mit der folgenden universellen Eigenschaft: Zu jeder stetigen Abbildung $f: X \rightarrow K$ von X in einen kompakten Raum K existiert genau eine stetige Fortsetzung $\beta f: \beta X \rightarrow K$.*

Da es sehr viele kompakte Räume K und dementsprechend auch sehr viele stetige Abbildungen $X \rightarrow K$ gibt, ist es nicht auf Anhieb klar, dass solch eine Kompaktifizierung überhaupt existiert. Und tatsächlich bemühen wir im Beweis indirekt wieder das Auswahlaxiom.

In Übung 1.142 sehen wir, dass kompakte Räume normal sind, und aus Satz 1.57 wissen wir, dass Unterräume normaler Räume zumindest noch vollständig regulär sind. Das bedeutet, dass vollständige Regularität sowohl notwendig als auch hinreichend für die Existenz der Stone-Čech-Kompaktifizierung ist.

1.74. BEMERKUNG. Es sei X ein topologischer Raum.

- (1) Alle Kompaktifizierungen von X bilden eine Kategorie. Ihre Objekte sind Kompaktifizierungen $\iota: X \rightarrow K$, und ein Morphismus zwischen zwei Kompaktifizierungen $\iota_i: X \rightarrow K_i$ für $i = 0, 1$ ist eine Abbildung $F: K_0 \rightarrow K_1$, so dass $\iota_1 = F \circ \iota_0$. Die Axiome aus Definition 1.19 lassen sich leicht überprüfen.
- (2) Wenn X vollständig regulär ist, sei $\iota_X: X \rightarrow \beta X$ eine Stone-Čech-Kompaktifizierung von X . Sie ist ein sogenanntes initiales Objekt, das heißt, für jede andere Kompaktifizierung $\iota: X \rightarrow K$ existiert genau ein Morphismus $F: \beta X \rightarrow K$. Wie bei jeder universellen Eigenschaft folgt auch hier, dass die Stone-Čech-Kompaktifizierung bis auf einen eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmt ist. Tatsächlich gibt es verschiedene Möglichkeiten, sie zu konstruieren, aber alle führen am Ende auf homöomorphe Räume.
- (3) Wenn X lokalkompakt ist, dann bildet die Alexandroff-Kompaktifizierung X' aus Satz 1.67 ein terminales Objekt, das heißt, für jede andere Kompaktifizierung $\iota: X \rightarrow K$ existiert genau ein Morphismus $F: K \rightarrow X'$. Dieser Morphismus bildet alle Punkte in $K \setminus \text{im } \iota$ auf den unendlich fernen Punkt ∞ ab. Aus dieser universellen Eigenschaft folgt entsprechend auch die Eindeutigkeit der Alexandroff-Kompaktifizierung.

Gegeben sei ein beliebiger topologischer Raum X , und I bezeichne wieder das Einheitsintervall $[0, 1]$ mit der Standard-Topologie. Wir betrachten den Raum

$$BX = \text{Abb}(C(X, I), I) = \prod_{u \in C(X, I)} I$$

mit der Produkt-Topologie. Ein typisches Element von BX ist ein Tupel $(t_u)_{u \in C(X, I)}$ von Zahlen $t_u \in I$. Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ induziert eine Abbildung $Bf: BX \rightarrow BY$ mit

$$Bf((t_u)_{u \in C(X, I)}) = (t_{v \circ f})_{v \in C(Y, I)},$$

denn für alle $v \in C(Y, I)$ ist $v \circ f \in C(X, I)$ ein zulässiger Index für die Familie $(t_u)_{u \in C(X, I)}$. Indem wir Funktionen u an Punkten $x \in X$ auswerten, erhalten wir eine Abbildung

$$\iota_X: X \rightarrow BX \quad \text{mit} \quad x \mapsto (u(x))_{u \in C(X, I)} \in BX.$$

Wir zeigen unten, dass $\beta X = \overline{\text{im } \iota_X} \subset BX$ die gesuchte Kompaktifizierung liefert. Aber zunächst beweisen wir einige elementare Aussagen über die obige Konstruktion.

1.75. LEMMA. *Es seien X ein topologischer Raum, dann ist $\iota_X: X \rightarrow BX$ stetig. Sie ist genau dann injektiv, wenn zu je zwei Punkten $x, y \in X$ eine stetige Funktion $u: X \rightarrow I$ mit $u(x) \neq u(y)$ existiert.*

Sei Y ein weiterer topologischer Raum und $f: X \rightarrow Y$ stetig. Dann ist die induzierte Abbildung $Bf: BX \rightarrow BY$ ebenfalls stetig, und es gilt $\iota_Y \circ f = Bf \circ \iota_X$.

Später werden wir B einen Funktor nennen, und ι eine natürliche Transformation.

BEWEIS. Für $v \in C(X, I)$ bezeichne

$$\pi_v: BX \rightarrow I \quad \text{mit} \quad \pi_v((t_u)_{u \in C(X, I)}) = t_v$$

die Projektion auf den v -ten Faktor I des Produktes. Nach Konstruktion gilt $\pi_v \circ \iota_X = v: X \rightarrow I$, denn

$$(\pi_v \circ \iota_X)(x) = \pi_v((u(x))_{u \in C(X, I)}) = v(x)$$

für alle $x \in X$, und die Abbildung $\pi_v \circ \iota_X = v$ ist stetig. Als Abbildung in ein Produkt ist ι_X stetig nach der charakteristischen Eigenschaft des Produkts aus Satz 1.53 (2), da $v = \pi_v \circ \iota_X$ für alle $v \in C(X, I)$ stetig ist. Die Aussage über Injektivität folgt unmittelbar aus der Konstruktion von ι_X .

Als nächstes sei $f: X \rightarrow Y$ stetig und $Bf: BX \rightarrow BY$ wie oben definiert. Um zu zeigen, dass Bf stetig ist, reicht es zu zeigen, dass $\pi_w \circ Bf: BX \rightarrow I$ für alle $w \in C(Y, I)$ stetig ist. Da

$$\pi_w \circ Bf((t_u)_{u \in C(X, I)}) = \pi_w((t_{v \circ f})_{v \in C(Y, I)}) = t_{w \circ f},$$

gilt $\pi_w \circ Bf = \pi_{w \circ f}: BX \rightarrow I$, und die Projektionsabbildung $\pi_{w \circ f}$ ist stetig nach Satz 1.53 (1).

Für einen Punkt $x \in X$ gilt schließlich

$$(Bf \circ \iota_X)(x) = Bf((u(x))_{u \in C(X, I)}) = ((v \circ f)(x))_{v \in C(Y, I)} = (v(f(x)))_{v \in C(Y, I)} = (\iota_Y \circ f)(x),$$

folglich $Bf \circ \iota_X = \iota_Y \circ f$. □

BEWEIS von Satz 1.73. Wenn X vollständig regulär ist, behaupten wir, dass $\iota_X: X \rightarrow BX$ eine Einbettung ist. Zu zeigen ist, dass ι_X einen Homöomorphismus $X \rightarrow \text{im } \iota_X \subset BX$ induziert. Aus dem obigen Lemma folgt, dass ι_X stetig und aufgrund der vollständigen Regularität auch injektiv ist. Also reicht es zu zeigen, dass das Bild jeder offenen Menge $U \subset X$ in der Unterraumtopologie auf $\text{im } \iota_X \subset BX$ offen ist. Dazu sei $x \in U$. Da X vollständig regulär ist, finden wir eine stetige Funktion $v: X \rightarrow I$ mit $v(x) = 0$ und $v|_{X \setminus U} \equiv 1$. Nach einer Rechnung im obigen Beweis gilt $\pi_v \circ \iota_X = v: X \rightarrow I$. Insbesondere ist die Menge $\pi_v^{-1}([0, 1]) \subset BX$ offen, und

$$\iota_X(x) \in \pi_v^{-1}([0, 1]) \cap \text{im } \iota_X \subset \iota_X(U), \quad \text{da } \{x\} \in v^{-1}([0, 1]) = \iota_X^{-1}(\pi_v^{-1}([0, 1])) \subset U$$

nach Wahl von v . Also ist $\iota_X(U)$ eine Umgebung vom Punkt $\iota_X(x)$. Da das für alle Punkte $x \in U$ gilt, ist $\iota_X(U)$ offen in der Unterraumtopologie. Somit ist ι_X eine Einbettung.

Nach dem Satz 1.72 von Tychonoff ist der Raum BX als Produkt vieler Kopien des kompakten Raums I wieder kompakt. Dann ist der Abschluss $\beta X = \overline{\text{im } \iota_X}$ ebenfalls kompakt nach Bemerkung 1.59 (1). Außerdem ist $\text{im } \iota_X$ homöomorph zu X und liegt dicht in βX , also ist $\iota_X: X \rightarrow \beta X$ eine Kompaktifizierung von X gemäß Definition 1.66.

Zu zeigen ist noch die universelle Eigenschaft. Dazu sei $f: X \rightarrow K$ eine stetige Abbildung in ein Kompaktum K . Wir wenden die obige Konstruktion auf K an. Da K kompakt und BK ein Hausdorff-Raum ist, ist $\text{im } \iota_K \subset BK$ kompakt und insbesondere abgeschlossen nach Bemerkung 1.59 (2) und (5), also gilt $\beta K = \text{im } \iota_K$. Nach Lemma 1.75 gilt $Bf \circ \iota_X = \iota_K \circ f$, also bildet Bf die Teilmenge $\text{im } \iota_X$ nach $\text{im } \iota_K$ ab. Wir behaupten, dass Bf auch den Abschluss $\overline{\text{im } \iota_X}$ nach $\text{im } \iota_K = \overline{\text{im } \iota_K}$ abbildet. Denn $BK \setminus \text{im } \iota_K$ ist offen, folglich auch

$$Bf^{-1}(BK \setminus \text{im } \iota_K) = BX \setminus Bf^{-1}(\text{im } \iota_K).$$

Da $\text{im } \iota_X \subset Bf^{-1}(\text{im } \iota_K)$, folgt $\overline{\text{im } \iota_X} \subset Bf^{-1}(\text{im } \iota_K)$, was zu zeigen war. \square

1.76. BEISPIEL. Die Stone-Čech-Kompaktifizierung ist eher ein theoretisches Hilfsmittel als eine konkrete Konstruktion, mit der man explizit rechnen möchte. Wir geben die folgenden Beispiele daher ohne weitere Erläuterungen.

- (1) Obwohl es so aussieht, als ob dem halboffenen Intervall $(0, 1]$ nur der Punkt 0 zur Kompaktheit fehle, ist $I = [0, 1]$ nicht seine Stone-Čech-Kompaktifizierung, denn die stetige Funktion $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ lässt sich nicht auf I fortsetzen.
- (2) Man kann zeigen, dass $\beta\mathbb{N}$ genau so viele Elemente hat, wie es beliebige Abbildungen $I \rightarrow I$ gibt [Que, Satz 12.21]. Insbesondere ist $\beta\mathbb{N}$ damit sogar mächtiger als \mathbb{R} .
- (3) Sei andererseits $(-\infty, \omega_1)$ wie in Bemerkung 1.41 konstruiert. Dann ist die Stone-Čech-Kompaktifizierung zur Alexandroff-Kompaktifizierung isomorph [Que, Satz 12.22]. Folglich hat dieser Raum wegen Bemerkung 1.74 bis auf Isomorphie nur eine einzige Kompaktifizierung.

1.i. Quotienten und Verklebung

In Abschnitt 1.f hatten wir bereits einige Konstruktionen topologischer Räume vorgestellt. Jetzt wollen wir beliebige Vereinigungen und Quotienten topologischer Räume betrachten, und auch mehrere Räume zu einem neuen verkleben.

Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen, dann bezeichne $\coprod_i X_i$ die disjunkte Vereinigung dieser Mengen, und $\iota_i: X_i \hookrightarrow \coprod_i X_i$ sei die Inklusion der Menge X_i in die disjunkte Vereinigung. Da die Mengen X_i nicht immer paarweise disjunkt sind, müssen wir die disjunkte Vereinigung beliebiger Mengen erst konstruieren, zum Beispiel wie folgt:

$$\coprod_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} \{i\} \times X_i \subset I \times \bigcup_{i \in I} X_i \quad \text{und} \quad \iota_i(x_i) = (i, x_i).$$

1.77. DEFINITION. Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Die *topologische Summe* der X_i ist definiert als

$$\coprod_i (X_i, \mathcal{O}_i) = \left(\coprod_i X_i, \mathcal{O}_\sqcup \right) \quad \text{mit} \quad \mathcal{O}_\sqcup = \left\{ U \subset \coprod_i X_i \mid \iota_i^{-1}(U) \in \mathcal{O}_i \text{ für alle } i \in I \right\}.$$

Wenn wir X_i mit der Teilmenge $\iota_i(X_i) \subset \coprod_i X_i$ identifizieren, dann ist $U \subset \coprod_i X_i$ genau dann offen, wenn $U \cap X_i$ für alle $i \in I$ in X_i offen ist.

Wir überprüfen, dass \mathcal{O}_\sqcup eine Topologie ist. Dazu nutzen wir elementare Eigenschaften der Urbild-Abbildung ι_i^{-1} aus, nämlich

$$\begin{aligned} \iota_i^{-1}(\emptyset) &= \emptyset \in \mathcal{O}_i, & \iota_i^{-1}(X) &= X_i \in \mathcal{O}_i, \\ \iota_i^{-1}(U_i \cap \dots \cap U_k) &= \iota_i^{-1}(U_i) \cap \dots \cap \iota_i^{-1}(U_k) \in \mathcal{O}_i & \text{und} & \quad \iota_i^{-1}\left(\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U\right) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \iota_i^{-1}(U) \in \mathcal{O}_i \end{aligned}$$

für $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{O}$ und $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$.

1.78. SATZ. Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume.

- (1) Die Topologie \mathcal{O}_\sqcup ist die feinste Topologie auf der disjunkten Vereinigung $\coprod_i X_i$, für die alle Inklusionsabbildungen $\iota_i: X_i \hookrightarrow \coprod_i X_i$ stetig sind.
- (2) Die Topologie \mathcal{O}_\sqcup ist die einzige Topologie \mathcal{O} auf $\coprod_i X_i$, so dass eine beliebige Abbildung F von $(\coprod_i X_i, \mathcal{O})$ in einen beliebigen topologischen Raum (Z, \mathcal{O}_Z) genau dann stetig ist, wenn alle Abbildungen $F \circ \iota_i: (X_i, \mathcal{O}_i) \rightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$ stetig sind.

- (3) Der Raum $(\coprod_i X_i, \mathcal{O}_\sqcup)$ zusammen mit den Inklusionsabbildungen $(\iota_i: X_i \rightarrow \coprod_i X_i)_{i \in I}$ ist ein Koprodukt der Räume $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ in der Kategorie Top , das heißt, dass zu jedem Objekt (Z, \mathcal{O}_Z) und jeder Familie von Morphismen $(F_i: X_i \rightarrow Z)_{i \in I}$ genau ein Morphismus $F: \coprod_i X_i \rightarrow Z$ existiert, so dass $F_i = F \circ \iota_i$ für alle $i \in I$.

1.79. BEMERKUNG. Die charakteristische Eigenschaft (2) der topologischen Summe wird durch das linke kommutative Diagramm veranschaulicht.

$$\begin{array}{ccc}
 (X_i, \mathcal{O}_i) & \xrightarrow{F \circ \iota_i} & (Z, \mathcal{O}_Z) \\
 \iota_i \downarrow & \nearrow F & \\
 (\coprod_i X_i, \mathcal{O}) & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 (X_i, \mathcal{O}_i) & \xrightarrow{F_i} & (Z, \mathcal{O}_Z) \\
 \iota_i \downarrow & \dashrightarrow F & \\
 (Y, \mathcal{O}_Y) & &
 \end{array}
 \tag{1.2}$$

Ein Raum (Y, \mathcal{O}_Y) mit stetigen Abbildungen $\iota_i: X_i \rightarrow Y$ ist genau dann ein *Koprodukt* im Sinne von Satz 1.78 (3), wenn zu jedem Raum (Z, \mathcal{O}_Z) mit stetigen Abbildungen $F_i: X_i \rightarrow Z$ genau eine stetige Abbildung F wie im rechten Diagramm existiert.

Wie in Bemerkung 1.54 kann man zeigen, dass es zwischen je zwei Koprodukten der Objekte $(X_i)_{i \in I}$ genau einen Isomorphismus gibt, der mit den Inklusionsabbildungen verträglich ist. Und wie beim Produkt muss man auch bei Koprodukten in einer gegebenen Kategorie die Existenz „von Hand“ nachweisen, beispielsweise, indem man eine Konstruktion angibt und zeigt, dass sie die richtigen Eigenschaften hat.

Da sich die beiden Diagramme in (1.1) und (1.2) jeweils nur in der Richtung der Pfeile unterscheiden, sagt man, die beiden Konstruktionen in den Definitionen 1.52 und 1.77 seien zueinander *dual*. Daher rührt die Wahl der Bezeichnungen und der Symbole „ \prod “ und „ \coprod “.

BEWEIS des Satzes 1.78. Zu (1) sei \mathcal{O} eine beliebige Topologie auf $\coprod_i X_i$. Es sind genau dann alle Inklusionsabbildungen $\iota_i: X_i \rightarrow \coprod_i X_i$ stetig, wenn

$$\iota_i^{-1}(U) \in \mathcal{O}_i \quad \text{für alle } U \in \mathcal{O} \text{ und alle } i \in I$$

gilt, wenn also $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_\sqcup$.

Zu (2) seien (Z, \mathcal{O}_Z) und $F: (\coprod_i X_i, \mathcal{O}_\sqcup) \rightarrow (Z, \mathcal{O}_Z)$ wie im Satz vorgegeben. Wenn F stetig ist, sind alle Abbildungen $F \circ \iota_i$ stetig, da ι_i nach (1) stetig ist. Seien jetzt alle Abbildungen $F \circ \iota_i$ stetig, und sei $U \subset Z$ offen, dann ist

$$\iota_i^{-1}(F^{-1}(U)) = (F \circ \iota_i)^{-1}(U) \in \mathcal{O}_i$$

offen in X_i für alle $i \in I$. Nach Definition 1.77 gilt $F^{-1}(U) \in \mathcal{O}_\sqcup$, also ist F stetig. Der Beweis der Eindeutigkeit ist wieder analog zum Beweis der Sätze 1.50 (2) und (1.53) (2).

Zu (3) seien $f_i: X_i \rightarrow Z$ stetig. Die einzige Abbildung $f: \coprod_i X_i \rightarrow Z$ mit $f \circ \iota_i = f_i$ für alle i wird gegeben durch

$$f(\iota_i(x_i)) = f_i(x_i),$$

und f ist stetig nach (2). □

Das nächste Resultat ist das Pendant zu Satz 1.57.

1.80. SATZ. Die Trennungseigenschaften $(T_0) - (T_4)$ und (T_{3a}) und die Abzählbarkeitseigenschaft (A_1) werden unter der disjunkten Vereinigung vererbt. Die Eigenschaft (A_2) wird vererbt, wenn die Indexmenge höchstens abzählbar ist. Quasikompaktheit und Kompaktheit werden vererbt, wenn die Indexmenge endlich ist.

BEWEIS. Man kann die in den Trennungsaxiomen (T0) – (T4) gesuchten offenen Mengen U und $V \subset \coprod_{i \in I} X_i$ konstruieren, in dem man für alle $i \in I$ offene Teilmengen $\iota_i^{-1}(U), \iota_i^{-1}(V) \subset X_i$ angibt. Im Falle von (T4) muss man unter Umständen auf jedem Summanden X_i Wahlen treffen und benötigt daher das Auswahlaxiom. Analog konstruiert man die in (T3a) gesuchte Funktion, indem man auf dem Summanden X_i , der den ausgezeichneten Punkt x enthält, eine Funktion f_i vorgibt und diese mit der universellen Eigenschaft aus Satz 1.78 (3) auf allen anderen Summanden durch 0 fortsetzt.

Sei $x = \iota_j(x_j) \in \iota_j(X_j) \subset \coprod_{i \in I} X_i$, und sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X_j)$ eine abzählbare Umgebungsbasis von x_j in X_j , dann ist $\iota_j(\mathcal{U}) \subset \mathcal{P}(\coprod_{i \in I} X_i)$ eine abzählbare Umgebungsbasis von x in der disjunkten Vereinigung, also wird (A1) vererbt. Wenn I abzählbar ist und $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{O}_i$ eine abzählbare Basis von \mathcal{O}_i für alle $i \in I$, dann ist

$$\bigcup_{i \in I} \iota_i(\mathcal{B}_i) \subset \mathcal{O}_{\sqcup}$$

eine abzählbare Basis der disjunkten Vereinigung.

Sei schließlich \mathcal{U} eine offene Überdeckung einer disjunkten Vereinigung X quasikompakter Räume X_1, \dots, X_n , dann reichen je endliche offene Mengen aus \mathcal{U} aus, um einen Raum X_i zu überdecken. Also reichen insgesamt endlich viele. \square

1.81. BEMERKUNG. Es sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume und X eine Menge.

- (1) Gegeben Abbildungen $f_i: X \rightarrow X_i$ für alle $i \in I$, existiert stets eine eindeutige grösste Topologie \mathcal{O} auf X , für die alle f_i stetig sind. Diese Topologie \mathcal{O} heißt die von den f_i *induzierte Topologie* oder auch *Initialtopologie*. Beispiele sind die Unterraumtopologie (Satz 1.50 (1)), die Produkttopologie (Satz 1.53 (1)) sowie die Klumpentopologie, falls $I = \emptyset$.
- (2) Seien umgekehrt Abbildungen $f_i: X_i \rightarrow X$ für alle $i \in I$ gegeben, dann existiert stets eine eindeutige feinste Topologie \mathcal{O} auf X , für die alle f_i stetig sind. Diese Topologie heißt die von den f_i *koinduzierte Topologie* oder *Finaltopologie*. Beispiele sind die Summentopologie (Satz 1.78 (1)), sowie die diskrete Topologie, falls $I = \emptyset$.

Die Existenz und Eindeutigkeit ist in jedem Fall zu zeigen, die Argumente sind immer ähnlich denen in den Beweisen der Sätze 1.78, 1.50 und 1.53. Die Begriffe „Initialtopologie“ und „Finaltopologie“ stammen daher, dass man eine Topologie am „Beginn“ beziehungsweise „Ende“ der betrachteten „Pfeile“, also der Abbildungen f_i , definiert.

Im Folgenden betrachten wir einige Finaltopologien. Die Quotiententopologie ist dual zur Unterraumtopologie. Anstelle einer injektiven Abbildung $\iota: Y \hookrightarrow X$ in einen gegebenen topologischen Raum betrachten wir also eine surjektive Abbildung $\pi: X \twoheadrightarrow Y$ von einem gegebenen Raum (X, \mathcal{O}_X) in eine Menge Y . Dabei können wir Y als Quotienten $Y = X / \sim$ nach einer Äquivalenzrelation \sim auffassen, wobei

$$x \sim y \quad \iff \quad \pi(x) = \pi(y) .$$

1.82. DEFINITION. Es sei (X, \mathcal{O}_X) ein topologischer Raum und $\pi: X \twoheadrightarrow Y$ eine surjektive Abbildung. Dann definieren wir die *Quotiententopologie* oder *Identifizierungstopologie* auf Y durch

$$\mathcal{O}_Y = (\pi^{-1})^{-1}(\mathcal{O}_X) = \{ U \subset Y \mid \pi^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X \} .$$

Ähnlich wie bei der Summentopologie überlegt man sich, dass \mathcal{O}_Y tatsächlich eine Topologie ist. Die Quotiententopologie wird durch die folgende Eigenschaft charakterisiert.

1.83. SATZ. *Es sei (X, \mathcal{O}_X) ein topologischer Raum und $\pi: X \twoheadrightarrow Y$ eine surjektive Abbildung.*

- (1) *Die Quotiententopologie ist die feinste Topologie auf Y , für die $\pi: X \twoheadrightarrow Y$ stetig ist.*

- (2) Die Quotiententopologie ist die einzige Topologie auf Y , für die eine Abbildung f von Y in einen beliebigen topologischen Raum (Z, \mathcal{O}_Z) genau dann stetig ist, wenn $f \circ \pi: X \rightarrow Z$ stetig ist.

1.84. BEMERKUNG. Um zu sehen, dass Unterraumtopologie und Quotiententopologie zueinander dual sind, vergleichen wir die zugehörigen Diagramme.

$$\begin{array}{ccc}
 & (X, \mathcal{O}_X) & \\
 \iota \circ F \nearrow & \uparrow \iota & \\
 (Z, \mathcal{O}_Z) & \xrightarrow{F} & (Y, \mathcal{O}_Y)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 (X, \mathcal{O}_X) & & \\
 \pi \downarrow & \searrow f \circ \pi & \\
 (Y, \mathcal{O}_Y) & \xrightarrow{f} & (Z, \mathcal{O}_Z)
 \end{array}$$

Das linke Diagramm beschreibt die Situation aus Satz 1.50 (2), das rechte die aus Satz 1.83 (2).

BEWEIS von Satz 1.83. Damit $\pi: X \rightarrow Y$ stetig ist, dürfen höchstens Teilmengen $U \subset Y$ mit $\pi^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$ offen sein, also gilt (1).

Zu (2) kopieren wir den Beweis von Satz 1.50 (2) und drehen alle Pfeile um. □

1.85. BEMERKUNG. Sei $p: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow Y$ surjektiv, und \mathcal{O}_Y sei die Quotiententopologie. Wir untersuchen, welche topologischen Eigenschaften sich von X auf Y vererben.

- (1) Wenn X quasikompakt ist, dann ist auch Y quasikompakt, da $Y = p(X)$. Wenn X kompakt und Y Hausdorffsch ist, dann ist Y auch kompakt, vgl. Übung 1.141.
- (2) Trennungseigenschaften vererben sich im allgemeinen nicht von X auf Y , wie die Übungen 1.154 und 1.156 zeigen. Insbesondere vererbt sich auch Kompaktheit nicht automatisch.
- (3) Auch Abzählbarkeitseigenschaften vererben sich nicht immer, siehe Bemerkung 1.109 unten.

Unter gewissen Zusatzvoraussetzungen an die Äquivalenzrelation \sim beziehungsweise die Abbildung $\pi: X \rightarrow X/\sim$ lassen sich einzelne Trennungsaxiome von X auf den Quotienten übertragen, siehe etwa Übung 1.157. Wir wollen das hier aber nicht vertiefen.

Als nächstes wollen wir die Summen- und die Quotiententopologie benutzen, um zwei weitere Konstruktionen zu erklären. Wir benötigen beide später zur Konstruktion von CW-Komplexen.

Seien (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume, sei $V \subset Y$ eine Teilmenge, und seien $f: V \rightarrow X$ eine zunächst beliebige Abbildung. Wir betrachten die Menge

$$X \cup_f Y = (X \dot{\cup} Y) / \sim,$$

wobei \sim die von $y \sim f(y)$ für alle $y \in V$ erzeugte Äquivalenzrelation ist. Hierbei erzeugt jede Teilmenge $S \subset M \times M$ eine Äquivalenzrelation R auf M , so dass aRb genau dann gilt, wenn es eine Kette $a = a_0, a_1, \dots, a_k = b$ von Elementen von M mit $k \geq 0$ und $(a_{i-1}, a_i) \in S$ oder $(a_i, a_{i-1}) \in S$ für alle $i = 1, \dots, k$ gibt. Die Punkte in V werden in unserem Fall entlang der Abbildung f an X „angeklebt“. Die Quotiententopologie auf $X \cup_f Y$ heißt daher auch „Verklebungstopologie“. Man beachte: die kanonische Abbildung $i: X \hookrightarrow X \cup_f Y$ ist injektiv, die Abbildung $j: Y \rightarrow X \cup_f Y$ im

allgemeinen jedoch nicht. Der Raum $W = X \cup_f Y$ erfüllt die universelle Eigenschaft eines *Pushouts*.

$$\begin{array}{ccc}
 & & (Z, \mathcal{O}_Z) \\
 & \xrightarrow{h} & \\
 (Y, \mathcal{O}_Y) & \xrightarrow{j} & (W, \mathcal{O}_W) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 (V, \mathcal{O}_V) & \xrightarrow{f} & (X, \mathcal{O}_X)
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \nearrow k \\
 \searrow g
 \end{array}
 \quad (1.3)$$

1.86. FOLGERUNG. Seien (X, \mathcal{O}_X) , (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume, $V \subset Y$ und $f: V \rightarrow X$ beliebig. Der Raum $X \cup_f Y$ trage die Identifizierungstopologie zur Abbildung $\pi: X \sqcup Y \rightarrow X \cup_f Y$. Sei (Z, \mathcal{O}_Z) ein weiterer topologischer Raum und $g: X \rightarrow Z$ und $h: Y \rightarrow Z$ stetig.

- (1) Es existiert genau dann eine Abbildung $k: X \cup_f Y \rightarrow Z$ mit $g = k \circ i$ und $h = k \circ j$, wenn $g \circ f = h|_V: V \rightarrow Z$, und k ist in diesem Fall eindeutig.
- (2) In diesem Fall ist k stetig.

BEWEIS. Zu (1) existiert stets genau eine Abbildung

$$\bar{k}: X \sqcup Y \rightarrow Z \quad \text{mit} \quad \bar{k}|_X = g \quad \text{und} \quad \bar{k}|_Y = h,$$

da die disjunkte Vereinigung ein Koproduct in der Kategorie der Mengen ist. Damit k existiert, muss \bar{k} mit der Äquivalenzrelation \sim verträglich sein. Das ist äquivalent zu

$$(g \circ f)(y) = \bar{k}(f(y)) = \bar{k}(y) = h(y) \quad \text{für alle } y \in V.$$

Sei nun $k: X \cup_f Y \rightarrow Z$ eine Abbildung mit $g = k \circ i$ und $h = k \circ j$, dann gilt $(k \circ \pi)|_X = g$ und $(k \circ \pi)|_Y = h$, und es folgt $\bar{k} = k \circ \pi$ wegen Satz 1.78 (3). Da π surjektiv ist, ergibt sich daraus die Eindeutigkeit von k .

Zu (2) folgern wir nach Satz 1.78 (2), dass \bar{k} stetig ist. Da $\bar{k} = k \circ \pi$, folgt aus Satz 1.83 (2) die Stetigkeit von k . \square

Sei jetzt $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine gerichtete Folge topologischer Räume, das heißt, es existieren (beliebige) Abbildungen $f_{ij}: X_i \rightarrow X_j$ für alle $i < j$ mit

$$f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}: X_i \rightarrow X_k \quad \text{für alle } i < j < k.$$

Wir betrachten den *Kolimes*

$$\text{colim } X_i = \coprod_{i \in \mathbb{N}} X_i / \sim, \quad (1.4)$$

wobei

$$X_i \ni x_i \sim x_j \in X_j \iff f_{ik}(x_i) = f_{jk}(x_j) \quad \text{für ein } k > i, j.$$

1.87. FOLGERUNG. Seien $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ topologische Räume und $f_{ij}: X_i \rightarrow X_j$ Abbildungen, so dass $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ für alle $i < j < k$. Sei $\varinjlim X_i$ mit der Identifizierungstopologie zur Abbildung $\coprod_{i \in \mathbb{N}} X_i \rightarrow \varinjlim X_i$ versehen. Sei (Z, \mathcal{O}_Z) ein weiterer topologischer Raum und $(h_i: X_i \rightarrow Z)_{i \in \mathbb{N}}$ seien stetige Abbildungen.

- (1) Es existiert genau dann eine Abbildung $\ell: \varinjlim X_i \rightarrow Z$ mit $h_i = \ell \circ g_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$, wenn $h_j \circ f_{ji} = h_i: X_i \rightarrow Z$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt, und ℓ ist in diesem Fall eindeutig.
- (2) In dieser Situation ist ℓ stetig.

Also erfüllt $W = \varinjlim X_i$ die universelle Eigenschaft eines *Kolimes*.

$$\begin{array}{ccc}
 & & (Z, \mathcal{O}_Z) \\
 & \nearrow^{h_0} & \uparrow \\
 (X_0, \mathcal{O}_0) & \xrightarrow{f_{01}} & (X_1, \mathcal{O}_1) \longrightarrow \dots \\
 & \searrow_{g_0} & \downarrow \\
 & & (W, \mathcal{O}_W)
 \end{array}
 \tag{1.5}$$

Man nennt die obige Topologie auch die *schwache Topologie* auf $\text{colim } X_i$. Sie ist die Finaltopologie zu den Abbildungen g_i .

BEWEIS. Dieser Beweis ist völlig analog zum Beweis von Folgerung 1.86. □

In Wirklichkeit ist die Kolimes-Konstruktion wesentlich allgemeiner und umfasst die universellen Eigenschaften in den Diagrammen (1.3) und (1.5) als Spezialfälle, siehe Definition 4.7 und Bemerkung 4.8.

1.j. Zusammenhang

Wir nennen einen Raum X zusammenhängend, wenn wir ihn nicht als disjunkte Vereinigung zweier nicht leerer Unterräume schreiben können, das heißt, wenn wir ihn nicht in Teile zerlegen können, die (im Sinne von Satz 1.78) “nichts miteinander zu tun haben”. Für viele Anwendungen benötigen wir den etwas stärkeren Begriff des Wegzusammenhangs.

1.88. DEFINITION. Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}_X) heißt

- (1) *zusammenhängend*, wenn es keine zwei nichtleeren offenen Mengen $U, V \in \mathcal{O}$ gibt mit $U \cup V = X$ und $U \cap V = \emptyset$, und
- (2) *wegzusammenhängend*, wenn zu je zwei $x, y \in X$ ein *Weg* γ von x nach y , das heißt, eine stetige Abbildung $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$, existiert.

1.89. BEMERKUNG. Bedingung (1) kann man äquivalent mit abgeschlossenen Mengen formulieren.

- (1) Wenn $X = U \dot{\cup} V$ gilt und U, V offen sind, dann ist X homöomorph zu $U \sqcup V$, siehe Übung 1.158.
- (2) Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}_X) ist genau dann zusammenhängend, wenn \emptyset und X die einzigen Mengen sind, die zugleich offen und abgeschlossen sind.
- (3) Es trage $Y = \{0, 1\}$ die diskrete Topologie. Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}_X) ist genau dann zusammenhängend, wenn es keine stetige surjektive Abbildung $F: X \rightarrow Y$ gibt.

1.90. BEISPIEL. Eine Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ ist genau dann ein Intervall, wenn sie zusammenhängend ist. Zu “ \Rightarrow ” sei etwa $I = U \dot{\cup} V$ mit $U, V \subset I$ nichtleer, offen und abgeschlossen. Wir fixieren $u \in U$ und $v \in V$, o.B.d.A. sei $u < v$. Setze $x = \inf(V \cap [u, v])$, dann enthält jede Umgebung von x sowohl Punkte von V als auch von U . Es folgt

$$x \in \overline{V} \cap \overline{U} = V \cap U,$$

da sowohl U als auch V abgeschlossen sind, im Widerspruch zu $U \cap V = \emptyset$.

Wenn I kein Intervall ist, existieren $x < y < z$ mit $x, z \in I$ und $y \notin I$. Dann ist

$$I = (I \cap (-\infty, y)) \dot{\cup} (I \cap (y, \infty))$$

eine Zerlegung wie in Definition 1.88 (1).

- 1.91. SATZ. (1) *Das Bild eines (weg-) zusammenhängenden Raumes unter einer stetigen Abbildung ist wieder (weg-) zusammenhängend.*
 (2) *Jeder wegzusammenhängende Raum ist zusammenhängend.*

Wir können (1) als eine Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes der Analysis auffassen. Außerdem folgt aus (1), dass sich (Weg-) Zusammenhang auf Quotienten vererbt.

BEWEIS. Sei $F: X \rightarrow Y$ stetig. Wenn im $F \subset Y$ nicht zusammenhängend ist, dann gibt es nichtleere, offene Teilmengen $U, V \subset \text{im } F$ mit $\text{im } F = U \dot{\cup} V$. Dann sind auch $F^{-1}(U)$ und $F^{-1}(V)$ nicht leer, offen mit $X = F^{-1}(U) \dot{\cup} F^{-1}(V)$. Also ist auch X nicht zusammenhängend.

Sei X wegzusammenhängend und $F(x), F(y)$ zwei beliebige Punkte in $\text{im } F$. Sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg von x nach y , dann ist $F \circ \gamma$ ein Weg von $F(x)$ nach $F(y)$ in $\text{im } F$. Also ist auch $\text{im } F$ wegzusammenhängend, und es folgt (1).

Zu (2) nehmen wir an, dass es nichtleere, offene und abgeschlossene Teilmengen $U, V \subset X$ mit $X = U \dot{\cup} V$ gibt. Wähle $x \in U$ und $y \in V$. Dann kann es keinen Weg γ von x nach y geben, denn ansonsten wäre

$$[0, 1] = \gamma^{-1}(U) \dot{\cup} \gamma^{-1}(V)$$

mit $\gamma^{-1}(U), \gamma^{-1}(V)$ nichtleer, offen im Widerspruch zu Beispiel 1.90. \square

1.92. BEMERKUNG. Aus der obigen Diskussion folgt, dass sich (Weg-) Zusammenhang auf Quotienten überträgt, aber nicht auf disjunkte Vereinigungen. In Übung 1.161 sehen wir, dass sich Wegzusammenhang auf beliebige Produkte überträgt. Auch Zusammenhang überträgt sich auf Produkte, siehe dazu [En, Theorem 6.1.15] und [Que, Satz 4.10].

1.93. DEFINITION. Sei (X, \mathcal{O}_X) ein topologischer Raum, und sei $x \in X$.

- (1) Die Vereinigung aller zusammenhängenden Unterräume von X , die x enthalten, heißt die *Zusammenhangskomponente* $K(x)$ von x .
- (2) Die Menge aller Punkte y , die sich mit x durch einen stetigen Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ verbinden lassen, heißt die *Wegzusammenhangskomponente* von x .
- (3) Der Raum X heißt *total unzusammenhängend*, wenn $\{x\}$ die Zusammenhangskomponente von x ist für alle $x \in X$.

1.94. BEMERKUNG. (1) Zusammenhangskomponenten sind immer abgeschlossen, Wegzusammenhangskomponenten jedoch nicht notwendigerweise, siehe Übung 1.159.

- (2) Seien $x, y \in X$, dann gilt entweder $K(x) = K(y)$ oder $K(x) \cap K(y) = \emptyset$, analoges gilt für Wegzusammenhangskomponenten.
- (3) Aus Satz 1.91 (2) folgt, dass die Wegzusammenhangskomponente eines Punktes x in $K(x)$ enthalten ist.
- (4) Für alle $x \in X$ gilt

$$K(x) \subset \bigcap \{ V \subset X \mid x \in V, V \text{ ist offen und abgeschlossen} \} .$$

Gleichheit muss nicht gelten.

1.95. DEFINITION. Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}_X) heißt *lokal (weg-) zusammenhängend*, wenn zu jedem Punkt x und jeder Umgebung U von x eine (weg-) zusammenhängende Umgebung $V \subset U$ von x existiert.

1.96. BEMERKUNG. Es gibt lokal zusammenhängende, nicht zusammenhängende topologische Räume, und auch zusammenhängende, nicht lokal zusammenhängende topologische Räume. Wir werden später oft mit lokal wegzusammenhängenden Räumen arbeiten.

1.k. Funktionenräume und die kompakt-offene Topologie

Gegeben zwei (topologische) Räume X, Y , hat man in der Regel viele Möglichkeiten, eine Topologie auf dem Raum $\text{Abb}(X, Y)$ aller Abbildungen oder geeigneten Unterräumen (wie zum Beispiel dem Raum $C(X, Y)$ der stetigen Abbildungen) zu definieren. Oft benötigt man dazu zusätzliche Strukturen wie Metriken, Maße oder differenzierbare Strukturen. Beispiele sind Räume wie $C^k(X)$, $C^{k,\alpha}(X)$, $L^p(X)$ oder $W^{k,p}(X)$. Die Topologien auf diesen Räumen kann man mit den Methoden dieser Vorlesung betrachten und mit anderen Topologien auf dem gleichen oder einem ähnlichen Raum vergleichen. Das passiert in Vorlesungen über Funktionalanalysis oder auch partielle Differentialgleichungen (siehe zum Beispiel die Sätze von Rellich und Sobolev).

Es gibt einige wenige interessante Topologien auf $\text{Abb}(X, Y)$ oder $C(X, Y)$, die man allein mit Hilfe der Topologien auf X und Y definieren kann. Die Topologie der punktweisen Konvergenz auf $\text{Abb}(X, Y)$ haben wir in Gestalt der Produkttopologie in Definition 1.52 kennengelernt, siehe Übung 1.140. Für sie braucht man nur eine Topologie auf Y . In diesem Abschnitt betrachten wir eine andere Topologie auf $C(X, Y)$, die die Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz verallgemeinert. Diese Topologie spielt nicht nur in Teilen der reellen und komplexen Analysis eine wichtige Rolle, sondern auch später in der algebraischen Topologie. Wir werden in Abschnitt 4.c noch ausführlich auf sie zurückkommen.

1.97. DEFINITION. Seien (X, \mathcal{O}_X) , (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume, dann ist die *kompakt-offene Topologie* \mathcal{O}_{ko} auf $C(X, Y)$ definiert als die Topologie zur Subbasis

$$\mathcal{S}_{\text{ko}} = \{ S_{u,K,U} \mid K \text{ kompakt, } u: K \rightarrow X \text{ stetig und } U \subset Y \text{ offen} \}$$

mit $S_{u,K,U} = \{ f \in C(X, Y) \mid \text{im } u \subset f^{-1}(U) \}$.

So, wie es in der Literatur verschiedene Sichtweisen auf den Begriff „kompakt“ gibt, gibt es auch mehrere ähnliche Definitionen für die kompakt-offene Topologie. All diese Definitionen sind äquivalent, wenn die beteiligten Räume Hausdorffsch sind. Die obige Definition folgt Strickland [St].

1.98. PROPOSITION (Funktorialität). Seien (X, \mathcal{O}_X) , (Y, \mathcal{O}_Y) und (Z, \mathcal{O}_Z) topologische Räume. Dann induziert jede stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ stetige Abbildungen

$$C(Z, X) \longrightarrow C(Z, Y) \quad \text{mit} \quad g \longmapsto f \circ g \quad (1)$$

$$\text{und} \quad C(Y, Z) \longrightarrow C(X, Z) \quad \text{mit} \quad h \longmapsto h \circ f. \quad (2)$$

Den Beweis lassen wir als Übung 1.162. In Definition 2.16 führen wir Funktoren ein. Dann wird auch klar werden, was wir mit Funktorialität meinen.

1.99. PROPOSITION. Es seien (X, \mathcal{O}_X) , (Y, \mathcal{O}_Y) , (Z, \mathcal{O}_Z) topologische Räume, und (Y, \mathcal{O}_Y) sei lokalkompakt. Dann ist die Verkettung

$$\circ: C(Y, Z) \times C(X, Y) \longrightarrow C(X, Z) \quad (1)$$

stetig bezüglich der kompakt-offenen Topologien. Insbesondere gibt es eine stetige Auswertungsabbildung

$$\text{ev}: C(Y, Z) \times Y \longrightarrow Z. \quad (2)$$

Wir können das leider nicht direkt aus Proposition 1.98 folgern, vergleiche Bemerkung 1.55.

BEWEIS. Nach Übung 1.128 reicht es für (1) zu zeigen, dass die Urbilder von Subbasismengen $S_{u,K,W} \subset C(X, Z)$ in $C(Y, Z) \times C(X, Y)$ offen sind. Dazu sei K kompakt, $u: K \rightarrow X$ stetig und $W \subset Z$ offen. Außerdem seien $f \in C(X, Y)$ und $g \in C(Y, Z)$ gegeben mit $g \circ f \in S_{u,K,W}$. Wir konstruieren ein Kompaktum L , eine stetige Abbildung $v: L \rightarrow g^{-1}(W) \subset Y$ und eine offene Teilmenge $V \subset \text{im } v$ mit $\text{im } u \subset f^{-1}(V)$. Dann folgt $f \in S_{u,K,V}$, $g \in S_{v,L,W}$ und

$$S_{v,L,W} \times S_{u,K,V} \subset \circ^{-1}(S_{u,K,W}).$$

Also ist $\circ^{-1}(S_{u,K,W})$ eine Umgebung des Punktes (g, f) . Da das für alle g, f mit $g \circ f \in S_{u,K,W}$ gilt, ist $\circ^{-1}(S_{u,K,W})$ offen, und somit die Verkettung eine stetige Abbildung.

Zur Konstruktion von V und L sei zunächst $y \in \text{im}(f \circ u) \subset Y$. Da $g \circ f \in S_{u,K,W}$, folgt $y \in g^{-1}(W)$. Da Y lokalkompakt ist, hat y eine kompakte Umgebung $L_y \subset Y$. Als kompakter Raum ist L_y normal nach Übung 1.142, also finden wir eine offene Umgebung $V_y \subset L_y$ von y mit $\bar{V}_y \subset g^{-1}(W)$. Nun ist K kompakt und $f \circ u$ stetig, also reichen endlich viele Mengen der Form $(f \circ u)^{-1}(V_y)$ aus, um K zu überdecken; seien $y_1, \dots, y_N \in \text{im}(f \circ u)$ die entsprechenden Punkte. Wir definieren

$$V = \bigcup_{i=1}^N V_{y_i} .$$

Die Teilmengen $\bar{V}_{y_i} \subset L_{y_i}$ sind kompakt, folglich auch ihre endliche disjunkte Vereinigung

$$L = \prod_{i=1}^N \bar{V}_{y_i} .$$

Wir definieren $v: L \rightarrow Y$ als disjunkte Vereinigung der Inklusionsabbildungen $V_{y_i} \hookrightarrow Y$. Es folgt $\text{im}(f \circ u) \subset V \subset \text{im } v \subset g^{-1}(W)$ wie gefordert. Damit ist (1) bewiesen.

Zu (2) betrachten wir als Spezialfall den einpunktigen Raum $X = \text{pt}$. Es gibt eine natürliche Bijektion $C(\text{pt}, Y) \cong Y$, die jeder Abbildung ihren Wert zuordnet. Sei K kompakt, dann gibt es genau eine stetige Abbildung $c: K \rightarrow \text{pt}$. Sei außerdem $V \subset Y$ offen, dann entspricht die Subbasismenge $S_{c,K,V} \subset C(\text{pt}, Y)$ genau der offenen Menge V , falls $K \neq \emptyset$ (und dem gesamten Raum Y , falls $K = \emptyset$). Insbesondere sind die Räume $C(\text{pt}, Y)$ und Y kanonisch homöomorph. Jetzt folgt (2) aus (1), denn wir erhalten ev als Verkettung stetiger Abbildungen

$$C(Y, Z) \times Y \xleftarrow{\cong} C(Y, Z) \times C(\text{pt}, Y) \xrightarrow{\circ} C(\text{pt}, Z) \xrightarrow{\cong} Z . \quad \square$$

1.100. PROPOSITION. *Es seien (X, \mathcal{O}_X) , (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume, und $C(X, Y)$ trage die kompakt-offene Topologie. Dann gibt es eine stetige Abbildung*

$$\text{in}: X \longrightarrow C(Y, X \times Y) \quad \text{mit} \quad \text{in}(x)(y) = (x, y) .$$

Zu jedem $x \in X$ gehört also eine *Inklusionsabbildung* $\text{in}(x)$, die Y auf $\{x\} \times Y \subset X \times Y$ abbildet.

BEWEIS. Es reicht zu zeigen, dass $\text{in}^{-1}(S_{u,K,W}) \subset X$ für alle Kompakta K , alle stetigen Abbildungen $u: K \rightarrow Y$ und alle offenen Mengen $W \subset X \times Y$ offen ist. Sei dazu $x \in \text{in}^{-1}(S_{u,K,W})$, das heißt, es gilt $\{x\} \times \text{im } u \subset W$.

Nach Definition der Produkttopologie finden wir zu jedem Punkt $y \in \text{im } u$ Umgebungen $U_y \subset X$ von x und $V_y \subset Y$ von y , so dass $U_y \times V_y \subset W$. Da K kompakt ist, reichen endlich viele der offenen Mengen $u^{-1}(V_y)$ aus, um K zu überdecken. Seien $y_1, \dots, y_N \in \text{im } u$ die entsprechenden Punkte, dann ist

$$U = U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_N} \subset X$$

eine offene Umgebung von x mit $U \subset \text{in}^{-1}(S_{u,K,W})$, denn

$$U \times \text{im } u \subset (U_{y_1} \times V_{y_1}) \cup \dots \cup (U_{y_N} \times V_{y_N}) \subset W . \quad \square$$

Seien X, Y, Z Mengen, dann gibt es eine natürliche Bijektion

$$\text{Abb}(X \times Y, Z) \cong \text{Abb}(X, \text{Abb}(Y, Z)) , \quad F \longmapsto f = (x \mapsto F(x, \cdot) \in \text{Abb}(Y, Z)) .$$

Wenn wir Y^X für $\text{Abb}(X, Y)$ schreiben, ließt sich das als „Exponentialgesetz“ $(z^y)^x = z^{xy}$. Da dies ein Beispiel einer formalen Adjunktion ist, nennen wir f und F zueinander *adjungiert*. Das andere Exponentialgesetz $z^{x+y} = z^x \cdot z^y$ hat ebenfalls ein topologisches Analogon, das wir uns in Übung 1.165 anschauen.

1.101. SATZ (Exponentialgesetz). *Es seien (X, \mathcal{O}_X) , (Y, \mathcal{O}_Y) und (Z, \mathcal{O}_Z) topologische Räume, und $C(Y, Z)$ trage die kompakt-offene Topologie \mathcal{O}_{ko} .*

(1) *Dann existiert eine injektive Abbildung*

$$\alpha: C(X \times Y, Z) \longrightarrow C(X, C(Y, Z)) \quad \text{mit} \quad F \longmapsto (x \mapsto F(x, \cdot)).$$

Sie ist stetig bezüglich der kompakt-offenen Topologien.

(2) *Die obige Abbildung α ist genau dann bijektiv für alle Räume (X, \mathcal{O}_X) , wenn die Auswertungsabbildung*

$$\text{ev}: C(Y, Z) \times Y \longrightarrow Z \quad \text{mit} \quad \text{ev}(g, y) = g(y)$$

stetig ist. Das gilt insbesondere dann, wenn (Y, \mathcal{O}_Y) lokal kompakt ist.

(3) *Wenn (X, \mathcal{O}_X) Hausdorff und (Y, \mathcal{O}_Y) lokal kompakt ist, ist die Abbildung α ein Homöomorphismus bezüglich der kompakt-offenen Topologien.*

Wir beweisen diesen Satz hier nicht vollständig. In Kapitel 4 gehen wir zu einer „angenehmen“ Unterkategorie $kw\mathcal{H}$ von \mathcal{Top} über, in der der obige Satz nicht nur etwas einfacher zu beweisen ist, sondern auch ohne zusätzliche Voraussetzungen an X und Y gilt. In dieser Kategorie können wir die Bijektivität von α in (2) als universelle Eigenschaft des „internen hom-Funktors“ $C(Y, Z)$ deuten, falls wir $X \times Y$ schon kennen. Umgekehrt können wir es auch als universelle Eigenschaft des „Tensorproduktes“ $X \times Y$ lesen, wenn wir $C(Y, Z)$ schon kennen. Dann ergibt sich (3) durch abstrakte Überlegungen. In der Kategorie \mathcal{Top} funktioniert all das leider nicht.

BEWEIS. Zu (1) sei eine stetige Abbildung $F: X \times Y \rightarrow Z$ gegeben. Wegen der Propositionen 1.98 (1) und (1.100) erhalten wir $\alpha(F) \in C(X, C(Y, Z))$ als Verkettung stetiger Abbildungen

$$X \xrightarrow{\text{in}} C(Y, X \times Y) \xrightarrow{F \circ} C(Y, Z).$$

Da die stetigen Abbildungen eine Teilmenge aller Abbildungen bilden, ergibt sich die Injektivität von α aus der Vorüberlegung. Die Stetigkeit von α beweisen wir hier nicht.

Zu (2) sei zunächst $\text{ev}: C(Y, Z) \times Y \rightarrow Z$ stetig. Wir erhalten $f \in C(X, C(Y, Z))$ ein Urbild unter α als Verkettung stetiger Abbildungen

$$X \times Y \xrightarrow{f \times \text{id}_Y} C(Y, Z) \times Y \xrightarrow{\text{ev}} Z.$$

Umgekehrt erhalten wir die Auswertungsabbildung $\text{ev}: C(Y, Z) \times Y \rightarrow Z$ als Urbild von $\text{id}_{C(Y, Z)}$ unter α für $X = C(Y, Z)$, denn für $g \in C(Y, Z)$ gilt

$$\alpha(\text{ev})(g) = \text{ev}(g, \cdot) = g = (\text{id}_{C(Y, Z)}g).$$

Den Beweis von (3) lassen wir wieder aus. □

1.102. BEMERKUNG. Es sei jetzt (Y, d) ein metrischer Raum.

(1) Eine Folge $(f_i)_i$ in $C(X, Y)$ konvergiert genau dann in der kompakt-offenen Topologie gegen $f \in C(X, Y)$, wenn $(f_i)_i$ *gleichmäßig auf Kompakta* gegen f konvergiert (oder kurz: *kompakt konvergiert*), das heißt, wenn es zu jeder stetigen Abbildung $u: K \rightarrow X$ von einem Kompaktum nach X und jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$d(f_i(x), f(x)) < \varepsilon$$

für alle $x \in K$ und alle $i \geq n$ gibt (Übung 1.163).

(2) Sei X lokalkompakt, dann ist Konvergenz in der kompakt-offenen Topologie wegen (1) äquivalent zur lokal gleichmäßigen Konvergenz, das heißt, jeder Punkt $x \in X$ hat eine Umgebung, auf der die Folge gleichmäßig konvergiert. Zur Erinnerung: in Analysis I wurde gezeigt, dass die Teilmenge der stetigen reellwertigen Funktionen auf einem Intervall I

unter gleichmäßiger Konvergenz in $\text{Abb}(I, \mathbb{R})$ folgenabgeschlossen ist. Da Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist, hätte lokal gleichmäßige Konvergenz dafür auch ausgereicht.

- (3) Wenn X sogar kompakt ist, ist Konvergenz in der kompakt-offenen Topologie äquivalent zur gleichmäßigen Konvergenz.
- (4) Wenn X eine *kompakte Ausschöpfung* besitzt, das heißt, wenn X als Vereinigung kompakter Mengen K_i mit $K_i \subset \overset{\circ}{K}_{i+1}$ für $i \in \mathbb{N}$ geschrieben werden kann, können wir eine Metrik auf $C(X, Y)$ angeben, die die kompakt offene Topologie auf $C(X, Y)$ induziert, siehe Übung 1.164.

Um gleichmäßige Konvergenz topologisch zu definieren, wenn X nicht kompakt ist, brauchen wir eine stärkere Struktur als nur eine Topologie auf dem Raum Y .

1.1. CW-Komplexe und topologische Mannigfaltigkeiten

Wir beschreiben jetzt zwei wichtige Klassen topologischer Räume. Die Grundidee bei beiden Konstruktionen besteht darin, Räume zu konstruieren, die sich in einem gewissen Sinne ähnlich verhalten wie \mathbb{R}^n mit der Standardtopologie. Während Mannigfaltigkeiten (oft mit Zusatzstruktur, zum Beispiel „differenzierbar“) in der Geometrie eine große Rolle spielen, brauchen wir CW-Komplexe später für viele Konstruktionen in der (algebraischen) Topologie.

1.103. DEFINITION. Eine (*topologische*) *Mannigfaltigkeit* der *Dimension* $n \in \mathbb{N}$ ist ein Hausdorff-Raum M mit abzählbarer Basis, so daß jeder Punkt $p \in M$ eine Umgebung $U \subset M$ besitzt, die homöomorph zu \mathbb{R}^n ist.

1.104. BEISPIEL. Die folgenden Räume sind Mannigfaltigkeiten.

- (1) Der Raum \mathbb{R}^n ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension n .
- (2) Die Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension n . Hierzu betrachtet man die stereographischen Projektion vom Nord- und Südpol $(0, \dots, 0, \pm 1)$ aus auf den Unterraum $\mathbb{R}^n \times \{0\}$.
- (3) Jede offene Teilmenge einer Mannigfaltigkeit ist wieder eine Mannigfaltigkeit. Hierzu reicht es zu zeigen, dass offene Teilmengen des \mathbb{R}^n lokal homöomorph zu \mathbb{R}^n sind. Betrachte dazu die Abbildung

$$B_r(x) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad y \mapsto \frac{1}{r - |y - x|} (y - x).$$

- (4) Sei $M \subset \mathbb{R}^m$ eine n -dimensionale C^k -Untermannigfaltigkeit, dann ist M , versehen mit der Unterraumtopologie, eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.
- (5) Es sei $(-\infty, \omega_1)$ die geordnete Menge aus Bemerkung 1.41, dann versehen wir

$$X = ((-\infty, \omega_1) \times [0, 1]) \setminus \{(0, 0)\}$$

mit der *lexikographischen Ordnung*, das heißt

$$(x, r) \prec (y, s) \iff x \prec y \quad \text{oder} \quad (x = y \text{ und } r < s)$$

und der zugehörigen Ordnungstopologie. Dieser Raum heißt auch die (halb-) lange Gerade (die lange Gerade erhält man als Vereinigung zweier Kopien, von denen eine die umgekehrte Ordnung trägt, und einem Punkt $(0, 0)$ genau dazwischen).

Man kann zeigen, dass X lokal zu \mathbb{R} homöomorph ist. Sei beispielsweise $\omega_0 = \sup \mathbb{N} \prec \omega_1$ die kleinste unendliche Ordinalzahl. Als Umgebung betrachten wir das Intervall $I = (-\infty, (\omega_0 + 1, 0)) \subset X$. Die Abbildung $I \rightarrow (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ mit

$$(x, s) \mapsto \begin{cases} s & \text{falls } x = \omega_0, \text{ und} \\ -2^{-1-x}(2 - s) & \text{falls } x \prec \omega_0, \end{cases}$$

ist eine ordnungserhaltende Bijektion, also ein Homöomorphismus bezüglich der Ordnungstopologien. Aber X enthält überabzählbar viele disjunkte offene Teilmengen der Form $\{x\} \times (0, 1)$, kann also keine abzählbare Basis haben.

- 1.105. BEMERKUNG. (1) Man beachte, dass (A1) und (T1) automatisch erfüllt sind, da jeder Punkt eine Umgebung homöomorph zu \mathbb{R}^n besitzt.
- (2) Wir verlangen die Hausdorff-Eigenschaft (T2), um den Raum aus Beispiel 1.28 und ähnliche Konstrukte auszuschließen. Wir verlangen abzählbare Basen (A2), damit unsere Mannigfaltigkeiten nicht zu groß werden. Betrachte dazu etwa die obige (halb-) lange Gerade oder das Produkt aus dem Intervall $(0, 1)$ mit einer überabzählbaren, diskreten Menge.
- (3) Man kann zeigen, dass Mannigfaltigkeiten (T3) erfüllen, also regulär sind, daher nach dem Metrisationssatz von Urysohn metrisierbar (siehe Bemerkung 1.39), also insbesondere sogar normal.
- (4) Wir werden in Satz 3.51 sehen, dass die Dimension eine lokale Invariante ist: eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n ist zu einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^m genau dann isomorph, wenn $n = m$ gilt. Wir verlangen, dass eine Mannigfaltigkeit nur aus Komponenten einer festgelegten Dimension besteht.

Mit dieser Definition lässt sich zeigen, dass man jede Mannigfaltigkeit in den \mathbb{R}^N einbetten kann, wenn N hinreichend groß gewählt wurde.

Der Begriff der Mannigfaltigkeit ist jedoch für viele Zwecke zu speziell. Die folgende Konstruktion liefert hingegen (überraschenderweise) eine Klasse von topologischen Räumen, die einerseits noch halbwegs anschaulich, und andererseits für die meisten Konstruktionen in der algebraischen Topologie allgemein genug ist. Als Referenz verweisen wir auf den Anhang von [H1] und auf Abschnitt 4.d.

Wir bezeichnen mit $D^n = \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^n$ den abgeschlossenen n -dimensionalen Einheitsball, und mit $\partial D^n = S^{n-1}$ seinen Rand. Hier wie auch im Folgenden bezieht sich ein hochgestellter Index immer auf eine Art Dimension und bezeichnet insbesondere nicht etwa einen Exponenten.

- (1) Wir beginnen mit einem diskreten topologischen Raum X^0 , dem 0-Gerüst oder 0-Skelett, dessen Punkte wir auch 0-Zellen nennen.
- (2) Sei das $(n-1)$ -Gerüst X^{n-1} bereits induktiv konstruiert, sei I^n eine beliebige Indexmenge, und sei $(\varphi_i^n)_{i \in I^n}$ eine Familie stetiger Abbildungen von S^{n-1} nach X^{n-1} . Mit Satz 1.78 erhalten wir eine Abbildung

$$\varphi^n = \coprod_i \varphi_i^n : \coprod_i \partial D^n \rightarrow X^{n-1} \quad \text{mit} \quad \varphi^n(i, x) = \varphi_i^n(x).$$

Dann konstruieren wir das n -Gerüst X_n , indem wir $\#I^n$ -viele Kopien von D^n mit X^{n-1} entlang der Abbildung φ^n verkleben wie in Folgerung 1.86, siehe Diagramm (1.3):

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i \in I^n} D^n & \xrightarrow{\varphi^n} & X^n = X^{n-1} \cup_{\varphi^n} \coprod_{i \in I^n} D^n \\ \uparrow & & \uparrow \\ \coprod_{i \in I^n} S^{n-1} & \xrightarrow{\varphi^n} & X^{n-1} \end{array} .$$

Mit Satz 1.78 zerfällt Φ^n wiederum als disjunkte Vereinigung einer Familie $(\Phi_i^n)_{i \in I^n}$ von Abbildungen von D^n nach X^n .

- (3) Wir können entweder nach endlich vielen Schritten aufhören mit $X = X^n$, oder diesen Prozess für alle $n \in \mathbb{N}_0$ fortsetzen. In diesem Fall liefert Folgerung 1.87 den Kolimes

$$X = \text{colim } X^n .$$

Als Menge ist X die aufsteigende Vereinigung der Räume $X^0 \subset X^1 \subset \dots$

Durch diese Konstruktionen ist die Topologie auf X induktiv durch die Abbildungen $\varphi_i^n: S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ festgelegt.

1.106. DEFINITION. Ein so konstruierter topologischer Raum X heißt *CW-Komplex*. Die Teilmenge $X^n \subset X$ heißt das *n-Gerüst* oder *n-Skelett* von X . Die Abbildungen

$$\varphi_i^n: S^{n-1} \rightarrow X^{n-1} \hookrightarrow X$$

heißen *Verklebeabbildungen*, die

$$\Phi_i^n: D^n \rightarrow X^n \hookrightarrow X$$

charakteristische Abbildungen. Man nennt $e_i^n = \Phi_i^n(B^n)$ eine (*offene*) *n-Zelle* und $\bar{e}_i^n = \Phi_i^n(D^n)$ eine *abgeschlossene n-Zelle* von X .

Die Buchstaben „CW“ stehen für *closure finite, weak topology*, siehe unten. Man beachte, dass offene Zellen als Teilmengen von X nicht notwendigerweise offen sind. Die Skelette, Zellen und charakteristischen Abbildungen hängen dabei nicht nur vom Raum X , sondern von der konkreten Konstruktion ab. Wir werden trotzdem später salopp von einem CW-Komplex X und seinen Gerüsten, Zellen etc. sprechen, auch wenn wir die genaue Konstruktion nicht immer angeben.

1.107. BEISPIEL. Die folgenden Räume sind CW-Komplexe:

$$\begin{array}{llll} X = S^n & \text{mit} & X^0 = \dots = X^{n-1} = \text{pt}, & X^n = \dots = S^n; \\ & \text{oder mit} & X^j = S^j \quad \text{für } j \leq n, & X^n = \dots = S^n; \\ X = \mathbb{R} & \text{mit} & X^0 = \mathbb{Z}, & X^1 = \dots = \mathbb{R}; \\ X = \mathbb{R}^2 & \text{mit} & X^0 = \mathbb{Z}^2, \quad X^1 = \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, & X^2 = \dots = \mathbb{R}^2; \\ X = \mathbb{R}^n & \text{mit} & X^0 = \mathbb{Z}^n, \quad \dots, & X^n = \dots = \mathbb{R}^n; \end{array}$$

Das erste Beispiel zeigt, dass ein gegebener topologischer Raum auf (viele) verschiedene Weisen als CW-Komplex geschrieben werden kann.

Wir wollen jetzt einige grundlegende Fakten über CW-Komplexe zusammenstellen.

1.108. PROPOSITION. *Es sei $X = \text{colim } X^n$ mit $X^n = X^{n-1} \cup_{\varphi^n} \coprod_{i \in I^n} D^n$ ein CW-Komplex.*

- (1) *Für eine Teilmenge $U \subset X$ sind äquivalent:*
 - (a) *U ist offen (abgeschlossen) in X ,*
 - (b) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $U \cap X^n$ offen (abgeschlossen) in X^n ,*
 - (c) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $i \in I^n$ ist $(\Phi_i^n)^{-1}(U)$ offen (abgeschlossen) in D^n .*
- (2) *Für einen topologischen Raum Y und eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ sind äquivalent:*
 - (a) *f ist stetig,*
 - (b) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $f|_{X^n}: X^n \rightarrow Y$ stetig,*
 - (c) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $i \in I^n$ ist $f \circ \Phi_i^n: D^n \rightarrow Y$ stetig.*
- (3) *Für alle n ist $X^n \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Die CW-Topologie auf X^n stimmt mit der Unterraumtopologie überein.*

BEWEIS. Die erste Äquivalenz in (1) ergibt sich aus der Konstruktion des Kolimes als Quotient der disjunkten Vereinigung aller X^n . Für die zweite Äquivalenz benutzen wir induktiv die Konstruktion des Pushouts.

Eigenschaft (2) folgt analog aus den universellen Eigenschaften des Kolimits und des Pushouts, siehe Folgerungen 1.86 und 1.87.

Zu (3) zeigen wir induktiv, dass X^n abgeschlossene Teilmenge von X^m ist für alle $m \geq n$. Im Induktionsschritt von $m - 1$ auf m beachten wir, dass alle φ_i^m stetig und folglich alle $(\varphi_i^m)^{-1}(X^n)$

in S^{m-1} abgeschlossen sind. Da $S^{m-1} \subset D^m$ abgeschlossen ist, ist folglich auch $(\Phi_i^m)^{-1}(X^n) = (\varphi_i^m)^{-1}(X^n) \subset D^m$ abgeschlossen. Wegen (1) ist X^n in X abgeschlossen.

Eine Teilmenge $A \subset X^n$ ist in der CW-Topologie auf X^n nach (1) genau dann abgeschlossen, wenn $(\Phi_i^\ell)^{-1}(A)$ in D^ℓ abgeschlossen ist für alle $\ell \leq n$ und alle $i \in I^\ell$. Mit dem obigen induktiven Argument folgt, dass $(\Phi_i^\ell)^{-1}(A)$ in D^ℓ abgeschlossen ist für alle $\ell \in \mathbb{N}$ und alle $i \in I^\ell$. Das ist äquivalent dazu, dass A in X abgeschlossen ist, und da X^n in X abgeschlossen ist, auch dazu, dass A in X^n mit der Unterraumtopologie abgeschlossen ist. Die Rückrichtung ist klar. \square

1.109. BEMERKUNG. CW-Komplexe erfüllen nicht automatisch das erste Abzählbarkeitsaxiom (A1) und sind daher auch nicht immer metrisierbar, siehe Beispiel 1.36 (2). Als Beispiel betrachten wir einen CW-Komplex mit 0-Skelett

$$X^0 = \mathbb{N} \dot{\cup} \{*\}.$$

Wir wählen $I^1 = \mathbb{N}$ und definieren Verklebefunktionen

$$\varphi_n^1: \{-1, 1\} \rightarrow X^0 \quad \text{mit} \quad \varphi_n^1(-1) = * \quad \text{und} \quad \varphi_n^1(1) = n.$$

Unser CW-Komplex $X = X^1$ sieht also aus wie ein Stern mit abzählbar vielen Zacken. Äquivalent schreiben wir

$$X = ([-1, 1] \times \mathbb{N}) / \sim,$$

wobei $(-1, m) \sim (-1, n)$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$, während alle anderen Punkte nur zu sich selbst äquivalent sind.

Es sei jetzt $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Umgebungen des Punktes $*$. Für jedes n existiert also $\varepsilon_n > 0$, so dass $[-1, \varepsilon_n - 1] \subset (\Phi_n^1)^{-1}(U_n)$. Wir definieren

$$V = \coprod_{n \in \mathbb{N}} \left[-1, \frac{\varepsilon_n}{2} - 1 \right) / \sim \subset X.$$

Nach Proposition 1.108 (1) ist das eine offene Umgebung von $*$ in X , aber für kein $n \in \mathbb{N}$ gilt $U_n \subset V$. Folglich hat $*$ keine abzählbare Umgebungsbasis.

Da der Raum $[-1, 1] \times \mathbb{N}$ sogar das zweite Abzählbarkeitsaxiom (A2) erfüllt, erhalten wir auch ein Gegenbeispiel zu Bemerkung 1.85 (3). Analog kann man zeigen, dass die CW-Topologie auf X echt feiner ist als die metrische Topologie, bei der wir X als Vereinigung radialer Strecken in einem Vektorraum mit der französischen Eisenbahnmetrik aus Übung 1.114 auffassen.

1.110. SATZ. CW-Komplexe sind normal.

BEWEIS. Sei $X = \text{colim } X^n$ ein CW-Komplex. Zu zeigen ist, dass (T1) und (T4) gelten, und (T1) ist äquivalent dazu, dass Punkte in X abgeschlossen sind.

Sei also $x \in X$. Da $X = \text{colim } X^n$, existiert genau ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $x \in X^{n_0} \setminus X^{n_0-1}$. Da

$$X^{n_0} \setminus X^{n_0-1} = \coprod_{i \in I^{n_0}} e_i^{n_0},$$

liegt x in genau einer Zelle $e_{i_0}^{n_0}$ von X^{n_0} . Also ist $\{x\}$ abgeschlossen in X^{n_0} , und wegen Proposition 1.108 (3) auch in X .

Anstelle von (T4) beweisen wir induktiv die äquivalente Formulierung aus Urysohns Lemma 1.29. Seien dazu $A, B \subset X$ abgeschlossen und disjunkt. Da X^0 diskret ist, können wir mit einer beliebigen Funktion $f^0: X^0 \rightarrow [0, 1]$ starten, so dass $f^0|_{A \cap X^0} \equiv 0$ und $f^0|_{B \cap X^0} \equiv 1$.

Sei $f^{n-1}: X^n \rightarrow [0, 1]$ gegeben, so dass $f^{n-1}|_{A \cap X^{n-1}} \equiv 0$ und $f^{n-1}|_{B \cap X^{n-1}} \equiv 1$. Da für alle $i \in I^n$ die Teilmenge $S^{n-1} \cup (\Phi_i^n)^{-1}(A) \cup (\Phi_i^n)^{-1}(B)$ in D^n abgeschlossen und D^n normal ist, finden wir nach dem Satz 1.32 von Tietze eine stetige Funktion $f_i^n: D^n \rightarrow [0, 1]$, so dass

$$f_i^n|_{S^{n-1}} = f^{n-1} \circ \varphi_i^n, \quad f_i^n|_{(\Phi_i^n)^{-1}(A)} \equiv 0 \quad \text{und} \quad f_i^n|_{(\Phi_i^n)^{-1}(B)} \equiv 1.$$

Die Funktionen f^{n-1} und $\coprod_{i \in I^n} f_i^n$ erfüllen die Verklebebedingung aus Folgerung 1.86 (1), also definieren sie zusammen eine stetige Funktion $f^n: X^n \rightarrow [0, 1]$ mit der gewünschten Eigenschaft.

Schließlich erfüllen die Funktionen $f^n: X^n \rightarrow X$ die analoge Bedingung aus Folgerung 1.87 (1) und definieren daher eine stetige Funktion $f: X \rightarrow [0, 1]$ mit $f|_A \equiv 0$ und $f|_B \equiv 1$. \square

1.111. DEFINITION. Ein *Unterkomplex* Y eines CW-Komplexes X ist ein abgeschlossener Unterraum, der aus einer Vereinigung von Zellen von X besteht. Ein CW-Komplex heißt *endlich*, wenn er aus endlich vielen Zellen besteht.

Da einzelne n -Zellen e_i^n für $n > 0$ selbst nicht abgeschlossen sind, gehören auch alle Zellen, die vom Rand von \bar{e}_i^n getroffen werden, mit zum Unterkomplex. Insbesondere sind Unterkomplexe selbst wieder CW-Komplexe, und man kann sich wie in Proposition 1.108 überzeugen, dass die Unterraumtopologie eines Unterkomplexes $Y \subset X$ mit seiner CW-Komplex-Topologie übereinstimmt, indem man induktiv die CW-Topologie auf Y^n mit der Unterraumtopologie von $Y^n \subset X^n$ vergleicht.

Um einem möglichen Missverständnis vorzubeugen, weisen wir darauf hin, dass der Abschluss einer Zelle e_i^n nicht notwendigerweise ein Unterkomplex von X ist, genausowenig ihr Rand $\partial e_i^n \subset X^{n-1}$ (obwohl das in vielen Beispielen durchaus so sein wird).

1.112. SATZ. *Ein Unterraum A eines CW-Komplexes X ist genau dann kompakt, wenn er abgeschlossenen und in einem endlichen Unterkomplex von X enthalten ist.*

BEWEIS. „ \Leftarrow “: Jede abgeschlossene Zelle $\bar{e}_i^n = \Phi_i^n(D^n)$ ist als Bild einer kompakten Menge in einem Hausdorff-Raum kompakt, siehe Bemerkung 1.59 (2). Ein endlicher Unterkomplex ist eine endliche Vereinigung abgeschlossener Zellen, und daher immer noch kompakt. Eine abgeschlossene Teilmenge eines endlichen Unterkomplexes ist auch in X abgeschlossen und daher nach Bemerkung 1.59 (1) kompakt.

„ \Rightarrow “: Es sei zunächst $B \subset X$ eine Teilmenge, so dass $B \cap e_i^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $i \in I^n$ höchstens einen Punkt enthält. Wir behaupten, dass B in X abgeschlossen ist. Da X^0 ein diskreter Raum ist, ist $B \cap X^0$ in X^0 abgeschlossen. Sei jetzt $B \cap X^{n-1}$ in X^{n-1} abgeschlossen, dann ist für alle $i \in I^n$ auch $(\Phi_i^n)^{-1}(B \cap X^{n-1})$ in D^n abgeschlossen. Da $(\Phi_i^n)^{-1}(B)$ höchstens einen weiteren Punkt enthält, ist auch diese Teilmenge in D^n abgeschlossen. Folglich ist $B \cap X^n$ in X^n abgeschlossen, und damit nach Proposition 1.108 (1) auch B in X . Jede Teilmenge von B ist aus dem gleichen Grund abgeschlossen, also trägt B als Unterraum von X die diskrete Topologie.

Sei jetzt $A \subset X$ kompakt, dann ist A abgeschlossen nach Bemerkung 1.59 (5). Wir wählen eine Teilmenge $B \subset A$, die für jede Zelle e_i^n mit $A \cap e_i^n \neq \emptyset$ genau einen Punkt $b_i^n \in A \cap e_i^n$ enthält. Dann ist B in A abgeschlossen und somit kompakt, und trägt die diskrete Topologie. Da ein diskreter kompakter Raum nur aus endlich vielen Punkten bestehen kann, kann ein kompakter Unterraum nur endlich viele offene Zellen treffen.

Zu zeigen bleibt, dass jede Zelle in einem endlichen Unterkomplex enthalten ist. Für 0-Zellen ist das klar. Induktiv nehmen wir an, dass alle Zellen bis zur Dimension $n - 1$ jeweils in endlichen Unterkomplexen enthalten sind. Der Rand einer n -Zelle e_i^n ist kompakt und trifft somit nur endlich viele Zellen; diese haben Dimension $< n$ und sind somit in endlichen Unterkomplexen enthalten. Also ist e_i^n in einer endlichen Vereinigung endlicher Unterkomplexe mit der Zelle e_i^n enthalten. \square

Aus der Kompaktheit von D^n folgt also insbesondere, dass das Bild \bar{e}_i^n von Φ_i^n nur endlich viele Zellen trifft (daher „closure finite“). Mit „weak topology“ ist die in Proposition 1.108 (1) beschriebene Topologie gemeint. Und für alle $i \in I^n$ ist $\Phi_i^n|_{B^n}: B^n \rightarrow X$ eine Einbettung mit Bild e_i^n . Dadurch lassen sich CW-Komplexe sogar charakterisieren.

1.113. SATZ (ohne Beweis, siehe [H1]). Sei X ein Hausdorff-Raum und $(\Phi_i^n: D^n \rightarrow X)_{n \in \mathbb{N}_0, i \in I^n}$ für jedes n eine Familie stetiger Abbildungen. Dann sind die Abbildungen Φ_i^n genau dann die charakteristischen Abbildungen eines CW-Komplexes auf X , wenn

- (1) die Einschränkungen $\Phi_i^n|_{B^n}$ Einbettungen sind, und X als Menge die disjunkte Vereinigung ihrer Bilder e_i^n ist,
- (2) die Bilder der $\Phi_i^n|_{\partial D^n}$ jeweils nur endlich viele offene Zellen treffen,
- (3) und eine Menge $A \subset X$ genau dann abgeschlossen ist, wenn $(\Phi_i^n)^{-1}(A) \subset D^n$ für alle n und alle $i \in I^n$ abgeschlossen ist.

1.m. Übungen zu Kapitel 1

Übungen zu Abschnitt 1.a.

1.114. ÜBUNG. Die Metrik der französischen Eisenbahnen. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Man setze

$$d_f(x, y) = \begin{cases} \|y - x\| & \text{falls } x \text{ und } y \text{ kollinear, und} \\ \|x\| + \|y\| & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

- (1) (V, d_f) ist ein metrischer Raum.
- (2) Sei $d_n(x, y) = \|y - x\|$ die übliche Metrik. Die Identität $\text{id}_V: (V, d_f) \rightarrow (V, d_n)$ ist stetig, nicht jedoch $\text{id}_V: (V, d_n) \rightarrow (V, d_f)$.

1.115. ÜBUNG. Es seien (X, d) , (Y, d') metrische Räume und $\alpha \in (0, 1]$ gegeben. Eine Abbildung $F: (X, d) \rightarrow (Y, d')$ heißt α -Höldersch, falls eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass für alle $x, y \in X$ gilt:

$$d'(F(x), F(y)) \leq C d(x, y)^\alpha.$$

1-Höldersche Abbildungen heissen auch Lipschitzsch. Zeigen Sie, dass jede α -Höldersche Abbildung stetig ist.

1.116. ÜBUNG. Sei p eine Primzahl. Jede rationale Zahl $q \neq 0$ lässt sich eindeutig schreiben als

$$q = p^r \frac{a}{b},$$

mit $r, a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$, so dass p, a und b paarweise teilerfremd sind. In diesem Fall definieren wir die p -adische Bewertung von q durch $\|q\|_p = p^{-r}$ und $\|0\|_p = 0$. Dadurch wird die p -adische Metrik

$$d_p(x, y) = \|y - x\|_p$$

auf \mathbb{Q} induziert.

- (1) Zeigen Sie, dass d_p wirklich eine Metrik ist, also die Axiome (1)–(3) aus Definition 1.1 erfüllt.
- (2) Zeigen Sie, dass eine verschärfte Dreiecksungleichung gilt:

$$d_p(x, z) \leq \max\{d_p(x, y), d_p(y, z)\},$$

und „ \ll “ kann nur auftreten, wenn $d_p(x, y) = d_p(y, z)$ gilt.

- (3) Folgern Sie daraus: Für alle $x, y \in (\mathbb{Q}, d_p)$ und alle $\varepsilon, \delta > 0$ seien $B_\delta(x)$ und $B_\varepsilon(y)$ metrische Bälle bezüglich d_p , dann sind $B_\delta(x)$ und $B_\varepsilon(y)$ entweder disjunkt, oder einer der beiden Bälle enthält den anderen.

1.117. ÜBUNG. Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei $(x_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in X . Zeigen Sie: die Folge x_i konvergiert genau dann gegen $x \in X$, wenn es zu jeder Umgebung U von x in X ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass $x_i \in U$ für alle $i \geq n_0$.

Übungen zu Abschnitt 1.b.

1.118. ÜBUNG. Sei X eine beliebige Menge, und sei

$$\mathcal{O} = \{ U \subset X \mid X \setminus U \text{ ist eine endliche Menge} \} \cup \{ \emptyset \} \subset \mathcal{P}X .$$

Zeigen Sie, dass \mathcal{O} eine Topologie auf X definiert. Diese Topologie heißt auch die *koendliche Topologie*.

1.119. ÜBUNG. Die folgende Konstruktion ist wichtig in der algebraischen Geometrie. Wir nennen eine Teilmenge $A \subset \mathbb{C}^n$ *Zariski-abgeschlossen*, wenn es eine Menge $P \subset \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ von Polynomen gibt, so dass

$$A = \{ z \in \mathbb{C}^n \mid p(z) = 0 \text{ für alle } p \in P \} . \quad (*)$$

Eine Menge $U \subset \mathbb{C}^n$ heißt *Zariski-offen*, wenn $\mathbb{C}^n \setminus U$ Zariski-abgeschlossen ist. Zeigen Sie, dass die Menge \mathcal{O}_Z aller Zariski-offenen Teilmengen eine Topologie bildet. Diese Topologie heißt auch die *Zariski-Topologie*.

Hinweis: Überlegen Sie sich, dass es äquivalent (und etwas einfacher) ist, zu zeigen: (1) \emptyset und \mathbb{C}^n sind Zariski-abgeschlossen; (2) wenn A_1, \dots, A_k Zariski-abgeschlossen sind, dann auch $A_1 \cup \dots \cup A_k$ (betrachten Sie hierzu geeignete Produkte der definierenden Polynome); (3) wenn alle $A \in \mathcal{A} \subset \mathcal{P}\mathbb{C}^n$ Zariski-abgeschlossen sind, dann auch

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A .$$

Bemerkung: Aus dem Hilbertschen Basissatz folgt, dass man für jedes A nur jeweils endlich viele Polynome braucht, um A wie in (*) zu definieren.

1.120. ÜBUNG. Seien X und Y beliebige Mengen. Zeigen Sie:

- (1) Sei $\mathcal{O}_\delta = \mathcal{P}X$ die diskrete Topologie, und sei $\mathcal{O}_K = \{ \emptyset, Y \}$ die Klumpentopologie. Dann sind für jeden beliebigen topologischen Raum (Z, \mathcal{O}) alle Abbildungen $F: (X, \mathcal{O}_\delta) \rightarrow (Z, \mathcal{O})$ und alle Abbildungen $G: (Z, \mathcal{O}) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_K)$ stetig.
- (2) Seien $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y$ beliebige Topologien auf X und Y . Falls für jeden beliebigen topologischen Raum (Z, \mathcal{O}) alle Abbildungen $F: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Z, \mathcal{O})$ und alle Abbildungen $G: (Z, \mathcal{O}) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ stetig sind, dann ist $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_\delta$ die diskrete und $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_K$ die Klumpentopologie.

1.121. ÜBUNG. Es sei $F: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Wir nennen F *stetig am Punkt* $x \in X$ genau dann, wenn für jede Umgebung $V \subset Y$ von $F(x)$ das Urbild $F^{-1}(V) \subset X$ eine Umgebung von x ist.

- (1) Zeigen Sie, dass F genau stetig ist, wenn F an jedem Punkt $x \in X$ stetig ist.
- (2) Es seien d, d' Metriken auf X beziehungsweise Y , so dass $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_d$ und $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_{d'}$. Zeigen Sie, dass die obige Definition zu Definition 1.3 äquivalent ist.

Übungen zu Abschnitt 1.c.

1.122. ÜBUNG. Sei (X, d) ein metrischer Raum, und seien A, A_0 und A_1 abgeschlossene Teilmengen von X , und A_0 und A_1 seien disjunkt. Zeigen Sie:

- (1) die Funktion $d_A: X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $d_A(x) = \inf_{a \in A} d(a, x)$ ist stetig;
- (2) es gilt $d_A(x) = 0$ genau dann, wenn $x \in A$;
- (3) die Funktion $f = d_{A_0}/(d_{A_0} + d_{A_1})$ hat die in Satz 1.25 (3) geforderten Eigenschaften.

1.123. ÜBUNG. Sei X eine Menge mit mindestens zwei Elementen, und sei \mathcal{O}_K die Klumpentopologie auf X . Welche Trennungseigenschaften besitzt (X, \mathcal{O}_K) ?

1.124. ÜBUNG. Es sei X eine unendliche Menge mit der koendlichen Topologie \mathcal{O} aus Aufgabe 1.118. Welche Trennungseigenschaften besitzt (X, \mathcal{O}) ?

1.125. ÜBUNG. Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{N}$ heiße offen bezüglich der Topologie $\mathcal{O}_<$, wenn aus $m \in U$ auch $n \in U$ für alle $n \geq m$ folgt.

- (1) berprfen Sie, dass $\mathcal{O}_<$ die Axiome einer Topologie erfüllt.
- (2) Welche Trennungseigenschaften hat $(\mathbb{N}, \mathcal{O}_<)$?

1.126. ÜBUNG. Zeigen Sie:

- (1) die Zariski-Topologie \mathcal{O}_Z auf \mathbb{C}^n ist für kein $n \geq 1$ hausdorffsch, erfüllt aber (T1).
- (2) Jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ definiert eine stetige Abbildung $p: (\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_Z) \rightarrow (\mathbb{C}, \mathcal{O}_Z)$.
- (3) Versuchen Sie zu erklären, warum (2) nicht Bemerkung 1.27 (2) widerspricht.

Hinweis: Um (1) zu beweisen, überlegen Sie sich, dass für alle Polynome p gilt:

- (1) wenn $p(x) \neq 0$, dann existiert ein kleiner metrischer Ball $B_\varepsilon(x)$, auf dem p nirgends verschwindet.
- (2) wenn p auf einem kleinen metrischen Ball verschwindet, dann verschwindet es auf ganz \mathbb{C}^n .

Übungen zu Abschnitt 1.d.

1.127. ÜBUNG. Betrachte den Raum $X = [0, 1]^2$ mit

$$d((x_1, y_1)(x_2, y_2)) = \begin{cases} |y_2 - y_1| & \text{falls } x_1 = x_2, \text{ und} \\ 1 & \text{falls } x_1 \neq x_2. \end{cases}$$

- (1) Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf X ist.
- (2) Welche Abzählbarkeitseigenschaften erfüllt (X, \mathcal{O}_d) ?

1.128. ÜBUNG. Es sei \mathcal{S} eine Subbasis der Topologie \mathcal{O}_Y auf einer Menge Y . Zeigen Sie:

- (1) Eine Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in Y konvergiert genau dann gegen einen Punkt $y \in Y$, wenn für alle $S \in \mathcal{S}$ mit $y \in S$ ein $i_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x_i \in S$ für alle $i \geq i_0$.
- (2) Eine Abbildung $f: (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ ist genau dann stetig, wenn für alle $S \in \mathcal{S}$ das Urbild $f^{-1}(S)$ in X offen ist.

Übungen zu Abschnitt 1.e.

1.129. ÜBUNG. Es sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass X genau dann ein Hausdorff-Raum ist, wenn jeder Filter auf X höchstens einen Grenzwert hat.

1.130. ÜBUNG. Sei $(x_n)_n$ eine Folge in X und \mathcal{F} der von ihr induzierte Filter gemäß Beispiel 1.43 (4). Zeigen Sie:

- (1) Der Filter \mathcal{F} konvergiert genau dann gegen $x \in X$, wenn die Folge $(x_n)_n$ gegen x konvergiert.
- (2) Der Punkt $x \in X$ ist genau dann ein Häufungspunkt von \mathcal{F} , wenn er ein Häufungspunkt von $(x_n)_n$ ist.

1.131. ÜBUNG. Beweisen Sie Bemerkung 1.47.

1.132. ÜBUNG. Betrachte

$$\mathcal{F} = \{ U \subset \mathbb{R} \mid \text{es gibt } \delta > 0, \text{ so dass } (0, \delta) \subset U \} \subset \mathcal{P}\mathbb{R}.$$

- (1) Zeigen Sie, dass \mathcal{F} ein freier Filter auf \mathbb{R} ist.
- (2) Konvergiert \mathcal{F} in der Standardtopologie auf \mathbb{R} , und wenn ja, gegen welchen Grenzwert?
- (3) Sei jetzt $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Abbildung. Übersetzen Sie die Aussage „ $f\mathcal{F}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$ “ in die Sprache der Analysis I.

Übungen zu Abschnitt 1.f.

1.133. ÜBUNG. Sei (X, d_X) ein metrischer Raum mit Topologie \mathcal{O}_{d_X} , und sei $Y \subset X$ versehen mit der induzierten Metrik $d_Y = d|_{Y \times Y}$. Zeigen Sie, dass die von \mathcal{O}_{d_X} induzierte Unterraumtopologie \mathcal{O}_Y mit der metrischen Topologie \mathcal{O}_{d_Y} übereinstimmt.

1.134. ÜBUNG. Manchmal möchte man Funktionen durch Fallunterscheidung definieren und sicherstellen, dass die so definierte Funktion auf dem ganzen Definitionsbereich stetig ist. Dazu seien (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume, und $A_1, \dots, A_k \subset X$ abgeschlossene Teilmengen mit $X = A_1 \cup \dots \cup A_k$. Es sei $f: X \rightarrow Y$ gegeben, so dass $f|_{A_i}: A_i \rightarrow Y$ für alle $i = 1, \dots, k$ stetig ist bezüglich der Unterraumtopologie auf A_i . Zeigen Sie, dass dann $f: X \rightarrow Y$ ebenfalls stetig ist.

1.135. ÜBUNG. Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume, dann definieren wir eine Metrik $d_{X \times Y}$ auf dem kartesischen Produkt $X \times Y$ durch

$$d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}.$$

Zeigen Sie, dass die von \mathcal{O}_{d_X} und \mathcal{O}_{d_Y} induzierte Produkttopologie mit der metrischen Topologie $\mathcal{O}_{d_{X \times Y}}$ übereinstimmt.

1.136. ÜBUNG. Zeigen Sie: ein topologischer Raum X ist genau dann Hausdorff, wenn die Diagonale

$$\Delta X = \{ (x, x) \in X \times X \mid x \in X \}$$

als Teilmenge des Produktes $X \times X$ abgeschlossen ist.

1.137. ÜBUNG. Wir versehen \mathbb{R}, \mathbb{R}^2 und alle Unterräume mit der Standardtopologie. Welche der folgenden Abbildungen sind Einbettungen:

$$F: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2 \qquad F(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), \qquad (a)$$

$$G: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2 \qquad G(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t). \qquad (b)$$

$$H: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \qquad H(n) = \begin{cases} 0 & n = 0, \\ 1/n & \text{sonst.} \end{cases} \qquad (c)$$

1.138. ÜBUNG. Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine überabzählbare Familie topologischer (T1)-Räume mit jeweils mehr als einem Punkt für alle $i \in I$. Zeigen Sie: dann besitzt $\prod_i (X_i, \mathcal{O}_i)$ nicht die erste Abzählbarkeitseigenschaft.

1.139. ÜBUNG. Es sei X eine Menge und $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie von *Halbmetriken*, das heißt, $d_n: X \times X \rightarrow [0, \infty]$ erfüllt die Axiome (2) und (3) aus Definition 1.1 sowie $d_n(x, x) = 0$ für alle $x \in X$. Außerdem existiere zu $x, y \in X$ mit $x \neq y$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $d_n(x, y) > 0$. Dann definieren wir $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ durch

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n} d_n(x, y)}{1 + d_n(x, y)},$$

wobei wir $\frac{2^{-n} \cdot \infty}{1 + \infty} = 2^{-n}$ setzen. Zeigen Sie:

- (1) Für jedes n erfüllt $(x, y) \mapsto \frac{d_n(x, y)}{1 + d_n(x, y)}$ wieder die Dreiecksungleichung.
- (2) Die Abbildung d ist eine Metrik auf X .
- (3) Eine Basis der Topologie \mathcal{O}_d auf X wird gegeben durch

$$\mathcal{B} = \{ B_{0, \varepsilon}(x) \cap \dots \cap B_{n, \varepsilon}(x) \mid x \in X, n \in \mathbb{N} \text{ und } \varepsilon > 0 \},$$

$$\text{wobei } B_{k, \varepsilon}(x) = \{ y \in X \mid d_k(x, y) < \varepsilon \}.$$

(4) Eine Subbasis der Topologie \mathcal{O}_d auf X wird gegeben durch

$$\mathcal{S} = \{ B_{n,\varepsilon}(x) \mid x \in X, n \in \mathbb{N} \text{ und } \varepsilon > 0 \}.$$

(5) Das topologische Produkt abzählbar vieler metrischer Räume ist metrisierbar.

1.140. ÜBUNG. Es sei I eine Menge und X ein topologischer Raum. Wir identifizieren $\text{Abb}(I, X)$ mit $\prod_{i \in I} X$ so, dass

$$\text{Abb}(I, X) \ni (f: I \rightarrow X) \mapsto (f(i))_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X.$$

Zeigen Sie:

(1) Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\text{Abb}(I, X)$ konvergiert genau dann bezüglich der Produkttopologie gegen eine Abbildung $f: I \rightarrow X$, wenn sie punktweise konvergiert, das heißt, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(i) = f(i) \quad \text{für alle } i \in I.$$

(2) Sei X jetzt ein (T1)-Raum. Die obige Folge konvergiert genau dann bezüglich der Box-Topologie, wenn sie punktweise konvergiert und zusätzlich eine endliche Teilmenge $I_0 \subset I$ und eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass

$$f_n(i) = f(i) \quad \text{für alle } n \geq n_0 \text{ und alle } i \in I \setminus I_0.$$

Falls X ein metrischer Raum ist, ist die Box-Topologie für unendliche I sogar wesentlich feiner als die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz.

Übungen zu Abschnitt 1.g.

1.141. ÜBUNG. Seien (X, \mathcal{O}) , (Y, \mathcal{O}) Hausdorff-Räume, X sei kompakt, und sei $F: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass dann auch $F(X) \subset Y$, versehen mit der Unterraumtopologie, kompakt ist.

1.142. ÜBUNG. Zeigen Sie: kompakte Räume sind normal, erfüllen also insbesondere (T4). Dazu zeigt am besten zuerst, dass kompakte Räume (T3) erfüllen.

Hinweis: Per Definitionem sind kompakte Räume Hausdorffsch.

1.143. ÜBUNG. Zeigen Sie, dass offene Teilmengen kompakter Räume lokalkompakt sind.

1.144. ÜBUNG. Wir betrachten den Raum \mathbb{R}^n .

(1) Zeigen Sie beispielsweise mit Hilfe der stereographischen Projektion, dass S^n homöomorph zur Alexandroff-Kompaktifizierung des \mathbb{R}^n ist.

(2) Finden Sie eine Kompaktifizierung $\iota \mathbb{R}^n \hookrightarrow K$ des \mathbb{R}^n , so dass $K \setminus \text{im } \iota$ mehr als einen Punkt enthält.

1.145. ÜBUNG. Es sei $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem topologischen Raum X . Zeigen Sie, dass sich $x_\bullet: \mathbb{N} \rightarrow X$ genau dann stetig auf $\mathbb{N}' = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit $\infty \mapsto x_\infty$ fortsetzen lässt, wenn die Folge (x_i) gegen x_∞ konvergiert.

Übungen zu Abschnitt 1.h.

1.146. ÜBUNG. Es seien X, Y quasikompakt, und \mathcal{U} sei eine offene Überdeckung von $X \times Y$. Zeigen Sie:

(1) Zu jedem Punkt $x \in X$ existiert eine Umgebung U_x von x , so dass $U_x \times Y$ von endlich vielen Elementen aus \mathcal{U} überdeckt wird.

(2) Es existiert eine endliche Teilüberdeckung von \mathcal{U} .

1.147. ÜBUNG. Es bezeichne ℓ^∞ den Raum der beschränkten Folgen in \mathbb{R} . Zeigen Sie:

- (1) Die Einschränkungabbildung $r: C(\beta\mathbb{N}, \mathbb{R}) \rightarrow \ell^\infty$ ist bijektiv.
- (2) Wir versehen ℓ^∞ und $C(\beta\mathbb{N}, \mathbb{R})$ jeweils mit der Supremumsmetrik. Dann ist r eine Isometrie.

1.148. ÜBUNG. Wir betrachten den Raum $X = \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^2$, versehen mit der Topologie zur Basis

$$\mathcal{B} = \left\{ B_r(p) \mid p \in B_1(0) \text{ und } 0 < r \leq 1 - \|p\| \right\} \\ \cup \left\{ B_r((1-r)p) \cup \{p\} \mid p \in S^1 \subset X \text{ und } 0 < r < 1 \right\}.$$

Zeigen Sie:

- (1) Für alle $p \in S^1 \subset X$ ist die Funktion $f_p: X \rightarrow [-1, 1]$ mit

$$f_p(q) = \begin{cases} 1 & \text{für } q = p \text{ und} \\ \frac{\langle q, q-p \rangle}{\langle p, q-p \rangle} & \text{für } q \neq p \end{cases}$$

stetig auf X und erfüllt $\langle q-p, q-f_p(q)p \rangle = 0$. Sie nimmt für alle $r \in (0, 1]$ auf dem Kreis mit Radius r um $(1-r)p$ den Wert $1-2r$ an, außer im Punkt p .

- (2) Der Raum X ist vollständig regulär.
- (3) Der Raum X hat eine abzählbare dichte Teilmenge $Q = B_1(0) \cap \mathbb{Q}^2$ und erfüllt (A1), aber nicht (A2).
- (4) Der Raum X ist nicht normal.
- (5) Lässt sich X in einen normalen Raum einbetten?

Hinweis: Benutzen Sie in (1) den Satz des Thales. Zeigen Sie zu (4), dass jede reellwertige Funktion auf dem abgeschlossenen Unterraum $S^1 \subset X$ stetig ist, sich aber nicht alle diese Funktionen stetig auf X fortsetzen lassen. Sie dürfen verwenden, dass $\text{Abb}(S^1, \mathbb{R})$ eine größere Kardinalität hat als $\text{Abb}(Q, \mathbb{R})$.

Übungen zu Abschnitt 1.i.

1.149. ÜBUNG. Betrachten Sie den Raum $X = [0, 1]^2$ mit der Topologie aus Übung 1.127.

- (1) Geben Sie einen Homöomorphismus $X \rightarrow \prod_{i \in [0, 1]} [0, 1]$ an.
- (2) Geben Sie einen Homöomorphismus zu einem nichttrivialen topologischen Produkt an.

1.150. ÜBUNG. Sei \mathbb{k} ein beliebiger Körper. Es seien V_i Vektorräume über \mathbb{k} für $i \in I$. Wir betrachten die direkte Summe und das

$$\bigoplus_{i \in I} V_i := \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in V_i \text{ für alle } i \in I, \text{ fast alle } x_i = 0\} \\ \subset \prod_{i \in I} V_i := \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in V_i \text{ für alle } i \in I\}.$$

Zeigen Sie:

- (1) Die direkte Summe ist ein Koproduct in $\text{Vec}_{\mathbb{k}}$.
- (2) Das direkte Produkt ist ein Produkt in $\text{Vec}_{\mathbb{k}}$.
- (3) Für die Dualräume gilt

$$\left(\bigoplus_{i \in I} V_i \right)^* = \prod_{i \in I} V_i^*.$$

1.151. ÜBUNG. Seien (X, \mathcal{O}_X) , (Y, \mathcal{O}_Y) und (Z, \mathcal{O}_Z) topologische Räume mit stetigen Abbildungen

$$(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{g} (Z, \mathcal{O}_Z).$$

- (1) Falls \mathcal{O}_Y die von g und \mathcal{O}_Z induzierte Topologie ist, und \mathcal{O}_X die von f und \mathcal{O}_Y induzierte Topologie ist, dann ist \mathcal{O}_X auch gleich der von $g \circ f$ und \mathcal{O}_Z induzierten Topologie.
- (2) Falls \mathcal{O}_Y die von f und \mathcal{O}_X koinduzierte Topologie ist, und \mathcal{O}_Z die von g und \mathcal{O}_Y koinduzierte Topologie ist, dann ist \mathcal{O}_Z auch gleich der von $g \circ f$ und \mathcal{O}_X koinduzierten Topologie.

1.152. ÜBUNG. Führen Sie den Beweis von Satz 1.83 (2) aus.

1.153. ÜBUNG. Seien (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) topologische Räume, sei $V \subset Y$, und sei $f: V \rightarrow X$ stetig bezüglich der Unterraumtopologie auf V . Zeigen Sie:

- (1) die Topologie \mathcal{O}_X ist genau die von der Verklebungstopologie auf $X \subset X \cup_f Y$ induzierte Unterraumtopologie;
- (2) wenn V abgeschlossen ist und X und Y beide (T1) erfüllen, dann gilt (T1) auch für $X \cup_f Y$.

1.154. ÜBUNG. Sei $S^1 \subset \mathbb{C}$ der komplexe Einheitskreis, und sei $z = e^{i\varphi} \in S^1 \subset \mathbb{C}$. Wir betrachten auf S^1 die von $x \sim zx$ erzeugte Äquivalenzrelation, das heißt, $x \sim y$ genau dann, wenn $x/y = z^k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Bestimmen Sie die Quotiententopologie auf S^1/\sim , unterscheiden Sie die Fälle $\varphi \in 2\pi\mathbb{Q}$ und $\varphi \notin 2\pi\mathbb{Q}$.

1.155. ÜBUNG. Betrachten Sie auf \mathbb{R}^2 die Äquivalenzrelation

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \iff (y_1, y_2) = \left(rx_1, \frac{x_2}{r} \right) \text{ für ein } r \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

- (1) Skizzieren Sie die Äquivalenzklassen im \mathbb{R}^2 .
- (2) Skizzieren Sie $X = \mathbb{R}^2/\sim$.
- (3) Beschreiben Sie die Quotiententopologie auf X , zum Beispiel durch Angabe einer Basis.

1.156. ÜBUNG. Betrachten Sie die in Aufgabe 1.155 definierte Äquivalenzrelation \sim auf \mathbb{R}^2 . Sei wie vorhin $X = \mathbb{R}^2/\sim$, sei $Y = (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})/\sim$ und $Z = (\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R}))/\sim$.

- (1) Welche der Trennungseigenschaften (T0), (T1), (T3), (T4) erfüllt X ?
- (2) Zeigen Sie, dass Y zum Raum aus Beispiel 1.28 homöomorph ist.
- (3) Zu welchem bekannten Raum ist Z homöomorph?

1.157. ÜBUNG. Sei (X, \mathcal{O}_X) ein normaler topologischer Raum, sei $f: X \rightarrow Y$ eine surjektive Abbildung, und sei \mathcal{O}_Y die Quotiententopologie auf Y . Zeigen Sie:

- (1) wenn Urbilder $f^{-1}(\{y\})$ von Punkten in Y abgeschlossen sind in X , gilt (T1) für (Y, \mathcal{O}_Y) ;
- (2) wenn f abgeschlossen ist, das heißt, wenn $f(A) \subset Y$ abgeschlossen ist für alle abgeschlossenen $A \subset X$, dann gilt (T4) für (Y, \mathcal{O}_Y) .

Wir haben also ein einfaches Kriterium dafür, wann Quotienten normaler Räume wiederum normal sind.

Übungen zu Abschnitt 1.j.

1.158. ÜBUNG. Zeigen Sie: ein topologischer Raum ist genau dann zusammenhängend, wenn er nicht zur disjunkten Vereinigung zweier nicht leerer topologischer Räume homöomorph ist.

1.159. ÜBUNG. Sei

$$X = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \mid x \neq 0 \right\} \cup (\{0\} \times [-1, 1]) \subset \mathbb{R}^2$$

versehen mit der von $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^2}$ induzierten Unterraumtopologie.

- (1) Skizzieren Sie X .
- (2) Zeigen Sie, dass X zusammenhängend ist.

(3) Bestimmen Sie die Wegzusammenhangskomponenten von X .

1.160. ÜBUNG. Zeigen Sie:

- (1) Der Raum der rationalen Zahlen \mathbb{Q} ist total unzusammenhängend sowohl bezüglich der metrischen Topologie als auch bezüglich der p -adischen Topologien für alle Primzahlen p .
- (2) Der Raum $(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_Z)$ ist zusammenhängend.

1.161. ÜBUNG. Sei $(X_i, \mathcal{O}_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie topologischer Räume und $X = \prod_i (X_i, \mathcal{O}_i)$ ihr Produkt. Zeigen Sie, dass die Wegzusammenhangskomponente eines Punktes $(x_i)_{i \in I} \in X$ das Produkt der Wegzusammenhangskomponenten der Punkte $x_i \in X_i$ ist. Falls alle X_i nicht leer sind, ist insbesondere X genau dann wegzusammenhängend, wenn alle X_i wegzusammenhängend sind.

Übungen zu Abschnitt 1.k.

1.162. ÜBUNG. Beweisen Sie Proposition 1.98.

1.163. ÜBUNG. Es sei X ein Hausdorff-Raum und (Y, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie: Dann konvergiert eine Folge $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $C(X, Y)$ genau dann in der kompakt-offenen Topologie gegen $f \in C(X, Y)$, wenn (f_i) gleichmäßig auf Kompakta gegen f konvergiert.

1.164. ÜBUNG. Es sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer und (Y, d_Y) ein metrischer Raum. Wir nehmen an, dass es Kompakta $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in X gibt, so dass

$$K_i \subset \overset{\circ}{K}_{i+1} \text{ für alle } i \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad X = \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i .$$

Zeigen Sie:

- (1) Durch

$$d_i(f, g) = \sup_{x \in K_i} d_Y(f(x), g(x))$$

wird eine Folge von Halbmetriken auf $C(X, Y)$ definiert, so dass für alle $f \neq g: X \rightarrow Y$ ein $i \in \mathbb{N}$ mit $d_i(f, g) \neq 0$ existiert.

- (2) Die Konstruktion aus Übung 1.139 liefert eine Metrik d auf $C(X, Y)$, die die kompakt-offene Topologie induziert.

1.165. ÜBUNG. Formulieren und beweisen Sie ein topologisches Analogon des „anderen Exponentialgesetzes“ $x^{y+z} = x^y \cdot x^z$.

1.166. ÜBUNG. Es sei X ein topologischer Raum, $f: X \rightarrow Y$ sei surjektiv, und Y trage die Quotiententopologie. Es sei außerdem Z ein lokalkompakter topologischer Raum. Wir bezeichnen die Produkttopologie mit \mathcal{O}_{\square} und die Quotiententopologie auf $Y \times Z$ zur Abbildung $f \times \text{id}_Z: X \times Z \rightarrow Y \times Z$ mit \mathcal{O}_{fin} . Beweisen Sie, dass die folgenden Abbildungen stetig sind:

$$\text{id}_{Y \times Z}: (Y \times Z, \mathcal{O}_{\text{fin}}) \rightarrow (Y \times Z, \mathcal{O}_{\square}), \tag{1}$$

$$\text{id}_{Y \times Z}: (Y \times Z, \mathcal{O}_{\square}) \rightarrow (Y \times Z, \mathcal{O}_{\text{fin}}). \tag{2}$$

Hinweis zu (2): betrachten Sie das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{in}} & C(Z, (X \times Z, \mathcal{O}_{\square})) \\ f \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & C(Z, (Y \times Z, \mathcal{O}_{\text{fin}})) \end{array}$$

und benutzen Sie das Exponentialgesetz 1.101 (2).

Übungen zu Abschnitt 1.1.

1.167. ÜBUNG. Sei $\mathbb{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder \mathbb{H} ein (Schief-)Körper, und sei $k = 1, 2$ oder $4 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{k}$, dann sei

$$(\mathbb{k}P^n, \mathcal{O}_{\mathbb{k}P^n}) = (\mathbb{k}^{n+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}) / \sim,$$

wobei $(x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n)$ genau dann, wenn es ein $z \in \mathbb{k}^\times = \mathbb{k} \setminus \{0\}$ gibt, so dass $y_i = zx_i$ für alle $i = 0, \dots, n$. Die Äquivalenzklasse von (x_0, \dots, x_n) wird auch als $[x_0 : \dots : x_n]$ geschrieben. Zeigen Sie, dass $\mathbb{k}P^n$, versehen mit der Quotiententopologie, eine kn -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist. Zeigen Sie dazu, dass $\mathbb{k}P^n$ die Eigenschaften (T2) und (A2) besitzt, und konstruieren Sie Homöomorphismen von $U_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \mid x_i \neq 0\} \subset \mathbb{k}P^n$ nach $\mathbb{k}^n \cong \mathbb{R}^{nk}$.

1.168. ÜBUNG. Es sei $\mathbb{k}P^n$ wie oben definiert und $k = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{k}$. Die Abbildung

$$H_{\mathbb{k}}^n: S^{k(n+1)-1} \longrightarrow \mathbb{k}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{q_n} \mathbb{k}P^n$$

heißt *Hopffaserung*. Die Abbildung q_n ist die Quotientenabbildung, und wir schreiben

$$q_n(z_0, \dots, z_n) = [z_0 : \dots : z_n].$$

Zeigen Sie:

- (1) Für einen quasikompakten Raum X und einen Hausdorffraum Y ist jede stetige Bijektion $F: X \rightarrow Y$ ein Homöomorphismus.
- (2) Die Abbildungen

$$\mathbb{k}P^n \ni [z_0 : \dots : z_n] \longmapsto [z_0 : \dots : z_n : 0] \in \mathbb{k}P^{n+1}$$

$$\text{und } D^{k(n+1)} \ni (z_0, \dots, z_n) \longmapsto [z_0 : \dots : z_n : \sqrt{1 - |z|^2}] \in \mathbb{k}P^{n+1}$$

mit $D^{k(n+1)} = \{z \in \mathbb{k}^{n+1} \mid |z| \leq 1\}$ sind stetig.

- (3) Der Raum $\mathbb{k}P^n \cup_{H_{\mathbb{k}}^n} D^{k(n+1)}$ ist homöomorph zu $\mathbb{k}P^{n+1}$.
- (4) Der projektive Raum $\mathbb{k}P^n$ lässt sich als CW-Komplex schreiben.

1.169. ÜBUNG. Wir definieren

$$\mathbb{k}P^\infty = \text{colim } \mathbb{k}P^n.$$

Sei \mathbb{k}^∞ der Vektorraum der endlichen \mathbb{k} -wertigen Folgen, und sei

$$Q = (\mathbb{k}^\infty \setminus \{0\}) / \sim \quad \text{mit „}\sim\text{“ wie oben.}$$

Zeigen Sie:

- (1) die natürliche Abbildung $F: \mathbb{k}P^\infty \rightarrow Q$ ist bijektiv;
- (2) sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf \mathbb{k}^∞ und sei \mathcal{O}_Q die dazugehörige Quotiententopologie auf Q , dann ist F stetig;
- (3) (*Zusatzaufgabe*) die Umkehrabbildung F^{-1} ist für keine Norm $\|\cdot\|$ auf \mathbb{k}^∞ stetig.

Fundamentalgruppe und Überlagerungen

Wir behandeln in diesem Kapitel die Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes. Diese Gruppe lässt sich für geeignete topologische Räume X auf zweierlei Art definieren:

- (1) Als Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ der Homotopieklassen von Wegen $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ mit festem Anfangs- und Endpunkt $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0 \in X$, oder
- (2) Als Gruppe Γ , die auf einem einfach zusammenhängenden Raum \tilde{X} wirkt, mit $X \cong \tilde{X}/\Gamma$.

2.1. BEISPIEL. Sei $X = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und sei $p = 1$.

- (1) Wir beschränken uns im folgenden auf stückweise glatte Wege. Sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg mit $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$, dann erhalten wir die Umlaufzahl

$$\nu(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)} dt \in \mathbb{Z}.$$

In der Tat werden wir zeigen, dass je zwei Wege in \mathbb{C}^* mit Anfangs- und Endpunkt $p = 1$ und der gleichen Umlaufzahl um 0 in \mathbb{C}^* (mit festgehaltenen Anfangs- und Endpunkten) homotop sind. Also ist $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \cong \mathbb{Z}$.

- (2) Betrachte die (leicht modifizierte) Exponentialabbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ mit $z \mapsto e^{2\pi i z}$, dann gilt

$$e^{2\pi i z_0} = e^{2\pi i z_1} \iff z_1 - z_0 \in \mathbb{Z}.$$

Wir können also \mathbb{C}^* als Quotient des einfach zusammenhängenden Raumes \mathbb{C} nach der Gruppe $\Gamma = \mathbb{Z}$ schreiben; dabei wirkt \mathbb{Z} auf \mathbb{C} durch Addition, geometrisch also durch Verschiebungen.

Wir wollen ab sofort (sofern nicht anders angegeben) unter einem Raum immer einen topologischen Raum verstehen, und unter einer Abbildung, einer Funktion oder einem Weg immer eine stetige Abbildung, eine stetige Funktion, oder einen stetigen Weg.

2.a. Homotopien und Homotopieäquivalenz

In diesem Abschnitt führen wir den Begriff der Homotopie von Abbildungen ein. Wir dürfen uns Homotopien als Wege im Raum der Abbildungen vorstellen. Indem wir statt stetiger Abbildungen Äquivalenzklassen homotoper stetiger Abbildungen betrachten, können wir den Begriff des Homöomorphismus durch den wesentlich größeren Begriff der Homotopieäquivalenz ersetzen. Im Rest dieser Vorlesung lernen wir Methoden kennen, um nicht homotope Abbildungen oder nicht homotopieäquivalente Räume voneinander zu unterscheiden.

Ab sofort geben wir die Topologien nicht mehr an, wenn es nicht unbedingt nötig ist. Falls nicht anders angegeben, seien Abbildungen zwischen topologischen Räumen immer stetig.

2.2. DEFINITION. Seien X, Y topologische Räume. Zwei Abbildungen $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ heißen *homotop*, kurz $f_0 \sim f_1$, wenn es eine bezüglich der Produkttopologie stetige Abbildung $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ mit $H(x, t) = f_t(x)$ für $t \in [0, 1]$ gibt. Dann heißt H eine *Homotopie* zwischen f_0 und f_1 , und wir schreiben $H_t = H(\cdot, t): X \cong X \times \{t\} \rightarrow Y$ für alle $t \in [0, 1]$. Die Menge aller zu f homotopen Abbildungen heißt die (*freie*) *Homotopieklasse* von f und wird mit $[f]$ bezeichnet.

2.3. BEMERKUNG. (1) Homotopie ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Abbildungen von einem Raum in einen anderen (Übung 2.72), und ihre Äquivalenzklassen sind gerade Homotopieklassen.

(2) Homotopie ist verträglich mit Hintereinanderschalten von Abbildungen:

$$(f_0 \sim f_1: Y \rightarrow Z \quad \text{und} \quad g_0 \sim g_1: X \rightarrow Y) \quad \implies \quad (f_0 \circ g_0) \sim (f_1 \circ g_1): X \rightarrow Z .$$

2.4. DEFINITION. Seien X, Y topologische Räume. Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt *Homotopieäquivalenz*, wenn es eine stetige Abbildung $g: Y \rightarrow X$ gibt, so dass

$$g \circ f \sim \text{id}_X: X \rightarrow X \quad \text{und} \quad f \circ g \sim \text{id}_Y: Y \rightarrow Y .$$

In diesem Fall heißen X und Y *homotopieäquivalent*, und g heißt ein *Homotopieinverses* zu f .

Ein Raum X heißt *zusammenziehbar*, wenn er zu einem einpunktigen Raum homotopieäquivalent ist.

Die Räume $B^n \subset D^n \subset \mathbb{R}^n$ sind zusammenziehbar. Allgemeiner sind auch sternförmige Teilmengen von \mathbb{R}^n zusammenziehbar. Es gibt aber noch weitere Beispiele, siehe Beispiel 2.11.

2.5. BEMERKUNG. (1) Jeder Homöomorphismus f ist insbesondere eine Homotopieäquivalenz mit $g = f^{-1}$.

(2) Homotopieäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation auf der Klasse der topologischen Räume (Übung 2.73).

(3) Betrachte die (naive) *Homotopie-Kategorie* \mathcal{HTop} mit den gleichen Objekten wie die Kategorie \mathcal{Top} aus Beispiel 1.20 (4) und den Morphismen

$$\text{Hom}_{\mathcal{HTop}}(X, Y) = C(X, Y) / \sim .$$

Die Identität auf X im Sinne von Definition 1.19 (3) ist die Homotopieklasse $[\text{id}_X]$ der Abbildung id_X . Die Verkettung von Homotopieklassen ist nach Bemerkung 2.3 (2) wohldefiniert.

Ein Morphismus $f: X \rightarrow Y$ in einer Kategorie \mathcal{C} heißt invertierbar oder *Isomorphismus*, wenn es einen Morphismus $g: Y \rightarrow X$ (ein *Inverses*) gibt, so dass

$$g \circ f = \text{id}_X \quad \text{und} \quad f \circ g = \text{id}_Y .$$

Wenn ein Inverses existiert, ist es eindeutig (Übung?). Beispiele sind Bijektionen in \mathcal{Set} , Gruppenisomorphismen in \mathcal{Grp} , lineare Isomorphismen in $\mathcal{Vec}_{\mathbb{K}}$, und natürlich Homöomorphismen in \mathcal{Top} . Nach obiger Definition sind Homotopieäquivalenzen gerade die Isomorphismen in \mathcal{HTop} .

Algebraische Topologie versucht unter anderem, gewisse Klassen von Räumen bis auf Homotopie-Äquivalenz zu unterscheiden.

Oftmals ist freie Homotopie ein etwas zu grober Begriff. Beispielsweise ist ein Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ immer homotop zur konstanten Abbildung auf seinen Anfangspunkt.

2.6. DEFINITION. Ein *Paar topologischer Räume*, kurz *Paar*, besteht aus einem topologischen Raum X und einer beliebigen Teilmenge $A \subset X$. Eine *Abbildung* $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ von *Paaren* ist eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ mit $f(A) \subset B$. Ein *punktierter (topologischer) Raum* (X, x_0) ist ein Paar $(X, \{x_0\})$ mit $x_0 \in X$. Der Punkt x_0 heißt auch *Basispunkt*. Eine *punktierte Abbildung* $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ ist eine Abbildung der entsprechenden Paare, es gilt also $f(x_0) = y_0$.

2.7. DEFINITION. Es seien (X, A) ein Paar und Y ein Raum. Zwei Abbildungen $f, g: X \rightarrow Y$ heißen *homotop relativ zu A*, wenn es eine Homotopie $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ zwischen f und g gibt mit

$$H(a, t) = f(a) = g(a) \quad \text{für alle } a \in A \text{ und alle } t \in [0, 1] .$$

Der Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ mit $\gamma(t) = e^{2\pi it}$ ist in \mathbb{C}^* frei homotop zu einem konstanten Weg vermöge

$$H(t, s) = e^{2\pi i(1-s)t} .$$

Wir werden aber bald sehen, dass γ nicht relativ zu $\{0, 1\}$ (also relativ zu den Endpunkten) homotop zum konstanten Weg ist.

2.8. BEMERKUNG. Wir erinnern uns an die kompakt-offene Topologie aus Definition 1.97.

- (1) Wie in Satz 1.101 gehört zu jeder Homotopie $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ zwischen $f, g: X \rightarrow Y$ ein stetiger Weg $h: [0, 1] \rightarrow (C(X, Y), \mathcal{O}_{ko})$ von f nach g mit

$$(h(s))(x) = H_s(x) = H(x, s)$$

für alle $x \in X, s \in [0, 1]$. Wenn X lokal kompakt ist, liefert jeder solche Weg umgekehrt eine Homotopie. In diesem Fall sind Wegzusammenhangskomponenten in $C(X, Y)$ also gerade Homotopieklassen von Abbildungen von X nach Y .

- (2) Sei jetzt $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge und $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung, dann betrachte die Teilmenge

$$C_{f|_A}(X, Y) = \{g \in C(X, Y) \mid g|_A = f|_A\} \subset C(X, Y) ,$$

dann liefert eine Homotopie relativ zu A einen Weg in $C_{f|_A}(X, Y)$ wie oben. Wenn X lokal kompakt ist, gehört wie oben zu jedem Weg in $C_{f|_A}(X, Y)$ eine relative Homotopie. Das folgt aus (1), indem man $C_{f|_A}(X, Y)$ mit der Unterraumtopologie versieht und deren charakterisierende Eigenschaft ausnutzt.

Zum Schluss geben wir ein Beispiel, dass Homotopieäquivalenzen mitunter nicht so offensichtlich sind, wie sie erscheinen.

2.9. DEFINITION. Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X heißt *Retrakt von X* , wenn es eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow A$ mit $f|_A = \text{id}_A$ gibt. Sie heißt *Deformationsretrakt*, wenn zusätzlich $\iota \circ f: X \rightarrow X$ homotop zur Identität id_X ist, und *starker Deformationsretrakt*, wenn die Homotopie zwischen $\iota \circ f$ und id_X sogar relativ zu A gewählt werden kann.

- 2.10. BEISPIEL. (1) Jede einpunktige Menge $\{p\} \subset X$ ist Retrakt von X , aber nur dann Deformationsretrakt, wenn X zusammenziehbar ist. Beispielsweise ist $\{1\} \subset \mathbb{C}^*$ kein Deformationsretrakt (Beweis später).
 (2) Der Einheitskreis $S^1 \subset \mathbb{C}^*$ ist ein starker Deformationsretrakt von \mathbb{C}^* mit

$$f(z) = \frac{z}{|z|} \quad \text{und} \quad H(z, s) = \frac{z}{|z|^s} .$$

Er ist aber kein Retrakt von ganz \mathbb{C} (Beweis später).

Das folgende Beispiel soll zeigen, dass man sich nicht jede Deformationsretraktion vorstellen kann.

2.11. BEISPIEL. Bings „Haus mit zwei Zimmern“ kann man basteln, indem man zwei leere Dosen mit den Unterseiten aneinanderklebt. Dann bohrt man von jeder Seite durch einen Deckel und die gemeinsamen Unterseiten je ein Loch am Rand, und klebt je einen passenden Zylinder zwischen ein Deckel- und ein Unterseitenloch so ein, dass dieser auf seiner vollen Länge den jeweiligen Dosenrand berührt (Abbildung 2.1, linkes Bild). Man kann jetzt durch das Loch in der einen Dose in das „Zimmer“ in der anderen Dose gelangen und umgekehrt.

Man überzeugt sich, dass Bings Haus ein starker Deformationsretrakt einer vollen Dose ist (Abbildung 2.1, rechtes Bild), genau wie ein Punkt in der Dose. Da Homotopieäquivalenz transitiv ist, ist Bings Haus zusammenziehbar. Die zugehörige Deformationsretraktion kann man sich aber kaum vorstellen.

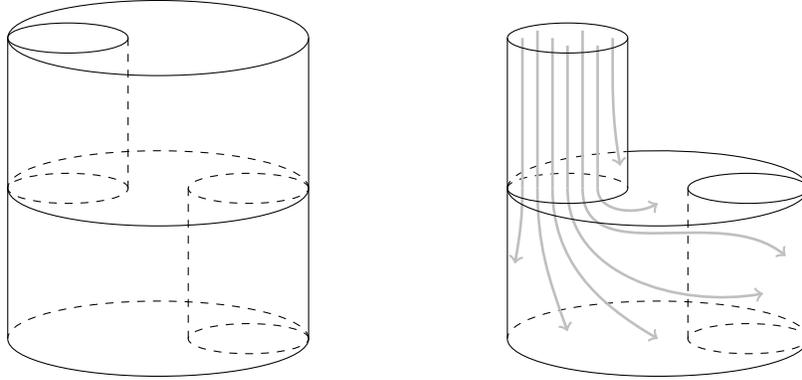


ABBILDUNG 2.1. Bings Haus mit zwei Räumen

2.b. Die Fundamentalgruppe

Die Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes misst, wieviele Typen von nichtzusammenziehbaren Schleifen es in einem topologischen Raum gibt. Beispielsweise ist ein Fahrrad dann sicher an einem Gitter angeschlossen, wenn das Fahrradschloss sowohl im umgebenden Raum ohne Gitter, als auch im umgebenden Raum ohne Fahrrad nicht zusammenziehbar ist. Wir definieren hier die Fundamentalgruppe und geben erste Eigenschaften an. Für Anwendungen benötigen wir einige Techniken, die wir in den nächsten Abschnitten kennenlernen werden.

2.12. DEFINITION. Es sei (X, x) ein punktierter topologischer Raum. Eine *Schleife* in (X, x) ist ein Weg von x nach x , also eine Abbildung $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. Seien γ_1, γ_2 zwei Schleifen in (X, x) , dann ist ihre *Verkettung* die Schleife $\gamma_1\gamma_2: [0, 1] \rightarrow X$ mit

$$(\gamma_1\gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \text{ und} \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Die *Fundamentalgruppe* $\pi_1(X, x)$ ist die Menge aller Schleifen in (X, x) modulo Homotopie relativ zu $\{0, 1\}$.

Bei der Verkettung werden also beide Schleifen nacheinander mit doppelter Geschwindigkeit durchlaufen. Wir benutzen Übung 1.134 um zu sehen, dass die Verkettung wieder stetig ist.

Homotopie relativ zu $\{0, 1\}$ bedeutet für Schleifen soviel wie Homotopie bei festgehaltenem Anfangs- und Endpunkt. Insbesondere gilt für eine solche Homotopie zwischen γ_0 und γ_1 , dass

$$\begin{aligned} H(0, s) &= H(1, s) = x && \text{für alle } s \in [0, 1], \text{ und} \\ H(t, s) &= \gamma_s(t) && \text{für alle } t \in [0, 1] \text{ und alle } s \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

2.13. SATZ. $\pi_1(X, x)$ bildet mit der Verkettung eine Gruppe. Das neutrale Element und das Inverse zu $[\gamma] \in \pi_1(X, x)$ werden repräsentiert durch e beziehungsweise $\bar{\gamma}: [0, 1] \rightarrow X$, mit

$$e(t) = x \quad \text{und} \quad \bar{\gamma}(t) = \gamma(1 - t) \quad \text{für alle } t \in [0, 1].$$

BEWEIS. Hier ist einiges zu zeigen: zunächst die Wohldefiniertheit der Verkettung relativer Homotopieklassen, dann die Gruppenaxiome.

Seien H_1 und $H_2: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ relative Homotopien zwischen den Schleifen α_0 und α_1 beziehungsweise zwischen β_0 und β_1 . Wir verketteten die Homotopien und erhalten

$$H = \begin{cases} H_1(2t, s) & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \text{ und} \\ H_2(2t - 1, s) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

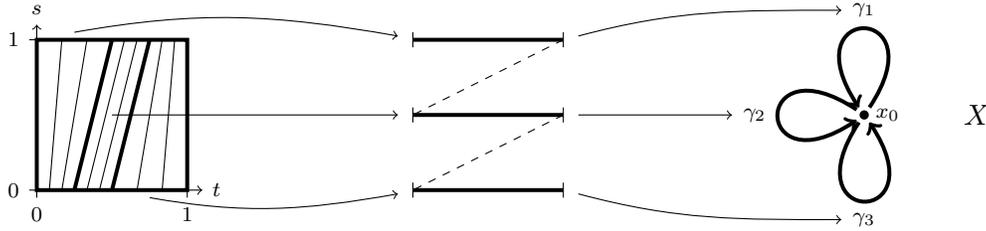
Dann ist H eine Homotopie zwischen $\alpha_0\beta_0$ und $\alpha_1\beta_1$ relativ zu $\{0, 1\}$, also ist die Verkettung mit relativer Homotopie verträglich, und damit als Verknüpfung auf $\pi_1(X, x)$ wohldefiniert.

Zur Assoziativität überlegen wir uns, dass

$$((\gamma_1\gamma_2)\gamma_3)(t) = \begin{cases} \gamma_1(4t) & 0 \leq t \leq 1/4, \\ \gamma_2(4t - 1) & 1/4 \leq t \leq 1/2, \\ \gamma_3(2t - 1) & 1/2 \leq t \leq 1; \end{cases}$$

$$(\gamma_1(\gamma_2\gamma_3))(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \gamma_2(4t - 2) & 1/2 \leq t \leq 3/4, \\ \gamma_3(4t - 3) & 3/4 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Also konstruieren wir eine Homotopie zwischen $(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3$ und $\gamma_1(\gamma_2\gamma_3)$ wie im folgenden Bild,



also in Formeln als

$$H(s, t) = \begin{cases} \gamma_1(4t/(1+s)) & 0 \leq t \leq (1+s)/4, \\ \gamma_2(4t - (1+s)) & (1+s)/4 \leq t \leq (2+s)/4, \\ \gamma_3(1 - 4(1-t)/(2-s)) & (2+s)/4 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Um zu zeigen, dass $[e]$ ein linksneutrales Element ist, konstruieren wir ähnlich wie oben eine relative Homotopie zwischen $e\gamma$ und γ für eine beliebige Schleife γ . Schließlich überprüfen wir, dass $[\bar{\gamma}]$ nur von $[\gamma]$ abhängt und zu $[\gamma]$ linksinversiv ist. Dazu konstruieren wir eine Homotopie

$$H(t, s) = \begin{cases} \gamma(1 - 2st) & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \text{ und} \\ \gamma(1 - 2s(1-t)) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

zwischen e und $\bar{\gamma}\gamma$. Damit haben wir die Gruppenaxiome für $\pi_1(X, x)$ nachgewiesen.

Insbesondere folgt, dass $[e]$ das eindeutige, beidseitige neutrale Element und $[\bar{\gamma}]$ das eindeutige, beidseitige Inverse zu $[\gamma]$ ist. \square

Wir werden später etwas nachlässig sein und manchmal γ statt $[\gamma]$ schreiben.

2.14. SATZ. Sei X ein Raum, $x, y \in X$. Jede Homotopieklasse von Wegen von x nach y induziert einen Isomorphismus von $\pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y)$. Insbesondere hängt der Isomorphietyp der Gruppe $\pi_1(X, x)$ nicht vom Basispunkt x ab, wenn X wegzusammenhängend ist.

BEWEIS von Satz 2.14. Sei $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg von x nach y , dann betrachte die Abbildung

$$\pi_1(X, x) \ni \gamma \mapsto \bar{\alpha}\gamma\alpha \in \pi_1(X, y).$$

Wie im obigen Beweis sieht man, dass $[\bar{\alpha}\gamma\alpha]$ weder von der Klammerung noch von den relativen Homotopieklassen von α und γ abhängt. Es handelt sich um einen Homomorphismus, da

$$(\bar{\alpha}\gamma_1\alpha)(\bar{\alpha}\gamma_2\alpha) \sim (\bar{\alpha}\gamma_1)(\alpha\bar{\alpha})(\gamma_2\alpha) \sim (\bar{\alpha}\gamma_1)e(\gamma_2\alpha) \sim (\bar{\alpha}\gamma_1)(\gamma_2\alpha) \sim \bar{\alpha}(\gamma_1\gamma_2)\alpha.$$

Der inverse Gruppenhomomorphismus wird analog von $\bar{\alpha}$ induziert, denn $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$ und

$$\alpha(\bar{\alpha}\gamma\alpha)\bar{\alpha} \sim (\alpha\bar{\alpha})\gamma(\alpha\bar{\alpha}) \sim e\gamma e \sim \gamma. \quad \square$$

Man schreibt daher manchmal $\pi_1(X)$, wenn X wegzusammenhängend ist und es nur auf den Isomorphietyp der Gruppe $\pi_1(X, x)$ ankommt, aber nicht auf die einzelnen Elemente.

2.15. BEMERKUNG. Für $x = y$ gehört also zu jedem $\alpha \in \pi_1(X, x)$ ein innerer Automorphismus von $\pi_1(X, x)$, nämlich

$$\gamma \mapsto \bar{\alpha}\gamma\alpha.$$

Wenn $\pi_1(X, x)$ nicht kommutativ ist, ist das nicht die Identität auf $\pi_1(X, x)$. In diesem Fall kann man nicht von den Elementen von $\pi_1(X)$ sprechen, ohne einen Fußpunkt zu fixieren.

So, wie man in einer Kategorie nicht nur Objekte betrachtet, sondern immer auch Morphismen, betrachtet man nicht nur Kategorien für sich, sondern auch „Abbildungen“ zwischen ihnen. Dabei muss man vorsichtig sein, da Abbildungen im strengen Sinne nur zwischen Mengen, aber nicht zwischen Klassen definiert sind.

2.16. DEFINITION. Es seien \mathcal{A} und \mathcal{B} zwei Kategorien. Ein (*kovarianter*) *Funktor* $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ordnet jedem Objekt $A \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ ein Objekt $\mathcal{F}A \in \text{Obj}(\mathcal{B})$ und jedem Morphismus $F \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ einen Morphismus $\mathcal{F}F \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B)$ zu, so dass

$$\mathcal{F} \text{id}_A = \text{id}_{\mathcal{F}A}, \quad (1)$$

$$\mathcal{F}(F \circ G) = \mathcal{F}F \circ \mathcal{F}G \quad (2)$$

für alle $A, B, C \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ und alle $F \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(B, C)$, $G \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$.

2.17. DEFINITION. Wir betrachten die Kategorien Top_+ (und \mathcal{HTop}_+) der punktierten topologischen Räume und der (relativen Homotopieklassen von) stetigen Abbildungen mit

$$\text{Obj}(\text{Top}_+) = \text{Obj}(\mathcal{HTop}_+) = \{ (X, x) \mid X \in \text{Obj}(\text{Top}) \text{ und } x \in X \},$$

$$\text{Hom}_{\text{Top}_+}((X, x), (Y, y)) = \{ F: X \rightarrow Y \mid F \in \text{Hom}_{\text{Top}}(X, Y) \text{ und } F(x) = y \}$$

$$\text{und } \text{Hom}_{\mathcal{HTop}_+}((X, x), (Y, y)) = \text{Hom}_{\text{Top}_+}((X, x), (Y, y)) / \sim,$$

wobei \sim hier Homotopie relativ zum Basispunkt bezeichnet. Die Identität auf (X, x) ist die (relative Homotopieklasse der) Abbildung $\text{id}_{(X, x)}$, und die Verkettung ist die Hintereinanderausführung.

Später werden wir die Klasse der Objekte in \mathcal{HTop}_+ etwas einschränken, siehe Beispiel 4.64 (2).

2.18. BEISPIEL. Durch Vergessen der Basispunkte und Übergang zu (relativen) Homotopieklassen von Abbildungen erhalten wir ein kommutatives Diagramm von Funktoren

$$\begin{array}{ccc} \text{Top}_+ & \longrightarrow & \mathcal{HTop}_+ \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Top} & \longrightarrow & \mathcal{HTop} \end{array}$$

Die Konstruktion B im Beweis der Stone-Čech-Kompaktifizierung ist ebenfalls ein Funktor. Das ergibt sich aus dem zweiten Teil von Lemma 1.75.

2.19. SATZ. *Die Fundamentalgruppe ist ein Funktor*

$$\pi_1: \text{Top}_+ \rightarrow \text{Grp}$$

von der Kategorie der punktierten topologischen Räume in die Kategorie der Gruppen. Dabei wird (X, x) auf $\pi_1(X, x)$ und $F: (X, x) \rightarrow (Y, y)$ auf $F_* = \pi_1 F: \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ abgebildet mit

$$F_*[\gamma] = [F \circ \gamma] \in \pi_1(Y, y) \quad \text{für alle } [\gamma] \in \pi_1(X, x).$$

Dieser Funktor ist auch auf \mathcal{HTop}_+ wohldefiniert.

BEWEIS. Sei $F: (X, x) \rightarrow (Y, y)$ eine stetige punktierte Abbildung. Als erstes zeigen wir, dass $\pi_1 F = F_*$ ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus ist. Sei H eine relative Homotopie zwischen $\gamma_0, \gamma_1: ([0, 1], \{0, 1\}) \rightarrow (X, x)$, dann ist die Abbildung $F \circ H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y$ eine relative Homotopie zwischen $F \circ \gamma_0$ und $F \circ \gamma_1$, also ist F_* wohldefiniert.

Seien γ_1, γ_2 zwei Schleifen in (X, x) . Dann folgt

$$(F \circ \gamma_1)(F \circ \gamma_2) = F \circ (\gamma_1 \gamma_2)$$

direkt aus Definition 2.12, also ist F_* ein Gruppenhomomorphismus.

Als nächstes überprüfen wir, dass π_1 die beiden Eigenschaften aus Definition 2.16 erfüllt. Da $\text{id}_X \circ \gamma = \gamma$, gilt offensichtlich (1), also

$$(\text{id}_X)_* = \text{id}_{\pi_1(X, x)} .$$

Seien $F: (Y, y) \rightarrow (Z, z)$ und $G: (X, x) \rightarrow (Y, y)$ punktierte Abbildungen. Dann folgt (2), da

$$(F \circ G)_*[\gamma] = [(F \circ G) \circ \gamma] = [F \circ (G \circ \gamma)] = F_*(G_*[\gamma]) .$$

Um zu zeigen, dass π_1 auch auf \mathcal{HTop}_+ wohldefiniert ist, müssen wir nur überprüfen, dass F_* nur von der relativen Homotopieklasse von F abhängt. Sei also $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ eine relative Homotopie zwischen F_0 und $F_1: (X, x) \rightarrow (Y, y)$, dann ist die Abbildung $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y$ mit

$$(t, s) \mapsto H(\gamma(t), s)$$

eine relative Homotopie zwischen $F_{0*}\gamma$ und $F_{1*}\gamma$. □

Wir können den Funktor $\pi_1: \mathcal{Top}_+ \rightarrow \mathcal{Grp}$ also in zwei Funktoren

$$\mathcal{Top}_+ \longrightarrow \mathcal{HTop}_+ \xrightarrow{\pi_1} \mathcal{Grp} ,$$

zerlegen, dabei ist der erste Funktor der gleiche wie in Beispiel 2.18.

Wegen Bemerkung 2.15 dürfen wir jedoch auf keinen Fall den Basispunkt vergessen, wir erhalten also keinen Funktor $\mathcal{Top} \rightarrow \mathcal{Grp}$. Später werden uns Homologie und Kohomologie solche Funktoren (mit Werten in abelschen Gruppen) liefern.

Funktoren bilden Isomorphismen auf Isomorphismen ab (Übung), weitere Folgerungen aus den Funktor-Axiomen lernen wir später kennen.

2.20. FOLGERUNG. Seien $(X, x), (Y, y)$ homotopieäquivalente Paare topologischer Räume, dann ist $\pi_1(X, x)$ isomorph zu $\pi_1(Y, y)$. □

2.21. DEFINITION. Ein nicht leerer topologischer Raum heißt *einfach zusammenhängend*, wenn er wegzusammenhängend ist mit $\pi_1(X) = \{e\}$.

Hierbei haben wir ausgenutzt, dass der Isomphietyp von $\pi_1(X, x)$ nach Satz 2.14 nicht vom Basispunkt $x \in X$ abhängt. In Übung 2.75 lernen Sie andere Charakterisierungen einfach zusammenhängender Räume kennen.

2.22. BEISPIEL. (1) Der einpunktige Raum $\{*\}$ ist einfach zusammenhängend, da es nur die konstante Schleife $t \mapsto *$ gibt.

(2) Sei X zusammenziehbar, dann ist X nach Definition 2.4 zu $\{*\}$ homotopieäquivalent, also folgt $\pi_1(X) = \{e\}$. Man kann zeigen, dass zusammenziehbare Räume immer wegzusammenhängend sind, also ist X auch einfach zusammenhängend.

2.c. Die Fundamentalgruppe der S^1

In diesem Abschnitt rechnen wir unsere erste Fundamentalgruppe aus, und zwar „von Hand“. Anschließend beweisen wir den Brouwerschen Fixpunktsatz und den Satz von Borsuk-Ulam als Anwendungen davon.

Wir fassen S^1 als Teilmenge von \mathbb{C} (mit der Unterraumtopologie) auf. Um $\pi_1(S^1, 1)$ zu berechnen, brauchen wir den Begriff der Überlagerung.

2.23. DEFINITION. Eine Abbildung $p: \tilde{X} \rightarrow X$ heißt *Überlagerung*, wenn es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U von x , eine Menge M mit diskreter Topologie und einen Homöomorphismus $\varphi: p^{-1}(U) \rightarrow U \times M$ gibt, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} U \times M & \xleftarrow[\cong]{\varphi} & p^{-1}(U) & \hookrightarrow & \tilde{X} \\ & \searrow \pi_U & \downarrow & & \downarrow p \\ & & U & \hookrightarrow & X \end{array}$$

kommutiert. Wir nennen dann U *gleichmäßig überlagert*. Eine Überlagerung $p: \tilde{X} \rightarrow X$ heißt *universell*, wenn \tilde{X} einfach zusammenhängend ist.

2.24. BEISPIEL. Betrachte die modifizierte komplexe Exponentialabbildung $p = e^{2\pi i \cdot}: \mathbb{R} \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}$. Diese Abbildung ist eine Überlagerung, denn jeder Punkt $z = e^{2\pi i s} \in S^1$ hat eine gleichmäßig überlagerte Umgebung $S^1 \setminus \{-z\}$, denn es gibt einen Homöomorphismus

$$p^{-1}(S^1 \setminus \{-z\}) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(s + n - \frac{1}{2}, s + n + \frac{1}{2} \right) \xrightarrow{\cong} (S^1 \setminus \{-z\}) \times \mathbb{Z}.$$

Da \mathbb{R} zusammenziehbar ist, ist $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ nach Definition 2.23 eine universelle Überlagerung.

2.25. SATZ (Homotopie-Liftungssatz). Sei $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung, und seien $\tilde{F}: Y \rightarrow \tilde{X}$ und $H: Y \times [0, 1] \rightarrow X$ stetig mit

$$H(\cdot, 0) = p \circ \tilde{F}: Y \rightarrow X,$$

dann existiert genau eine stetige Abbildung $\tilde{H}: Y \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ mit

$$p \circ \tilde{H} = H \quad \text{und} \quad \tilde{H}(\cdot, 0) = \tilde{F}: Y \rightarrow \tilde{X}.$$

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\tilde{F}} & \tilde{X} \\ \times\{0\} \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ Y \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & X \end{array}$$

Wir nennen \tilde{H} den Lift der Homotopie H mit Startwert \tilde{F} .

BEWEIS. Bei konstruktiven Beweisen ist es manchmal am einfachsten, zuerst die Eindeutigkeit zu beweisen. Danach zeigt man lokale Existenz. Aus der Eindeutigkeit folgt dann, dass sich die lokal konstruierten Objekte zu einem globalen Objekt zusammensetzen lassen.

Seien also zwei Lifts $\tilde{H}_1, \tilde{H}_2: Y \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ mit Startwert \tilde{F} gegeben. Sei $y \in Y$. Wir behaupten, dass die Menge

$$A = \{ t \in [0, 1] \mid \tilde{H}_1(y, t) = \tilde{H}_2(y, t) \} \subset [0, 1]$$

offen und abgeschlossen ist. Nach Voraussetzung gilt $0 \in A$, folglich $A = [0, 1]$, da $[0, 1]$ zusammenhängend ist.

Dazu sei $U \subset X$ eine gleichmäßig überlagerte Umgebung von $H(y, t)$ mit $p^{-1}(U) \cong U \times M$ wie oben. Wegen Stetigkeit der Abbildung $H(y, \cdot)$ existiert ein offenes Intervall $J \subset [0, 1]$ mit $t \in J$, so dass $\{y\} \times J \subset H^{-1}(U)$. Die zusammengesetzten Abbildungen

$$J \xrightarrow{\tilde{H}_i(y, \cdot)} p^{-1}(U) \cong U \times M \xrightarrow{\pi_M} M$$

sind stetig, also konstant auf J , da M diskret ist. Aus $t \in A$ folgt daher $J \subset A$, und aus $t \notin A$ folgt $J \not\subset A$, somit ist A offen und abgeschlossen, und die Eindeutigkeit von \tilde{H} ist bewiesen.

Zur lokalen Existenz von Lifts fixiere $y \in Y$. Zu jedem $s \in [0, 1]$ existiert eine gleichmäßig überlagerte Umgebung U_s von $H(y, s) \in X$, ein offenes Teilintervall $I_s \subset [0, 1]$ mit $s \in I_s$ und eine offene Umgebung $V_s \subset Y$ von y mit $H(V_s \times I_s) \subset U_s$. Endlich viele solche Intervalle I_s überdecken $[0, 1]$, da $[0, 1]$ kompakt ist. Also existieren $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$, gleichmäßig überlagerte U_i und Umgebungen V_i von y mit

$$V_i \times [t_{i-1}, t_i] \subset H^{-1}(U_i).$$

Wir konstruieren induktiv Umgebungen W_i von y und Lifts \tilde{H}_i von $H|_{W_i \times [0, t_i]}$. Setze dazu zunächst $W_0 = Y$ und $\tilde{H}_0(\cdot, 0) = \tilde{F}$. Sei jetzt eine offene Umgebung W_{i-1} von y und ein Lift \tilde{H}_{i-1} von $H|_{W_{i-1} \times [0, t_{i-1}]}$ bereits konstruiert. Betrachte die stetige Abbildung

$$f_i: W_{i-1} \cap V_i \xrightarrow{\tilde{H}_{i-1}(\cdot, t_{i-1})} p^{-1}(U_i) \xrightarrow{\varphi} U_i \times M_i \xrightarrow{\pi_{M_i}} M$$

und setze $m_i = f_i(y) \in M_i$. Da M_i die diskrete Topologie trägt, ist $\{m_i\} \subset M_i$ offen, also ist

$$W_i = f_i^{-1}(m_i) \subset W_{i-1} \cap V_i$$

eine offene Umgebung von y . Für $w \in W_i$ setze

$$\tilde{H}_i(w, s) = \begin{cases} \tilde{H}_{i-1}(w, s) & \text{für } 0 \leq s \leq t_{i-1}, \text{ und} \\ \varphi^{-1}(H(w, s), m_i) & \text{für } t_{i-1} \leq s \leq t_i. \end{cases}$$

Dann ist \tilde{H}_i auf beiden Teilbereichen stetig und stimmt auf dem Durchschnitt überein, ist also insgesamt stetig. Setze $W_y = W_k$ und erhalte einen lokalen Lift

$$\tilde{H}_y: W_y \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X} \quad \text{von} \quad H|_{W_y \times [0, 1]}.$$

Wir erhalten eine offene Überdeckung \mathcal{V} von Y und Lifts $H_V: V \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ für alle $V \in \mathcal{V}$. Wegen der obigen Eindeutigsaussage stimmen je zwei dieser Lifts auf dem gemeinsamen Definitionsbereich überein, so dass sich alle zu einem globalen Lift $\tilde{H}: Y \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ zusammensetzen. \square

2.26. SATZ. *Es gibt eine Isomorphismus $\Phi: \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$, der $[\exp(2\pi i \cdot)]$ auf $1 \in \mathbb{Z}$ abbildet.*

BEWEIS. Wir betrachten die Überlagerung $p = e^{2\pi i \cdot}: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ aus Beispiel 2.24. Wir fassen $\gamma \in \pi_1(S^1, 1)$ als Homotopie H von Abbildungen von $Y = \{*\}$ nach S^1 mit $H(*, s) = \gamma(s)$ auf. Es sei $\tilde{F}(*, 0) = 0 \in \mathbb{Z}$ ein Lift von $H(*, 0) = 1$, dann existiert nach Satz 2.25 ein eindeutiger Lift $\tilde{\gamma}(s) = \tilde{H}(*, s)$, und es folgt $\tilde{\gamma}(1) \in p^{-1}(1) = \mathbb{Z}$.

Seien γ_0 und γ_1 relativ homotope Schleifen in $(S^1, 1)$ mit Lifts $\tilde{\gamma}_0$ und $\tilde{\gamma}_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Wir fassen eine relative Homotopie H zwischen γ_0 und γ_1 als Homotopie $K(s, t) = H(t, s)$ von der konstanten Abbildung $s \mapsto 1$ zu sich selbst auf. Dann lässt sich K nach Satz 2.25 zu einer Homotopie \tilde{K} liften, wobei $\tilde{K}(s, t) = \tilde{\gamma}_s(t)$ für $s \in \{0, 1\}$ aufgrund der Eindeutigkeit der Lifts $\tilde{\gamma}_i$. Wir erhalten also eine Homotopie $\tilde{H}(t, s) = \tilde{K}(s, t)$ zwischen $\tilde{\gamma}_0$ und $\tilde{\gamma}_1$. Da $s \mapsto \tilde{H}(1, s)$ die konstante Abbildung $H(1, s) = 1 \in S^1$ liftet, ist diese Abbildung selbst konstant, und es folgt $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1) \in \mathbb{Z}$. Also erhalten wir eine wohldefinierte Abbildung

$$\Phi: \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z} \quad \text{mit} \quad \Phi([\gamma]) = \tilde{\gamma}(1) \in \mathbb{Z} \quad \text{für } \tilde{\gamma} \text{ wie oben.}$$

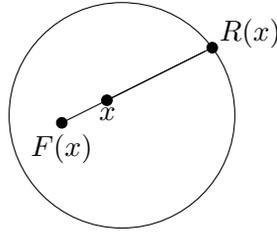


ABBILDUNG 2.2. Die Retraktion im Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes

Ein Lift von $\gamma_1\gamma_2$ ist

$$\widetilde{\gamma_1\gamma_2} = \begin{cases} \tilde{\gamma}_1(2t) & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \tilde{\gamma}_1(1) + \tilde{\gamma}_2(2t - 1) & 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

dabei nutzen wir aus, dass für jede Zahl $n \in \mathbb{Z}$ die Abbildung $t \mapsto \tilde{\gamma}(t) + n$ ein Lift von γ ist, wenn $\tilde{\gamma}$ ein Lift ist, da

$$e^{2\pi i(\tilde{\gamma}(t)+n)} = e^{2\pi i\tilde{\gamma}(t)} \cdot e^{2\pi in} = \gamma(t) \cdot 1.$$

Also ist Φ ein Gruppenhomomorphismus. Man kann sich durch Nachrechnen überzeugen, dass γ dabei gerade auf die Umlaufzahl $\nu_{(\gamma,0)}$ aus Beispiel 2.1 (1) abgebildet wird.

Zur Injektivität seien γ_0, γ_1 Schleifen in S^1 mit Lifts $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1$, so dass $\tilde{\gamma}_0(0) = \tilde{\gamma}_1(0) = 0$ und $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1) = n \in \mathbb{Z}$. Da \mathbb{R} zusammenziehbar ist, ist \mathbb{R} einfach zusammenhängend. Insbesondere existiert eine relative Homotopie \tilde{H} zwischen $\tilde{\gamma}_0$ und $\tilde{\gamma}_1$ (Übung 2.75). Dann ist $p \circ \tilde{H}$ eine relative Homotopie zwischen γ_0 und γ_1 , also folgt $[\gamma_0] = [\gamma_1]$.

Zur Surjektivität betrachte zu $n \in \mathbb{Z}$ die Schleife γ_n mit Lift $\tilde{\gamma}_n$, wobei

$$\gamma_n(t) = e^{2\pi i n t} \quad \text{und} \quad \tilde{\gamma}_n(t) = n t. \quad \square$$

Wir kommen jetzt zu zwei Anwendungen; weitere folgen in den Übungen 2.78 und 2.79. Zur Motivation zunächst der eindimensionale Fall des Brouwerschen Fixpunktsatzes.

2.27. BEMERKUNG. Jede stetige Funktion $f: D^1 = [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ hat einen Fixpunkt. Betrachte dazu die Funktion

$$g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto x - f(x).$$

Es gilt $f(x) = x$ genau dann, wenn $g(x) = 0$. Da $g(-1) \leq 0$ und $g(1) \geq 0$, folgt die Behauptung aus dem Zwischenwertsatz.

2.28. BEMERKUNG. Ein Retrakt in einer Kategorie ist ein Morphismus $r: X \rightarrow Y$, so dass es einen Morphismus $\iota: Y \rightarrow X$ mit $r \circ \iota = \text{id}_Y$ gibt. Wenn wir in \mathcal{Top} arbeiten und Y mit $\text{im } \iota \subset X$ identifizieren, erhalten wir genau den Begriff aus Definition 2.9. Funktoren bilden Retrakte auf Retrakte ab (Übung), also erhalten wir eine Zerlegung

$$\text{id}_{\pi_1(Y,y)}: \pi_1(Y, y) \xrightarrow{\pi_1 \iota} \pi_1(X, x) \xrightarrow{\pi_1 r} \pi_1(Y, y).$$

Man kann sogar zeigen, dass $\pi_1(X, x) \cong \ker(\pi_1 r) \rtimes \text{im}(\pi_1 \iota)$.

Der folgende Satz gilt analog für Abbildungen $D^n \rightarrow D^n$, siehe Satz 3.44.

2.29. SATZ (Brouwerscher Fixpunktsatz, $n = 2$). Jede stetige Abbildung $F: D^2 \rightarrow D^2$ hat einen Fixpunkt.

BEWEIS. Falls es keinen Fixpunkt gibt, konstruieren wir eine Retraktion $R: D^2 \rightarrow \partial D^2 = S^1$ wie in Abbildung 2.2. Da $\pi_1(D^2, 1) = 0$ und $\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$, widerspricht das der obigen Bemerkung.

Zur Konstruktion der Retraktion beachten wir, dass $\min_{x \in D^2} d(F(x), x) > 0$ wegen Kompaktheit von D^2 . Daher erhalten wir eine stetige Abbildung, indem wir die Strecke von $F(x)$ nach x über x hinaus fortsetzen, bis sie S^1 schneidet, und x den Schnittpunkt $R(x)$ zuordnen. Falls $x \in S^1$, ist $x = R(x)$ dieser Schnittpunkt, also erhalten wir die gesuchte Retraktion. \square

Der folgende Satz gilt analog für Abbildungen $S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, wird hier aber nur für $n = 2$ bewiesen.

2.30. SATZ (Borsuk-Ulam). *Sei $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig, dann existiert $x \in S^2$ mit $f(x) = f(-x)$.*

BEWEIS. Falls nicht, existiert eine Abbildung $G: S^2 \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ mit

$$G(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|},$$

und es folgt $G(x) = -G(-x)$ auf ganz S^2 . Betrachte den Äquator

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi t \\ \sin 2\pi t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ohne Einschränkung gelte $G(\gamma(0)) = 1 \in S^1 \subset \mathbb{C}$, andernfalls drehen wir $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ entsprechend. Es sei $g = G \circ \gamma$. Wir wollen $G_*[\gamma] = [g] \in \pi_1 S^1 \cong \mathbb{Z}$ bestimmen. Sei dazu $\tilde{g}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ein Lift von $g: [0, 1] \rightarrow S^1$ wie in Satz 2.26 unter der Überlagerung $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ mit $p(t) = e^{2\pi t}$ aus Beispiel 2.24. Aus

$$g(t + 1/2) = G(-\gamma(t)) = -(G \circ \gamma)(t) = -g(t)$$

folgt

$$\tilde{g}(t + 1/2) - \tilde{g}(t) \in \mathbb{Z} + 1/2,$$

da $p^{-1}(-1) = \mathbb{Z} + 1/2$. Da der obige Ausdruck stetig von t abhängt und $\mathbb{Z} + 1/2$ diskret ist, ist er konstant, und wir erhalten

$$\tilde{g}(1) - \tilde{g}(0) = (\tilde{g}(1) - \tilde{g}(1/2)) + (\tilde{g}(1/2) - \tilde{g}(0)) = 2(\tilde{g}(1/2) - \tilde{g}(0)) \in 2\mathbb{Z} + 1.$$

Insbesondere wird der Äquator auf ein ungerades Element von $\pi_1 S^1 \cong \mathbb{Z}$ abgebildet. Der Äquator γ ist aber null-homotop in S^2 . Sei H eine Homotopie von γ zur konstanten Schleife, dann ist $G \circ H$ eine Homotopie von g zur konstanten Schleife, was einen Widerspruch darstellt. \square

Die Beweise der obigen Sätze sind nicht konstruktiv, das heißt, sie liefern kein Verfahren, das einen Punkt mit der gesuchten Eigenschaft findet. Das gleiche gilt für die beiden Anwendungen in den Übungen 2.78 und 2.79, auch dort sind die Beweise indirekt. Man beachte, dass es in allen vier Problemen beliebig „schlecht konditionierte“ Situationen gibt, in denen eine beliebig kleine Variation der Ausgangsdaten (zum Beispiel Variation von F um weniger als $\varepsilon > 0$ in der Supremumsnorm) beliebig große Änderungen des gesuchten Punktes bewirken können.

2.d. Der Satz von Seifert-van Kampen

Wir wollen als nächstes den Satz von Seifert-van Kampen beweisen, der es in vielen Fällen ermöglicht, die Fundamentalgruppe eines zusammengesetzten Raumes aus den Fundamentalgruppen seiner Bausteine zu rekonstruieren. Dazu benötigen wir ein paar Begriffe aus der Gruppentheorie.

Sei $(G_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie von Gruppen. Wir wollen zunächst eine Gruppe konstruieren, die alle Gruppen G_i enthält, und in der keine „unnötigen“ Relationen gelten. Diese Gruppe soll das „freie Produkt“ der Gruppen G_i heißen. Wir werden sehen, dass das freie Produkt das Koprodukt in der Kategorie $\mathcal{G}rp$ der Gruppen ist. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Gruppen G_i paarweise disjunkt sind, ansonsten müssten wir die Elemente von G_i als (i, g) „markieren“.

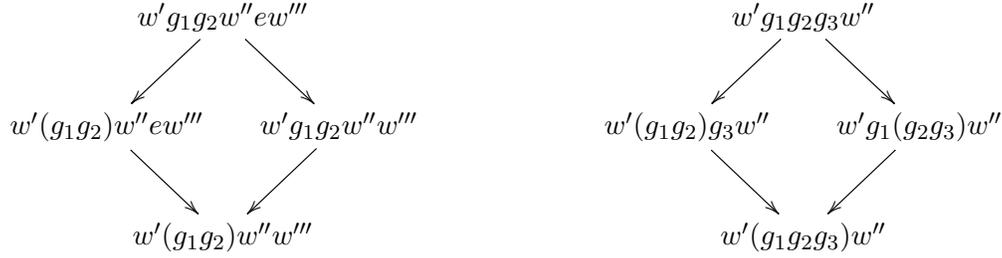


ABBILDUNG 2.3. Kürzen im freien Produkt (Beispiele)

2.31. DEFINITION. Sei $(G_i)_{i \in I}$ eine Familie von Gruppen. Ein Wort w im Alphabet $\dot{\cup}_i G_i$ ist ein Tupel $g_1 \dots g_k$ der endlichen Länge $\ell(w) = k \geq 0$ von Buchstaben $g_j \in G_{i_j}$ mit $i_j \in I$. Schreibe \emptyset für das leere Wort. Ein Wort heißt *gekürzt* oder *reduziert*, wenn

- (1) kein Buchstabe ein neutrales Element $e_i \in G_i$ ist, und
- (2) keine zwei aufeinanderfolgenden Buchstaben g_j, g_{j+1} zur gleichen Gruppe $G_{i_j} = G_{i_{j+1}}$ gehören.

Ein Wort *kürzen* oder *reduzieren* heißt, so oft wie möglich einen der folgenden Schritte auszuführen:

- (1) Weglassen eines Einselementes $e_i \in G_i$ an einer beliebigen Stelle des Wortes,

$$w'e_iw'' \mapsto w'w'' ,$$

- (2) Ersetzen zweier aufeinanderfolgender Buchstaben $g_j, g_{j+1} \in G_{i_j}$ aus derselben Gruppe durch ihr Produkt,

$$w'g_jg_{j+1}w'' \mapsto w'(g_jg_{j+1})w'' .$$

Zwei Wörter w, w' heißen *äquivalent*, wenn es eine Kette $w = w_0, \dots, w_n = w'$ von Wörtern gibt, so dass für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ entweder w_i aus w_{i-1} oder w_{i-1} aus w_i durch einen der obigen Schritte entsteht.

Da wir Ketten spiegeln und aneinanderhängen können, ist „Äquivalenz“ eine Äquivalenzrelation. Beim Reduzieren nimmt die Anzahl der Buchstaben ab. Da wir nur Wörter endlicher Länge betrachten, erhalten wir nach endlich vielen Schritten ein gekürztes Wort. Wichtig ist, dass dieses gekürzte Wort nicht davon abhängt, in welcher Weise wir beim Kürzen vorgehen.

2.32. PROPOSITION. *Jede Äquivalenzklasse von Wörtern enthält genau ein gekürztes Wort.*

BEWEIS. Zu zeigen ist noch die Eindeutigkeit. Falls es zwei äquivalente reduzierte Wörter w, w' gibt, betrachten wir eine Kette $w = w_0, \dots, w_n = w'$ zwischen ihnen wie in Definition 2.31. Falls $n > 0$, muss es ein Wort w_{i_0} maximaler Länge innerhalb der Kette geben, und es folgt $0 < i_0 < n$. Falls $w_{i_0-1} = w_{i_0+1}$ gilt, können wir zwei Elemente aus der Kette streichen und erhalten eine kürzere Kette zwischen w und w' .

Andernfalls entstehen w_{i_0-1} und w_{i_0+1} durch verschiedene Kürzungsschritte aus w_{i_0} . Wenn diese Kürzungen an getrennten Stellen im Wort passieren, kann man sie in beliebiger Reihenfolge durchführen. Falls sich die Buchstabengruppen überschneiden, stammen hingegen alle beteiligten Buchstaben aus der selben Gruppe G_i . Indem wir beide Kürzungsschritte kombinieren, bekommen wir ein neues Wort w'_{i_0} durch Kürzen sowohl aus w_{i_0-1} als auch aus w_{i_0+1} , siehe Abbildung 2.3. Wenn wir w_{i_0} durch w'_{i_0} ersetzen, haben wir eine neue Kette. In jedem der beiden Fälle hat sich die Summe der Längen der beteiligten Wörter verringert, also terminiert das Verfahren nach endlich vielen Schritten bei einer „minimalen“ Kette zwischen w und w' . Diese hat zwangsläufig die Länge $n = 0$, so dass $w = w'$ folgt. \square

2.33. DEFINITION. Sei $(G_i)_{i \in I}$ eine Familie von Gruppen. Das *freie Produkt* $*_i G_i = \coprod_i G_i$ der G_i ist die Menge aller reduzierten Wörter, die Multiplikation ist Hintereinanderschreiben und anschließende Reduktion. Definiere Abbildungen $\iota_j: G_j \rightarrow \coprod_i G_i$ mit

$$\iota_j(g) = \begin{cases} \emptyset & g = e_j, \\ g & g \in G_j \setminus \{e_j\}. \end{cases}$$

2.34. PROPOSITION. *Das freie Produkt ist eine Gruppe, und die Abbildungen ι_j sind Homomorphismen.*

BEWEIS. Da es laut Beweis des Satzes 2.32 nicht auf die Reihenfolge der Reduktionsschritte ankommt, erhalten wir das Produkt dreier Wörter durch Hintereinanderschreiben aller drei Wörter und anschließendes Kürzen; hieraus folgt Assoziativität der Multiplikation.

Das leere Wort ist offensichtlich neutrales Element, und für jedes Wort gilt

$$(g_1 \dots g_k)^{-1} = g_k^{-1} \dots g_1^{-1}.$$

Für alle $i \in I$ und alle $g \in G_i$ ist $\iota_i(g)$ gekürzt, und offensichtlich ist ι_i ein Homomorphismus. \square

2.35. BEISPIEL. Es bezeichne $\mathbb{Z}/2$ die Gruppe mit zwei Elementen. Wir können uns $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ als Menge der Worte in zwei Buchstaben g und h vorstellen, wobei Kürzen heißt, zwei benachbarte gleiche Buchstaben zu streichen. Man kann zeigen, dass das genau die Isometriegruppe des metrischen Raumes (\mathbb{Z}, d) mit $d(m, n) = |m - n|$ ist. Dabei entsprechen g und h Spiegelungen an zwei benachbarten Punkten in $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Man nennt $D_\infty = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ auch die unendliche Diedergruppe.

2.36. SATZ. *Das Produkt von Gruppen ist ein Produkt auf der Kategorie der Gruppen. Das freie Produkt von Gruppen ist ein Koprodukt auf der Kategorie der Gruppen.*

BEWEIS. Sei $(G_i)_{i \in I}$ eine Familie von Gruppen. Analog zu Übung 1.150 erfüllt ihr Produkt

$$\prod_{i \in I} G_i = \{(g_i)_{i \in I} \mid g_i \in G_i \text{ für alle } i \in I\}$$

mit komponentenweiser Multiplikation, zusammen mit den Projektionen

$$p_j: \prod_{i \in I} G_i \rightarrow G_j, \quad p_j((g_i)_{i \in I}) = g_j,$$

die Eigenschaften eines Produkts in der Kategorie \mathcal{Grp} .

Nach Bemerkung 1.79 besagt die universelle Eigenschaft des Koproduktes, dass es zu jeder Gruppe H und Homomorphismen $f_i: G_i \rightarrow H$ genau einen Homomorphismus $f: *_i G_i \rightarrow H$ mit $f_i = f \circ \iota_i$ für alle $i \in I$ gibt. Wenn f existiert, ist f eindeutig bestimmt durch

$$f(g_1 \dots g_k) = f_{i_1}(g_1) \dots f_{i_k}(g_k) \in H,$$

wobei $g_j \in G_{i_j}$ wie oben. Offensichtlich ist Kürzen mit f verträglich, da alle f_i Homomorphismen sind. Also ist f ebenfalls Homomorphismus. \square

Im Satz von Seifert-van Kampen benötigen wir einen Quotienten des freien Produkts. Da man Quotienten von Gruppen nur nach Normalteilern bilden kann, führen wir diese hier ein. Ein *Normalteiler* N einer Gruppe G ist eine Untergruppe mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass $gng^{-1} \in N$ für alle $g \in G$ und alle $n \in N$. Kerne von Gruppenhomomorphismen $F: G \rightarrow H$ haben diese Eigenschaft, denn sei $g \in G$, $k \in \ker F$, dann folgt

$$F(gkg^{-1}) = F(g) \cdot \underbrace{F(k)}_{=e} \cdot F(g)^{-1} = e \in H,$$

also $gkg^{-1} \in \ker F$.

Sei umgekehrt N ein Normalteiler, dann definieren wir eine Gruppenstruktur auf dem Quotienten

$$G/N = \{gN \mid g \in G\} \quad \text{mit} \quad gN = \{gn \mid n \in N\}$$

durch

$$(gN) \cdot (hN) = g(hNh^{-1}) \cdot (hN) = gh \cdot N \cdot N = (gh)N.$$

Die Normalteiler-Eigenschaft garantiert uns, dass dieses Produkt wohldefiniert ist. Die natürliche Abbildung $G \rightarrow G/N$ mit $g \mapsto gN$ ist ein Gruppenhomomorphismus mit Kern N .

2.37. DEFINITION. Es sei G eine Gruppe und $M \subset G$ eine Teilmenge. Dann ist der von M erzeugte Normalteiler (M) von G der kleinste Normalteiler $N \subset G$, so dass $M \subset N$.

Man kann sich überzeugen, dass Durchschnitte von Normalteilern wieder Normalteiler sind, so dass der Begriff des kleinsten Normalteilers in der obigen Definition sinnvoll ist. Alternativ dazu geben wir (M) explizit an.

2.38. BEMERKUNG. Es gilt

$$(M) = \{g_1 m_1^{\pm 1} g_1^{-1} \cdots g_k m_k^{\pm 1} g_k^{-1} \mid k \geq 0, g_1, \dots, g_k \in G \text{ und } m_1, \dots, m_k \in M\}. \quad (*)$$

Man überzeugt sich leicht, dass die rechte Seite eine Untergruppe von M beschreibt, und sogar einen Normalteiler, da

$$g(g_1 m_1^{\pm 1} g_1^{-1} \cdots g_k m_k^{\pm 1} g_k^{-1})g^{-1} = (gg_1) m_1^{\pm 1} (gg_1^{-1}) \cdots (gg_k) m_k^{\pm 1} (gg_k)^{-1}.$$

Umgekehrt enthält jeder Normalteiler, der M enthält, auch alle Produkte von Elementen der Form $gm^{\pm 1}g^{-1}$, also ist die rechte Seite von (*) tatsächlich der kleinste Normalteiler, der M enthält.

Wir formulieren und beweisen jetzt den weiter oben angekündigten Satz.

2.39. SATZ (Seifert-van Kampen). Sei (X, x) ein punktierter Raum, und sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ eine offene Überdeckung von X , so dass

- (1) jede Menge $U \in \mathcal{U}$ den Basispunkt x enthält, und
- (2) jeder Durchschnitt $U \cap V$ für $U, V \in \mathcal{U}$ wegzusammenhängend ist.

Dann ist die von den Homomorphismen $\iota_{U*}: \pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ induzierte natürliche Abbildung

$$\varphi: \coprod_{U \in \mathcal{U}} \pi_1(U, x) \longrightarrow \pi_1(X, x)$$

surjektiv. Falls darüberhinaus

- (3) jeder Durchschnitt $U \cap V \cap W$ für $U, V, W \in \mathcal{U}$ wegzusammenhängend ist,

dann wird der Kern der Abbildung φ gegeben durch

$$\ker \varphi = \left(\left\{ (\iota_{U \cap V \rightarrow U})_* [\gamma]^{-1} \cdot (\iota_{U \cap V \rightarrow V})_* [\gamma] \mid U, V \in \mathcal{U} \text{ und } [\gamma] \in \pi_1(U \cap V, x) \right\} \right). \quad (*)$$

Hier bezeichnen $\iota_U: U \rightarrow X$ und $\iota_{U \cap V \rightarrow U}: U \cap V \rightarrow U$ die Inklusionsabbildungen.

BEWEIS. Wir schreiben wieder $\alpha\beta$ für die Verkettung beliebiger Wege mit passenden Anfangs- und Endpunkten wie im Beweis von Satz 2.14.

Um zu zeigen, dass die Abbildung φ surjektiv ist, betrachten wir eine Schleife $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. Da $(\gamma^{-1}(U))_{U \in \mathcal{U}}$ eine offene Überdeckung des kompakten Intervalls $[0, 1]$ ist, existiert nach dem Satz 1.63 von Lebesgue ein $n > 0$, so dass jeder Weg

$$\gamma_i(t) = \left(\gamma|_{\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]} \right) \left(\frac{t+i-1}{n} \right)$$

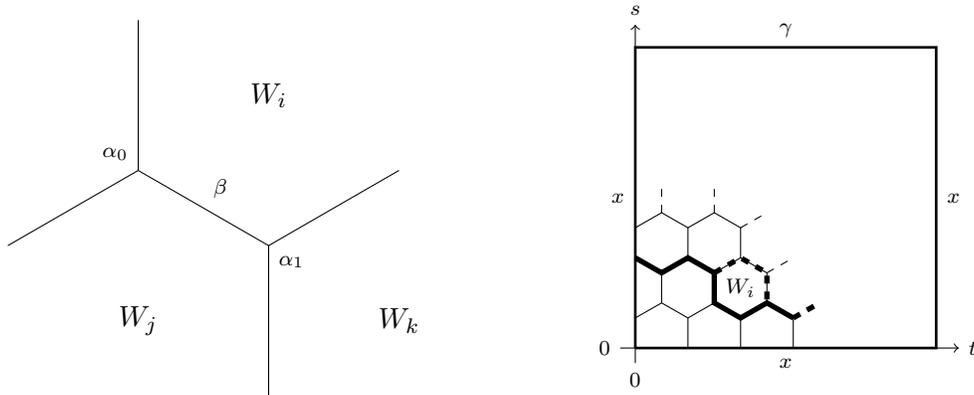


ABBILDUNG 2.4. Zerlegung des Einheitsquadrats in Waben

für $1 \leq i \leq n$ ganz in einer der Mengen $U_i \in \mathcal{U}$ verläuft. Nach (1) und (2) gibt es Wege α_i von x nach $\gamma(\frac{i}{n}) = \gamma_i(1) = \gamma_{i+1}(0)$ in $U_i \cap U_{i+1}$. Also schreiben wir γ als Verkettung

$$\gamma \sim \underbrace{\gamma_1 \alpha_1^{-1}}_{\in \text{im } \iota_{U_1^*}} \underbrace{\alpha_1 \gamma_2 \alpha_2^{-1}}_{\in \text{im } \iota_{U_2^*}} \cdots \underbrace{\alpha_{n-1} \gamma_n}_{\in \text{im } \iota_{U_n^*}} \in \text{im } \varphi ,$$

und es folgt Surjektivität.

Wir bezeichnen die rechte Seite von (*) mit $N \subset \coprod_{U \in \mathcal{U}} \pi_1(U, x)$. Sei $\gamma \in \pi_1(U \cap V, x)$, dann ist offensichtlich

$$[e] = [\gamma][\bar{\gamma}] = \underbrace{(\iota_{U \cap V \rightarrow U})_* [\gamma]}_{\in \text{im } \iota_{U^*}} \cdot \underbrace{(\iota_{U \cap V \rightarrow V})_* [\bar{\gamma}]^{-1}}_{\in \text{im } \iota_{V^*}} \in \pi_1(X, x) ,$$

woraus sich $N \subset \ker \varphi$ ergibt.

Sei umgekehrt $\gamma \in \ker \varphi$ dargestellt durch das Wort $\gamma_1 \cdots \gamma_k$ für Schleifen γ_i in $U_i \in \mathcal{U}$. Dann existiert eine Homotopie $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ von der trivialen Schleife zu γ . Nach dem Satz von Lebesgue können wir das kompakte Einheitsquadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ so in Waben zerlegen, dass jede Wabe $W_i \subset [0, 1] \times [0, 1]$ von H ganz in eine der Mengen $U_i \in \mathcal{U}$ abgebildet wird. Nach (3) finden wir zu jedem Eckpunkt (t, s) einen Weg α von x nach $H(t, s)$, der ganz im Durchschnitt der (maximal drei) offenen Mengen $U_i, U_j, U_k \in \mathcal{U}$ zu den angrenzenden Waben W_i, W_j, W_k verläuft. Wir können jetzt jede Kante zwischen zwei Waben wie oben durch eine Schleife $\alpha_0 \beta \alpha_1^{-1}$ beschreiben, die ganz im Durchschnitt der $U_i, U_j \in \mathcal{U}$ zu den angrenzenden Waben W_i, W_j verläuft.

Wir zerlegen die Homotopie H in eine Folge einzelner Homotopien H_i relativ zu x , die jeweils eine Wabe W_i überstreichen, siehe Abbildung 2.4. Zu Beginn der Homotopie wird der betrachtete Pfad beschrieben durch ein Wort aus Buchstaben der Form

$$\cdots \iota_{(U_i \cap U_j \rightarrow U_j)^*} \underbrace{[\alpha_0 \beta \bar{\alpha}_1]}_{\sigma \text{ in } U_i \cap U_j} \cdots \in \prod_{U \in \mathcal{U}} \pi_1(U, x) ,$$

dabei gehört U_j hier stets zu einer Wabe W_j „unterhalb“ des Pfades zu Beginn der Homotopie H_i . Fall die Kante β an die Wabe W_i angrenzt, müssen wir als erstes diesen Buchstaben durch einen Buchstaben in $\pi_1(U_i, x)$ ersetzen. Dazu beachten wir, dass

$$w' \iota_{(U_i \cap U_j \rightarrow U_i)^*} [\sigma] w'' = \left(w' \iota_{(U_i \cap U_j \rightarrow U_j)^*} [\sigma] w'' \right) \left(w'' \iota_{(U_i \cap U_j \rightarrow U_j)^*} [\sigma]^{-1} \iota_{(U_i \cap U_j \rightarrow U_i)^*} [\sigma] w'' \right) .$$

Dieses Ersetzen entspricht also gerade der Multiplikation von rechts mit einem Element von N , vergleiche Bemerkung 2.38.

Wenn wir alle Buchstaben, die zu Kanten der Wabe W_i gehören, durch Buchstaben in $\pi_1(U_i, x)$ ersetzt haben, können wir die Homotopie H_i durchführen. Dabei wird ein Produkt von Schleifen in U_i durch ein in U_i homotopes Produkt ersetzt. Nach Kürzen verändert sich das zugehörige Wort im freien Produkt der $\pi_1(U, x)$ also gar nicht.

Nach endlich vielen Schritten erreichen wir den ursprünglichen Weg $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_k$, wobei γ aber möglicherweise durch ein anderes Wort repräsentiert wird, falls ein oder mehrere γ_i als Schleifen in anderen Umgebungen geschrieben wurden. Nochmaliges Multiplizieren mit Elementen von N behebt dieses Problem.

Da wir mit der trivialen Schleife, dargestellt durch das leere Wort, begonnen haben, haben wir also $w \in \ker \varphi$ insgesamt als Produkt von Elementen von N geschrieben, also folgt $\ker \varphi \subset N$ und daher $\ker \varphi = N$. \square

2.40. BEISPIEL. Die Ziffer „8“ lässt sich als Vereinigung zweier Kreise schreiben. Sei „8“ = $U \cup V$, wobei U und V kleine offene Umgebungen der beiden Kreise seien, so dass die Kreise Deformations-Retrakte von U und V sind. Wähle x_0 als Schnittpunkt der beiden Kreise, dann liefert Seifert-van Kampen, dass $\pi_1(\text{„8“}, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

2.41. BEISPIEL. Ohne die erste Voraussetzung (1) lässt sich der Satz von Seifert-van Kampen nicht formulieren. Es folgen zwei Beispiele, die zeigen, dass die anderen beiden Voraussetzungen ebenfalls nötig sind.

- (1) Betrachte $X = S^1 \subset \mathbb{C}$ als Vereinigung zweier zusammenziehbarer Mengen $U_{\pm} = S^1 \setminus \{\pm i\}$. Beide Mengen haben triviale Fundamentalgruppe, also ist auch $\pi_1(U_+, 1) * \pi_1(U_-, 1)$ trivial. Auf der anderen Seite ist $\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$ nichttrivial, insbesondere ist die natürliche Abbildung $\pi_1(U_+, 1) * \pi_1(U_-, 1) \rightarrow \pi_1(S^1, 1)$ nicht surjektiv. Das liegt daran, dass $U^+ \cap U^- = S^1 \setminus \{i, -i\}$ nicht zusammenhängend ist, also Voraussetzung (2) verletzt ist.
- (2) Betrachte $Y = S^1 \cup [-1, 1] \subset \mathbb{C}$, und setze $U_x = Y \setminus \{x\}$ für $x \in \{-i, 0, i\}$. Dann sind die drei Mengen U_x jeweils homotopieäquivalent zu einem Kreis, haben also Fundamentalgruppe \mathbb{Z} . Der Durchschnitt je zweier dieser drei Mengen ist zusammenziehbar, also gilt $N = \{e\}$ und

$$\pi_1(Y, 1) = (\pi_1(U_i, 1) * \pi_1(U_{-i}, 1)) / N = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} ,$$

denn Voraussetzung (3) folgt aus Voraussetzung (2), solange wir nur zwei offene Mengen betrachten.

Andererseits gilt

$$(\pi_1(U_i, 1) * \pi_1(U_0, 1) * \pi_1(U_{-i}, 1)) / N = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} ,$$

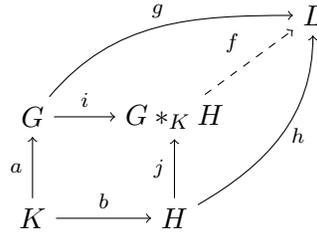
und $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, etwa haben beide Gruppen unterschiedliche Abelisierungen. Da $U_i \cap U_0 \cap U_{-i}$ nicht wegzusammenhängend ist, ist Voraussetzung (3) für die Überdeckung $\{U_i, U_0, U_{-i}\}$ verletzt.

2.42. BEMERKUNG. Der Spezialfall $X = U \cup V$ im Satz 2.39 von Seifert-van Kampen ist besonders wichtig und etwas einfacher zu formulieren als der allgemeine Fall. Da der Beweis aber nicht wesentlich einfacher wird, haben wir gleich den allgemeinen Fall betrachtet.

Seien G, H, K Gruppen und $a: K \rightarrow G, b: K \rightarrow H$ Gruppenhomomorphismen, so definiert man das *amalgamierte Produkt* von G und H über K durch

$$G *_K H = G * H / (\{ a(k)b(k)^{-1} \mid k \in K \}) .$$

Das amalgamierte Produkt erfüllt die universelle Eigenschaft eines Pushouts in der Kategorie $\mathcal{G}r\mathcal{P}$.



Seien also $i: G \rightarrow G *_K H$ und $j: H \rightarrow G *_K H$ die natürlichen Homomorphismen, sei L eine Gruppe und seien $g: G \rightarrow L, h: H \rightarrow L$ Homomorphismen mit $g \circ a = h \circ b: K \rightarrow L$, dann existiert genau ein Gruppenhomomorphismus

$$f: G *_K H \rightarrow L \text{ mit } g = f \circ i \text{ und } h = f \circ j .$$

Sei $X = U \cup V$ topologischer Raum mit U, V offen. Dann können wir X ebenfalls als Pushout längs der Inklusionen $U \cap V \hookrightarrow U$ und $U \cap V \hookrightarrow V$ auffassen, vergleiche Folgerung 1.86. Wenn wir einen Basispunkt $x \in U \cap V$ festlegen, erhalten wir einen Pushout $(X, x) = (U, x) \cup_{(U \cap V, x)} (V, x)$ in der Kategorie $\mathcal{T}op_+$.

Der Satz von Seifert-van Kampen besagt, dass der Funktor π_1 den Pushout in $\mathcal{T}op_+$ auf den Pushout in $\mathcal{G}r\mathcal{P}$ abbildet, falls $U \cap V$ wegzusammenhängend ist, das heißt

$$\pi_1((U, x) \cup_{(U \cap V, x)} (V, x)) \cong \pi_1(U, x) *_{\pi_1(U \cap V, x)} \pi_1(V, x) .$$

Man beachte: Ein beliebiger Funktor $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ muss den Pushout in \mathcal{C} nicht auf den in \mathcal{D} abbilden, falls beide Pushouts existieren. Das zeigt bereits Beispiel 2.41 (1). Im allgemeinen erhält man nur einen Morphismus vom Pushout der Bilder unter \mathcal{F} in das Bild des Pushouts unter \mathcal{F} , siehe Übung 2.85.

2.43. BEISPIEL. Wir betrachten $S^n = U_+ \cup U_- \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit $U_{\pm} = S^n \setminus \{(0, \dots, 0, \mp 1)\}$ wie in Beispiel 1.104 (2). Die stereographische Projektion liefert Homöomorphismen $U_+ \cong \mathbb{R}^n \cong U_-$, also sind U_{\pm} zusammenziehbar. Schließlich ist S^{n-1} ein Deformationsretrakt von $U_+ \cap U_-$, und somit wegzusammenhängend für $n \geq 2$. Mit $x = (1, 0, \dots, 0)$ erhalten wir für $n \geq 2$, dass

$$\pi_1(S^n, x) = \pi_1(U_+, x) *_{\pi_1(U_+ \cap U_-, x)} \pi_1(U_-, x) = \{e\} *_{\pi_1(S^{n-1}, x)} \{e\} = \{e\} ,$$

also sind Sphären einfach zusammenhängend ab Dimension 2.

Man ist versucht, das obige Beispiel so zu begründen, dass man jede Schleife in S^n für $n \geq 2$ von einem Punkt $y \in S^n$, der nicht getroffen wird, zum Basispunkt x „wegdrückt“. Beispiel 1.21 zeigt aber, dass man Schleifen konstruieren kann, die jeden Punkt in S^n treffen. Also braucht man ein komplizierteres Argument.

2.44. BEISPIEL. Zur Vorbereitung auf die Übungsaufgabe 2.81 zu den Borromäischen Ringen geben wir drei weitere Beispiele. Dabei betrachten wir die Fundamentalgruppen von Komplementen eines oder mehrerer Kreise im \mathbb{R}^3 .

- (1) Betrachte $S^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$. Wir addieren einen Punkt im Unendlichen, indem wir $U = \mathbb{R}^3 \setminus S^1$ via stereographischer Projektion in $S^3 \setminus S^1$ einbetten. Hierbei wird S^1 zu einem Großkreis, und der fehlende Punkt in S^3 sei $e_4 = (0, 0, 0, 1)$. Es sei V die obere Halbkugel, dann ist S^2 ein Deformationsretrakt von $U \cap V$. Also gilt nach Satz 2.39 mit $x = U \cap V$, dass

$$\pi_1(S^3 \setminus S^1, x) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1, x) *_{\pi_1(S^2, x)} \pi_1(V, x) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1, x) .$$

Jetzt bilden wir $S^3 \setminus S^1$ durch stereographische Projektion an einem Punkt der S^1 nach \mathbb{R}^3 ab und erhalten einen Homöomorphismus $S^3 \setminus S^1 \cong \mathbb{R}^3 \setminus (\{(0,0)\} \times \mathbb{R})$. Aber S^1 ist ein Deformationsretrakt davon, so dass schließlich

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1) \cong \pi_1(S^3 \setminus S^1) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}.$$

- (2) Wir betrachten jetzt das Komplement zweier „unverlinkter“ Kreise im Raum, genauer $Y = \mathbb{R}^3 \setminus (S^1 \times \{-1, 1\})$. Mit Beispiel (1) und Seifert-van Kampen folgt

$$\begin{aligned} \pi_1(Y) &\cong \pi_1((\mathbb{R}^2 \times (-\infty, 1)) \setminus (S^1 \times \{-1\})) *_{\pi_1(\mathbb{R}^2 \times (-1, 1))} \pi_1((\mathbb{R}^2 \times (-1, \infty)) \setminus (S^1 \times \{1\})) \\ &\cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Eine freies Produkt von k Kopien von \mathbb{Z} nennt man auch die *freie Gruppe F_k mit k Erzeugern*.

- (3) Wir betrachten im Gegensatz dazu das Komplement zweier „einfach verlinkter“ Kreise im \mathbb{R}^3 , nämlich

$$Z = \mathbb{R}^3 \setminus (\{(\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \mid \varphi \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, \cos \psi + 1, \sin \psi) \mid \psi \in \mathbb{R}\}).$$

Wie in (1) fügen wir einen Punkt im Unendlichen hinzu, dann hat Z die gleiche Fundamentalgruppe wie

$$S^3 \setminus (\{(\cos \varphi, \sin \varphi, 0, 0) \mid \varphi \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, 0, \cos \psi, \sin \psi) \mid \psi \in \mathbb{R}\}).$$

Ein Deformationsretrakt hiervon ist der Clifford-Torus

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \varphi, \sin \varphi, \cos \psi, \sin \psi) \mid \varphi, \psi \in \mathbb{R} \right\} \cong S^1 \times S^1,$$

und nach Übung 2.74 gilt

$$\pi_1(Z) \cong \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \not\cong \pi_1(Y).$$

Also kann die Fundamentalgruppe des Komplementes erkennen, ob man einen oder zwei Kreise entfernt hat, und ob diese „verlinkt“ waren oder nicht. Auch für Knoten im \mathbb{R}^3 ist die Fundamentalgruppe des Komplementes eine sehr mächtige Invariante. Allerdings kann man zwei auf verschiedene Weisen definierten Gruppen nicht immer ohne weiteres ansehen, ob sie isomorph sind oder nicht.

2.e. Überlagerungen

Wir betrachten Überlagerungen $\tilde{X} \rightarrow X$ eines gegebenen topologischen Raumes X , und vergleichen die Fundamentalgruppen von \tilde{X} und X miteinander.

Wir erinnern uns an die Definition 2.23 von Überlagerungen. Eine Überlagerung heißt universell, wenn sie zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist.

2.45. BEISPIEL. In Beispiel 2.24 hatten wir bereits eine universelle Überlagerung $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ kennengelernt. Andere zusammenhängende Überlagerungen von $S^1 \subset \mathbb{C}$ sind von der Form

$$p_k: S^1 \rightarrow S^1 \quad \text{mit} \quad z \mapsto z^k$$

für $0 < k \in \mathbb{Z}$. Es gilt

$$\text{im } p_{k*} = k\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1, 1).$$

Wir werden später sehen, dass das bis auf Isomorphie alle zusammenhängenden Überlagerungen der S^1 sind.

Unter einem *Lift* einer Abbildung $F: Y \rightarrow X$ in eine Überlagerung $p: \tilde{X} \rightarrow X$ verstehen wir eine Abbildung $\tilde{F}: Y \rightarrow \tilde{X}$ mit $F = p \circ \tilde{F}$. Wenn wir von punktierten Räumen und Abbildungen $(Y, y_0) \rightarrow (X, x_0) \leftarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ sprechen, erwarten wir von einem Lift ebenfalls, dass er y_0 auf \tilde{x}_0 abbildet.

Wir erinnern uns an den Homotopie-Liftungssatz 2.25 und insbesondere an den Beweis des Satzes 2.26. Dort hatten wir für $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ gesehen, dass wir jede Schleife in (X, x_0) zu einem Weg in \tilde{X} mit vorgegebenem Anfangspunkt eindeutig liften können, und dass relativ homotope Schleifen zu relativ homotopen Wegen liften. Das dortige Argument überträgt sich auf alle Überlagerungen.

2.46. SATZ. Sei $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung, dann ist die Abbildung

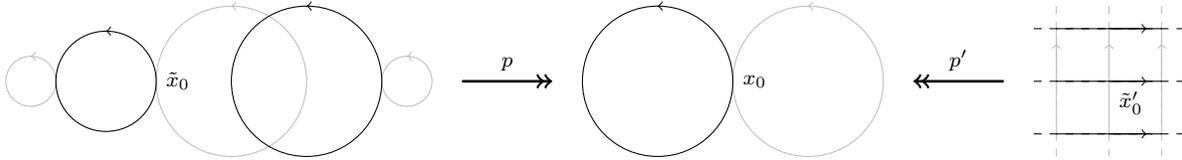
$$p_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

injektiv, und für $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ liegt $[\gamma]$ genau dann im Bild von p_* , wenn γ einen Lift $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ mit $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1) = \tilde{x}_0$ besitzt.

BEWEIS. Sei $\tilde{\gamma}: S^1 \rightarrow \tilde{X}$ eine Schleife, so dass $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ relativ zu Anfangs- und Endpunkt nullhomotop ist. Dann lässt sich die Nullhomotopie mit Satz 2.25 zu einer relativen Nullhomotopie von $\tilde{\gamma}$ liften. Also ist p_* injektiv.

Eine Schleife γ , deren Lift $\tilde{\gamma}$ mit Anfangspunkt \tilde{x}_0 wiederum eine Schleife ist, liegt im Bild von p_* , da $p_*[\tilde{\gamma}] = [p \circ \tilde{\gamma}] = [\gamma]$. Sei umgekehrt γ eine Schleife mit $[\gamma] \in \text{im}(p_*)$. Dann ist γ homotop zu einer Schleife der Form $\gamma' = p \circ \tilde{\gamma}'$. Liften der Homotopie liefert eine Homotopie zwischen dem Lift $\tilde{\gamma}$ von γ mit $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$ und $\tilde{\gamma}'$, also folgt $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}'(1) = \tilde{x}_0$. \square

2.47. BEISPIEL. Die „Acht“ $X = S^1 \vee S^1$ hat sehr viele paarweise nicht isomorphe Überlagerungen, siehe [H1]. Wir werden sehen, dass das Bild im p_* der Fundamentalgruppe $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ in $\pi_1(X, x_0)$ die Überlagerung $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ bereits bis auf Isomorphie festlegt.



Wir wollen allgemeiner fragen, wann sich eine Abbildung $F: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ zu einer Abbildung $\tilde{F}: (Y, t_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ mit $F = p \circ \tilde{F}$ liften lässt.

Wir erinnern uns an den Begriff „lokal wegzusammenhängend“ aus Definition 1.95. Falls Y lokal wegzusammenhängend ist, sind alle Wegzusammenhangskomponenten sowohl offen als auch abgeschlossen. Also ist Y in diesem Fall genau dann wegzusammenhängend, wenn Y zusammenhängend ist.

2.48. SATZ (Liftungssatz). Sei $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung, und sei Y zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Dann lässt sich eine Abbildung $F: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ genau dann zu einer Abbildung $\tilde{F}: (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ mit $F = p \circ \tilde{F}$ liften, wenn

$$\text{im } F_* \subset \text{im } p_* \subset \pi_1(X, p). \quad (*)$$

In diesem Fall ist der Lift \tilde{F} durch $\tilde{F}(y_0) = \tilde{x}_0$ eindeutig bestimmt.

Falls Y nicht zusammenhängend ist, müssen wir den Lift auf jeder Wegzusammenhangskomponente von Y einzeln konstruieren; eventuell benötigen wir dazu jeweils andere Basispunkte.

BEWEIS. Die Aussage „ \implies “ ist klar, da aus der Existenz von \tilde{F} bereits

$$\text{im } F_* = \text{im}(p_* \circ \tilde{F}_*) \subset \text{im } p_*$$

folgt.

Sei umgekehrt (*) erfüllt. Wir definieren einen Lift \tilde{F} wie folgt. Da Y zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist, ist Y auch wegzusammenhängend. Also können wir zu jedem $y \in Y$ einen Pfad σ von y_0 nach y angeben, und finden dazu wie im Beweis von Satz 2.26 einen eindeutigen Lift $\tilde{\tau}$ von $\tau = F \circ \sigma$ mit Anfangspunkt $\tilde{\tau}(0) = x_0$. Wir setzen $\tilde{F}(y) = \tilde{\tau}(1)$. Hieraus folgt auch bereits die Eindeutigkeit von \tilde{F} .

Um zu zeigen, dass \tilde{F} wohldefiniert ist, wählen wir einen weiteren Weg σ' von y_0 nach y und konstruieren einen Lift $\tilde{\tau}'$ von $\tau' = F \circ \sigma'$ wie oben. Dann ist $\tau'\tilde{\tau} \in \text{im } F_* \subset \text{im } p_*$ nach (*), also existiert ein geschlossener Lift $\tilde{\tau}'\tilde{\tau}$ nach Satz 2.46. Das heisst, ein Lift $\tilde{\tau}$ von $\tilde{\tau}$ startet bei $\tilde{\tau}'(1)$ und führt zu \tilde{x}_0 . Wegen der Eindeutigkeit des Lifts ist $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}'$, und es folgt $\tilde{\tau}(1) = \tilde{\tau}'(1)$, was zu zeigen war.

Zur Stetigkeit von \tilde{F} sei $y \in Y$, und sei U eine gleichmäßig überlagerte Umgebung von $x = F(y)$ in X . Dann existiert eine Umgebung $\tilde{U} \subset \tilde{X}$ von $\tilde{x} = \tilde{F}(y)$, so dass $p: \tilde{U} \rightarrow U$ ein Homöomorphismus ist. Hierbei können wir offensichtlich U so wählen, dass \tilde{U} als Umgebung von \tilde{y} beliebig klein wird. Wegen Stetigkeit von F ist $F^{-1}(U)$ offen, und es existiert eine wegzusammenhängende Umgebung $V \subset F^{-1}(U)$ von y .

Sei σ ein Weg von y_0 nach y . Sei $\tilde{\tau}$ der Lift von $\tau = F \circ \sigma$ wie oben, so dass also $\tilde{\tau}(1) = \tilde{F}(y)$. Sei $y' \in V$, und sei α ein Weg von y nach y' in V . Da $\beta = F \circ \alpha$ in U verläuft, hat β einen Lift $\tilde{\beta} = (p|_{\tilde{U}})^{-1} \circ \beta$ in \tilde{U} . Dann ist $\tilde{\tau}\tilde{\beta}$ ein Lift von $\tau\beta = F \circ (\sigma\alpha)$, und es folgt

$$\tilde{F}(y') = (\tilde{\tau}\tilde{\beta})(1) = \tilde{\beta}(1) \in \tilde{U}.$$

Also gilt $\tilde{F}(V) \subset \tilde{U}$, und da \tilde{U} beliebig klein gewählt werden kann folgt die Stetigkeit von \tilde{F} bei y . Da y beliebig war, ist \tilde{F} stetig. \square

2.49. BEMERKUNG. Der lokale Wegzusammenhang wurde nur eingesetzt, um die Stetigkeit von \tilde{F} nachzuweisen, er ist aber nötig für die Existenz des Liftes, siehe Übung 2.88. Zur Eindeutigkeit von \tilde{F} reicht Zusammenhang jedoch aus: Sei etwa $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung, und sei Y zusammenhängend. Seien $\tilde{F}, \tilde{F}': (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ Lifts von F . Dann ist die Menge

$$\{y \in Y \mid \tilde{F}(y) = \tilde{F}'(y)\} \subset Y$$

offen, abgeschlossen und nicht leer, also stimmen die Lifts auf ganz Y überein.

Eine Gruppenwirkung einer Gruppe G auf einem topologischen Raum X ist ein Homomorphismus von G in die Gruppe der Homöomorphismen von X . Unter Umständen trägt der Quotient X/G , dessen Punkte die Bahnen der G -Wirkung sind, wieder die Struktur eines topologischen Raumes, so dass die kanonische Abbildung $X \rightarrow X/G$ eine Überlagerung ist. Wir beschreiben zunächst diese Konstruktion. Später überlegen wir uns, welche Überlagerungen von Gruppenwirkungen kommen.

2.50. DEFINITION. Eine (*Gruppen-*) *Wirkung* oder *Operation* einer Gruppe Γ auf einem topologischen Raum X ist ein Gruppenhomomorphismus ρ von Γ in die Gruppe $\text{Aut } X$ der Homöomorphismen von X . Schreibe ρ_γ oder kurz $\gamma: X \rightarrow X$ für das Bild von $\gamma \in \Gamma$.

Eine *Bahn* von ρ (oder auch kurz von Γ) ist eine Teilmenge der Form

$$\rho_\Gamma(x) = \Gamma x = \{\rho_\gamma(x) \mid \gamma \in \Gamma\} \subset X$$

mit $x \in X$. Der *Quotient*

$$X/\Gamma = \{\Gamma x \mid x \in X\} \subset \mathcal{P}X$$

ist die Menge aller Bahnen. Es bezeichne

$$p: X \twoheadrightarrow X/\Gamma \quad \text{mit} \quad p(x) = \Gamma x$$

die Projektionsabbildung. Der Raum X/Γ trage die Quotiententopologie unter p .

Es folgen zwei Bedingungen an Gruppenwirkungen, die sicherstellen, dass die Projektionsabbildung eine Überlagerung ist.

2.51. DEFINITION. Eine Gruppenwirkung von Γ auf X heißt *frei*, wenn für alle $x \in X$ und alle $\gamma \in \Gamma$ aus $\gamma(x) = x$ bereits $\gamma = e$ folgt. Sie heißt *eigentlich diskontinuierlich*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U in X besitzt, so dass $\gamma(U) \cap U = \emptyset$ falls $\gamma(x) \neq x$.

Wenn Γ frei wirkt, kann $\gamma(x) = x$ nur für das neutrale Element gelten.

2.52. BEISPIEL. Wir geben verschiedene Beispiele von Gruppenwirkungen.

- (1) Es sei $X = \mathbb{R}$, $\Gamma = \mathbb{Z}$ und $\gamma(x) = x + \gamma$. Dann ist der Quotient \mathbb{R}/\mathbb{Z} homöomorph zu $S^1 \subset \mathbb{C}$ wie in Beispiel 2.24 via

$$\mathbb{Z}x \mapsto e^{2\pi ix} .$$

Diese Wirkung ist frei und eigentlich diskontinuierlich. Wähle dazu als Umgebung von $x \in \mathbb{R}$ das Intervall $U = (x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2})$, dann gilt $(x + n - \frac{1}{2}, x + n + \frac{1}{2}) \cap (x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}) = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

- (2) Es sei $X = S^1 \subset \mathbb{C}$, $\Gamma = \mathbb{Z}$, $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ eingekürzter Bruch und $\gamma(z) = e^{2\pi ir\gamma} \cdot z$. Elemente $\gamma \in q\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ wirken trivial, das heißt, es gilt $\gamma(z) = z$ für alle $z \in S^1$. Daher ist diese Wirkung nicht frei. Sie ist aber eigentlich diskontinuierlich: zu $z \in S^1$ wähle

$$U = \left\{ e^{2\pi i\varphi} \cdot z \mid \varphi \in \left(-\frac{1}{2q}, \frac{1}{2q} \right) \right\} ,$$

dann gilt $U \cap \rho_n(U) = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{Z} \setminus q\mathbb{Z}$.

Die Faktorgruppe $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ wirkt ebenfalls auf S^1 . Der Quotient ist homöomorph zu S^1 via

$$(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})z \mapsto z^q \in S^1 ,$$

und die Abbildung $S^1 \rightarrow S^1$ ist dieselbe wie in Beispiel 2.45. Diese Wirkung ist sowohl frei als auch eigentlich diskontinuierlich.

- (3) Es seien X , Γ wie in (2), aber $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dann liegen alle Bahnen dicht in X . Da jede offene Menge alle Bahnen schneidet, ist X/Γ jetzt eine überabzählbare Menge mit der Klumpentopologie. Die Wirkung ist zwar frei, aber nicht eigentlich diskontinuierlich. Denn die Bahn von $z \in S^1$ trifft jede noch so kleine Umgebung U : Zu jeder Umgebung U von $z \in S^1$ existiert also $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $\rho_n(z) \in U$, insbesondere $U \cap \rho_n(U) \neq \emptyset$.

2.53. PROPOSITION. *Es sei ρ eine freie und eigentlich diskontinuierliche Wirkung einer Gruppe Γ auf X . Dann ist die Projektionsabbildung $p: X \rightarrow X/\Gamma$ eine Überlagerung.*

BEWEIS. Es sei $y = \Gamma x \in X/\Gamma$, und es sei U eine Umgebung von x wie in Definition 2.51. Es sei $V = p(U) \in X/\Gamma$, dann folgt aus Definition 2.51, dass

$$p^{-1}(V) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(U) \subset X .$$

Wir dürfen U als offen annehmen. Dann sind alle $\gamma(U)$ und somit auch ihre Vereinigung $p^{-1}(V)$ offen. Und $A \subset p^{-1}(V)$ ist genau dann offen in X , wenn alle $A \cap \gamma(U)$ offen sind. Das heißt, $B \subset V$ ist genau dann offen in der Quotiententopologie, wenn $p^{-1}(B) \cap \gamma(U)$ für alle $\gamma \in \Gamma$ offen ist, und dafür reicht es, dass $p^{-1}(B) \cap U$ offen ist. Also erhalten wir den gesuchten Homöomorphismus

$$p^{-1}(V) \cong \prod_{\gamma \in \Gamma} \gamma(U) \cong \Gamma \times U ,$$

das heißt, $V \subset X/\Gamma$ ist gleichmäßig überlagert. Da das für alle $y \in X/\Gamma$ funktioniert, folgt unsere Behauptung. \square

2.54. BEMERKUNG. Der Raum X/Γ trägt die Quotiententopologie. Nach Bemerkung 1.85 ist nicht klar, dass sich „schöne“ Eigenschaften von X auf den Quotienten vererben. Als Beispiel betrachte den normalen Raum $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Hierauf wirkt \mathbb{Z} durch $n(x,y) = (2^n x, 2^{-n} y)$. Da $(0,0) \notin X$, ist diese Wirkung frei und eigentlich diskontinuierlich. Sei etwa $(x,y) \in X$, dann können wir als Umgebung U wie in Definition 2.51 von x die Menge $(2^{-1/2}x, 2^{1/2}x) \times \mathbb{R}$ wählen, falls $x \neq 0$, oder die Menge $\mathbb{R} \times (2^{-1/2}y, 2^{1/2}y)$, falls $y \neq 0$.

Allerdings ist der Quotient nicht einmal Hausdorffsch. Die Punkte $a = p(x,0)$ und $b = p(0,y) \in X/\Gamma$ lassen sich nicht trennen, denn für noch so kleine Umgebungen U von a und V von b gibt es ein hinreichend großes $n \in \mathbb{Z}$ so dass

$$U \ni p(x, 2^{-n}y) = p(2^{-n}x, y) \in V .$$

2.55. DEFINITION. Eine *Decktransformation* einer Überlagerung $p: \tilde{X} \rightarrow X$ ist ein Homöomorphismus $F: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$, so dass $p \circ F = p$. Eine zusammenhängende Überlagerung heißt *normal*, wenn es zu je zwei $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1)$ eine Decktransformation F mit $F(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ gibt.

Warnung: „normal“ hat hier nichts mit (T1) und (T4) zu tun, sondern mit dem Begriff des Normalteilers, siehe Folgerung 2.58.

2.56. BEMERKUNG. Die Decktransformationen einer gegebenen Überlagerung $p: \tilde{X} \rightarrow X$ bilden stets eine Gruppe Γ , die *Decktransformationsgruppe*. Sei \tilde{X} zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Da jede Decktransformation ein Lift \tilde{p} von $p: \tilde{X} \rightarrow X$ mit $\tilde{p}(\tilde{x}_0) = F(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ ist, wirkt Γ wegen der Eindeutigkeit der Lifte nach Satz 2.48 frei. Indem wir Urbilder gleichmäßig überlagerter Umgebungen von Punkten in X betrachten, sehen wir, dass Γ auch eigentlich diskontinuierlich wirkt. Falls $p: \tilde{X} \rightarrow X$ normal ist, folgt $X \cong \tilde{X}/\Gamma$.

Seien umgekehrt X, Γ wie in Proposition 2.53 und X zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Dann ist $p: X \rightarrow X/\Gamma$ eine normale Überlagerung, und Γ ist die Gruppe der Decktransformationen. Also beschreiben „zusammenhängende, lokal wegzusammenhängende, normale Überlagerungen“ und „Quotienten zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender Räume nach freien und eigentlich diskontinuierlichen Gruppenwirkungen“ das gleiche Phänomen aus zwei verschiedenen Blickwinkeln.

2.57. BEISPIEL. Wir haben in Beispiel 2.52 schon gesehen, dass die zusammenhängenden Überlagerungen der S^1 in Beispiel 2.45 normal sind. Das linke Bild in Beispiel 2.47 besitzt keine Decktransformationen außer der Identität, ist also nicht normal. Für das rechte Bild erhalten wir eine Decktransformationsgruppe $\Gamma \cong \mathbb{Z}^2$, also ist dieses Beispiel normal. Dreht man aber nur bei je einer horizontalen und vertikalen Geraden in dem Bild die Pfeile um, so erhält man eine neue Überlagerung ohne nichttriviale Decktransformationen.

2.58. FOLGERUNG (aus dem Liftungssatz 2.48). *Es sei $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine zusammenhängende, lokal wegzusammenhängende Überlagerung, seien $x_0 \in X$ und $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$, und sei $\tilde{\gamma}$ ein Weg in \tilde{X} von \tilde{x}_0 nach \tilde{x}_1 . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

- (1) *Es existiert eine Decktransformation $F: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ mit $F(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$.*
- (2) *Es gilt $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) \subset \pi_1(X, x_0)$.*
- (3) *Für $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ gilt $[\gamma]^{-1} p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) [\gamma] = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.*

Insbesondere ist p genau dann eine normale Überlagerung, wenn $\text{im } p_$ Normalteiler von $\pi_1(X, x_0)$ ist. In diesem Fall ist $\Gamma = \pi_1(X, x_0) / \text{im}(p_*)$ isomorph zur Gruppe der Decktransformationen.*

BEWEIS. Da Decktransformationen invertierbar sind und die Abbildung p liften, folgt die Äquivalenz von (1) und (2) unmittelbar aus Satz 2.48.

Wie im Satz 2.14 liefert $\sigma \mapsto \bar{\gamma} \sigma \gamma$ einen Isomorphismus von $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ mit $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$. Es folgt

$$p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) = [\gamma]^{-1} p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) [\gamma] ,$$

und daraus die Äquivalenz von (2) und (3). Da sich je zwei Wege $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ von \tilde{x}_0 nach \tilde{x}_1 bis auf Homotopie nur bis auf Verkettung mit der Schleife $\tilde{\gamma}_2 \tilde{\gamma}_1^{-1}$ am Punkt \tilde{x}_0 unterscheiden, kommt es nicht auf die Wahl von $\tilde{\gamma}$ an.

Wenn $\text{im } p_*$ ein Normalteiler ist, gilt (3), wegen (1) existieren alle Decktransformationen, und p ist normal. Sei umgekehrt p normal, also gilt (1) für alle $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$. Da sich jede Schleife γ in X zu einem Weg $\tilde{\gamma}$ von \tilde{x}_0 zu einem Punkt in $p^{-1}(x_0)$ liften lässt, folgt aus (3), dass $\text{im } p_*$ ein Normalteiler ist.

Um eine Wirkung von $\pi_1(X, x_0)$ auf \tilde{X} zu konstruieren, betrachten wir zu $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ die nach dem Liftungssatz 2.48 eindeutige Decktransformation $\rho_{[\gamma]}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$, die den Basispunkt \tilde{x}_0 auf den Endpunkt $\tilde{\gamma}(1)$ des Lifts $\tilde{\gamma}$ von γ mit $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$ abbildet.

Wir müssen zeigen, dass ρ einen Gruppenhomomorphismus liefert. Sei dazu $[\gamma_1] \in \pi_1(X, x_0)$, und sei $\tilde{\gamma}_1$ der Lift von γ_1 mit $\tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{x}_0$. Dann folgt $\rho_{[\gamma_1]}(\tilde{x}_0) = \tilde{\gamma}_1(1)$. Außerdem ist $\tilde{\gamma}' = \rho_{[\gamma]} \circ \tilde{\gamma}$ ein Lift von γ mit $\tilde{\gamma}'(0) = \tilde{\gamma}_1(1)$, also ist die Verkettung $\widetilde{\gamma_1 \gamma} = \tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}'$ ein Lift von $\gamma_1 \gamma$ mit $\widetilde{\gamma_1 \gamma}(0) = \tilde{x}_0$. Es folgt

$$\rho_{[\gamma_1]}(\rho_{[\gamma]}(\tilde{x}_0)) = \rho_{[\gamma_1]}(\tilde{\gamma}(1)) = \tilde{\gamma}'(1) = \widetilde{\gamma_1 \gamma}(1) = \rho_{[\gamma_1 \gamma]}(\tilde{x}_0).$$

Wegen der Eindeutigkeitsaussage im Liftungssatz 2.48 folgt $\rho_{[\gamma_1]} \circ \rho_{[\gamma]} = \rho_{[\gamma_1 \gamma]}$, und wir erhalten eine Gruppenwirkung.

Da nach Satz 2.46 gerade die Elemente von $\text{im } p_*$ zu Schleifen in (\tilde{X}, \tilde{x}_0) liften, folgt $\ker \rho = \text{im } p_*$, so dass die Gruppe $\Gamma = \pi_1(X, x_0) / \text{im } p_*$ frei und wegen Bemerkung 2.56 auch eigentlich diskontinuierlich auf \tilde{X} wirkt, mit $X \cong \tilde{X} / \Gamma$. \square

2.f. Die universelle Überlagerung

Nach Satz 2.46 bestimmt jede Überlagerung $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Untergruppe $\text{im } p_*$ der Fundamentalgruppe von (X, x_0) . Wir wollen zeigen, dass es für geeignete Räume X umgekehrt zu jeder Untergruppe $G \subset \pi_1(X, x_0)$ bis auf Isomorphie genau eine zusammenhängende Überlagerung $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ mit $\text{im } p_* = G$ gibt. Dazu erinnern wir uns, dass eine Überlagerung nach Definition 2.23 universell heißt, wenn sie zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist. Eine universelle Überlagerung $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ haben wir in Beispiel 2.24 bereits kennengelernt.

Wir werden später sehen, dass die universelle Überlagerung von X jede zusammenhängende Überlagerung von X überlagert, daher der Name. Außerdem kann man jede beliebige (auch nicht zusammenhängende) Überlagerung mit Hilfe der universellen Überlagerung konstruieren.

2.59. DEFINITION. Ein topologischer Raum X heißt *semilokal einfach zusammenhängend*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt, so dass $\text{im}(\pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)) = 0$.

In Übung 2.89 geben wir ein Beispiel für einen Raum, der nicht semilokal einfach zusammenhängend ist.

2.60. SATZ. *Jeder zusammenhängende, lokal wegzusammenhängende topologische Raum hat genau dann eine universelle Überlagerung, wenn er semilokal einfach zusammenhängend ist.*

2.61. BEMERKUNG. Ein topologischer Raum muss nicht lokal wegzusammenhängend sein, um eine Überlagerung zu besitzen, die die universelle Eigenschaft aus Folgerung 2.63 unten zu hat. Allerdings können wir solch eine Überlagerung dann nicht mehr durch unsere Definition von „einfach zusammenhängend“ charakterisieren.

BEWEIS von Satz 2.60. Sei $\tilde{X} \rightarrow X$ eine universelle Überlagerung, sei $U \subset X$ eine wegzusammenhängende, gleichmäßig überlagerte Umgebung von $x \in X$, sei \tilde{U} eine Zusammenhangskomponente von $p^{-1}(U)$ und sei $\tilde{x} \in \tilde{U}$ das Urbild von x in \tilde{U} . Dann folgt $\text{im}(\pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)) = \{e\}$

aus den folgenden kommutativen Diagrammen.

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{U} & \longrightarrow & \tilde{X} & & \pi_1(\tilde{U}, \tilde{x}) & \longrightarrow & \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = \{e\} \\
p|_{\tilde{U}} \downarrow \cong & & \downarrow p & \implies & (p|_{\tilde{U}})_* \downarrow \cong & & p_* \downarrow \\
U & \longrightarrow & X & & \pi_1(U, x) & \longrightarrow & \pi_1(X, x)
\end{array}$$

Für die Rückrichtung nehmen wir zunächst an, es gebe eine universelle Überlagerung. Dann wissen wir nach Satz 2.46, dass eine Schleife γ in X mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ genau dann zu einer Schleife in der universellen Überlagerung liftet, wenn sie in X nullhomotop ist. Wie immer folgt, dass zwei Wege σ, σ' von x_0 nach $x \in X$ genau dann Lifts $\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}'$ mit $\tilde{\sigma}(0) = \tilde{\sigma}'(0) = \tilde{x}_0$ und gleichem Endpunkt $\tilde{x} = \tilde{\sigma}(1) = \tilde{\sigma}'(1)$ haben werden, wenn σ und σ' homotop sind. Also betrachten wir die Menge

$$\tilde{X} = \{ \sigma: [0, 1] \rightarrow X \mid \sigma(0) = x_0 \} / \sim \quad \text{und} \quad p([\sigma]) = \sigma(1),$$

wobei „ \sim “ hier Homotopie relativ zu $\{0, 1\}$ bezeichne. Als Fußpunkt \tilde{x}_0 wählen wir die relative Homotopieklasse der konstanten Schleife am Punkt x_0 .

Sei jetzt $x \in X$. Weil X semilokal einfach zusammenhängend ist, existiert eine Umgebung U von x mit $\text{im}(\pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)) = 0$. Wegen Funktorialität von π_1 überträgt sich diese Eigenschaft auf alle kleineren Umgebungen V von x . Weil X außerdem lokal wegzusammenhängend ist, hat x eine Umgebungsbasis \mathcal{U}_x aus wegzusammenhängenden Umgebungen $V \subset U$ von x .

Für einen Weg $\sigma: [0, 1] \rightarrow X$ mit $\sigma(0) = x_0$ und $V \in \mathcal{U}_{\sigma(1)}$ betrachte

$$U([\sigma], V) = \{ [\sigma\beta] \mid \beta \text{ Weg in } V \text{ mit } \beta(0) = \sigma(1) \} \subset \tilde{X};$$

diese Menge hängt nur von der relativen Homotopieklasse von $[\sigma]$ ab. Dann ist die Abbildung

$$p|_{U([\sigma], V)}: U([\sigma], V) \longrightarrow V \quad \text{mit} \quad [\sigma\beta] \longmapsto \beta(1) \quad (*)$$

eine Bijektion. Surjektivität folgt, da V wegzusammenhängend ist, und Injektivität, da für zwei Wege β, β' in V mit gleichem Anfangspunkt x und gleichem Endpunkt die Schleife $\beta'\beta^{-1}$ in V ja in X zusammenziehbar ist, und somit also auch $[\sigma\beta] = [\sigma\beta'] \in \tilde{X}$.

Wir definieren eine Topologie auf \tilde{X} indem wir zu jedem Punkt $[\sigma] \in \tilde{X}$ die Umgebungsbasis

$$\tilde{\mathcal{U}}_{[\sigma]} = \{ U([\sigma], V) \mid V \in \mathcal{U}_{\sigma(1)} \}$$

vorgeben. Insbesondere ist $\tilde{U} \subset \tilde{X}$ genau dann offen, wenn für alle $[\sigma] \in \tilde{U}$ eine Menge $U([\sigma], V) \in \tilde{\mathcal{U}}_{[\sigma]}$ mit $U([\sigma], V) \subset \tilde{U}$ existiert. Man überlegt sich, dass die Abbildung $p: U([\sigma], V) \rightarrow V$ aus (*) für alle $U([\sigma], V) \in \tilde{\mathcal{U}}_{[\sigma]}$ ein Homöomorphismus ist. Insbesondere ist p stetig, und alle $U([\sigma], V)$ sind gleichmäßig überlagert. Wir haben also eine Überlagerung konstruiert.

Der Raum \tilde{X} ist wegzusammenhängend, denn für jeden Punkt $[\sigma]$ ist $s \mapsto [\sigma|_{[0, s]}]$ ein Weg in \tilde{X} vom konstanten Weg \tilde{x}_0 zum Punkt $[\sigma]$. Er ist auch einfach zusammenhängend. Denn sei $\tilde{\gamma}$ eine Schleife in \tilde{X} , also eine Familie von Wegen $\gamma_t: [0, 1] \rightarrow X$, so dass $t \mapsto [\gamma_t]$ bezüglich der obigen Topologie stetig ist. Dann zerlegen wir $[0, 1]$ in Teilintervalle $[t_i, t_{i+1}]$, so dass jedes Teilintervall in eine Menge der Form $U([\sigma_i], V_i)$ abgebildet wird. Durch Induktion über i schließen wir, dass $p \circ \tilde{\gamma}|_{[0, t_i]}$ in X zu γ_{t_i} homotop ist. Da $[\gamma_1] = \tilde{x}_0$ zur konstanten Schleife homotop ist, ist also $p_*[\tilde{\gamma}] = [\gamma_1] = 0 \in \pi_1(X, x_0)$. Aus Satz 2.46 folgt $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = 0$. \square

2.62. BEMERKUNG. Auf der soeben konstruierten universellen Überlagerung $p: \tilde{X} \rightarrow X$ wirkt die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ durch $[\gamma] \cdot [\sigma] = [\gamma\sigma]$. Außerdem folgt aus obigem Beweis, dass $\tilde{X}/\pi_1(X, x_0) \cong X$. Das passt zu Folgerung 2.58, da die Gruppe $\text{im } p_* = \{e\}$ trivial und insbesondere ein Normalteiler von $\pi_1(X, x_0)$ ist.

Die universelle Überlagerung erfüllt eine universelle Eigenschaft und ist daher bis auf eindeutige Isomorphie von punktierten Überlagerungen eindeutig bestimmt.

2.63. FOLGERUNG. *Es sei (X, x_0) zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, und es sei $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine universelle Überlagerung.*

- (1) *Es sei $q: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine weitere Überlagerung. Dann existiert genau eine Abbildung $r: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (Y, y_0)$ mit $p = q \circ r$, und r ist ebenfalls eine universelle Überlagerung von Y .*
- (2) *Sei insbesondere $p': (\tilde{X}', \tilde{x}'_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine weitere universelle Überlagerung, dann existiert ein eindeutiger Homöomorphismus $F: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (\tilde{X}', \tilde{x}'_0)$, so dass $p = p' \circ F$.*

Wenn Y in (1) nicht zusammenhängend ist, trifft r zwar nur die Zusammenhangskomponente von y_0 , ist aber nach unserer Definition 2.23 dennoch eine universelle Überlagerung.

BEWEIS. Da \tilde{X} einfach zusammenhängend ist, folgt die Existenz und Eindeutigkeit eines Liftes r von p aus Satz 2.48, da $\{e\} = \text{im } p_* \subset \text{im } q_*$. Um zu sehen, dass r eine Überlagerung ist, wählen wir zu $y \in Y$ eine wegzusammenhängende Umgebung U von $x = q(y)$, die sowohl von p als auch von q gleichmäßig überlagert wird. Dann sind die Wegzusammenhangskomponenten von $p^{-1}(U)$ und $q^{-1}(U)$ jeweils homöomorph zu U via p beziehungsweise q . Sei $V \subset Y$ die Wegzusammenhangskomponente von $q^{-1}(U)$, die y enthält. Da $p = q \circ r$, und da stetige Abbildungen zusammenhängende Mengen auf zusammenhängende Mengen abbilden, ist $r^{-1}(V) \subset p^{-1}(U)$ eine disjunkte Vereinigung von Wegzusammenhangskomponenten von $p^{-1}(U)$. Also ist r eine Überlagerung von Y , und da \tilde{X} einfach zusammenhängend ist, sogar eine universelle. □

Die zweite Aussage zeigt man mit dem üblichen universellen Trick.

Wir wollen diese Folgerung benutzen, um zu zeigen, dass die Kategorie aller Überlagerungen eines Raumes X mit universeller Überlagerung wie oben zu einer Kategorie äquivalent ist, die nur von $\pi_1(X, x_0)$ abhängt.

2.64. DEFINITION. Ein Funktor $\mathcal{F}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ist eine *Äquivalenz von Kategorien*, wenn er

- (1) *essentiell surjektiv* ist, das heißt, wenn zu jedem $B \in \text{Obj}(\mathcal{B})$ ein $A \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ mit $\mathcal{F}A \cong B$ existiert, und
- (2) *volltreu* ist, das heißt, wenn für alle $A, C \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ die Abbildung $\mathcal{F}: \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, C) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}C)$ eine Bijektion ist.

In dem Wort „volltreu“ steht „voll“ für die Surjektivität und „treu“ für die Injektivität der obigen Abbildung.

Es sei (X, x_0) zusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend. Wir betrachten also eine Kategorie, deren Objekte gerade punktierte, zusammenhängende Überlagerungen von (X, x_0) sind, und für $p: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$, $q: (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$ seien die Morphismen $F: p \rightarrow q$ gerade punktierte Abbildungen $r: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ mit $p = q \circ r$.

Außerdem betrachten wir eine Kategorie, deren Objekte gerade Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$ und deren Morphismen gerade die Inklusionsabbildungen sind, also

$$\text{Hom}(H, G) = \begin{cases} \{H \hookrightarrow G\} & \text{falls } H \subset G, \text{ und} \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Von der ersten in die zweite Kategorie erhalten wir einen Funktor, der $p: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ auf $\text{im } p_* \subset \pi_1(X, x_0)$ abbildet. Für eine weitere Überlagerung $q: (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$ existiert nach dem Liftungssatz 2.48 höchstens eine punktierte Abbildung $r: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$, und zwar genau dann, wenn $\text{im } p_* \subset \text{im } q_*$. Somit erhalten wir einen Funktor, und er ist volltreu. Er ist auch essentiell surjektiv, denn zu $G \subset \pi_*(X, x_0)$ können wir die punktierte Überlagerung $(\tilde{X}/G, [\tilde{x}_0]) \rightarrow (X, x_0)$

betrachten. In gewissem Sinne ist $G \mapsto ((\tilde{X}/G, [\tilde{x}_0]) \rightarrow (X, x_0))$ also invers zum obigen Funktor, und zwar bis auf eindeutige Isomorphismen.

Allgemeiner kann man auch beweisen, dass die Kategorie aller Überlagerungen äquivalent ist zur Kategorie aller Gruppenwirkungen von $\pi_1(X, x_0)$ auf (diskreten) Mengen. Diese Kategorie umfasst die Kategorie der Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$, wobei man einer Untergruppe $\Gamma \subset \pi_1(X, x_0)$ die Menge der Rechtsnebenklassen $M = \pi_1(X, x_0)/\Gamma$ zuordnet. Um aus einer diskreten Menge M mit $\pi_1(X, x_0)$ -Wirkung eine Überlagerung zu konstruieren, betrachtet man den Quotienten

$$\tilde{X} \times_{\Gamma} M = (\tilde{X} \times M)/\Gamma,$$

wobei γ auf $\tilde{X} \times M$ durch $\gamma(\tilde{x}, m) = (\gamma\tilde{x}, \gamma m)$ wirkt. Die Bahnen der Γ -Wirkung auf M entsprechen genau den Zusammenhangskomponenten der Überlagerung $\tilde{X} \times_{\Gamma} M$. Die obige Zuordnung lässt sich zu einem Funktor ausbauen, von dem man wieder zeigen kann, dass er eine Äquivalenz von Kategorien liefert.

Einen ähnlichen Sachverhalt lernt man in der Algebra kennen. Dort klassifizieren die Untergruppen der Galois-Gruppe genau die Zwischenkörper in einer Galois-Körpererweiterung. Die Rolle der universellen Überlagerung spielt der algebraische Abschluss eines perfekten Körpers. Es folgt ein „Wörterbuch“ zur Übersetzung zwischen Sachverhalten aus der Galois-Theorie und der Überlagerungstheorie.

<i>Galois-Theorie</i>	<i>Überlagerungstheorie</i>
Perfekter Körper K	Zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender, semilokal einfach zusammenhängender, punktierter topologischer Raum (X, x_0)
Algebraische Erweiterung $L \supset K$	Zusammenhängende, punktierte Überlagerung $q: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$
Algebraischer Abschluss \bar{K}	Universelle Überlagerung $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$
Absolute Galoisgruppe $G = G(\bar{K}/K)$	Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$
abgeschlossene Untergruppe $H \subset G$	Untergruppe $\Gamma \subset \pi_1(X, x_0)$
Fixkörper von H	Quotient $(\tilde{X}/\Gamma, \Gamma\tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$
Normale Erweiterung $L \supset K$	Normale Überlagerung $q: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$
Relative Galoisgruppe $G(L/K)$	Decktransformationsgruppe $\pi_1(X, x_0)/(\text{im } q_*)$

Die Parallelen sind klar erkennbar. Entscheidender Unterschied: alle „Pfeile“ in der Kategorie der algebraischen Erweiterungen verlaufen genau andersherum als in der Kategorie der punktierten Überlagerungen. Das liegt daran, dass die entsprechenden Äquivalenzen von Kategorien in der Galois-Theorie kontravariante Funktoren sind. Wenn wir anstelle der topologischen Räume X die Algebra der stetigen Funktionen $X \rightarrow \mathbb{C}$ betrachten, sind wir in einer ähnlichen Situation wie bei den Körpern. Wie Sie umgekehrt im Falle von Zahlkörpern zu einer „geometrischen“ Beschreibung kommen, lernen Sie in der arithmetischen Geometrie.

2.g. CW-Komplexe

Wir erinnern uns an den Begriff „zusammenziehbar“ aus Definition 2.4.

2.65. DEFINITION. Ein topologischer Raum X heißt *lokal zusammenziehbar*, wenn jede Umgebung U eines Punktes x eine Umgebung V von x enthält, die sich auf x zusammenziehen lässt.

2.66. BEMERKUNG. (1) Lokal zusammenziehbare Räume sind insbesondere auch lokal wegzusammenhängend und (semi-) lokal einfach zusammenhängend.

- (2) Topologische Mannigfaltigkeiten sind lokal homöomorph zu \mathbb{R}^n , und daher lokal zusammenziehbar. Sei etwa U eine beliebige Umgebung von $x \in M$, und sei V eine zu \mathbb{R}^n homöomorphe Umgebung von x . Dann ist $U \cap V$ zu einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^n homöomorph, enthält also einen zusammenziehbaren Ball um x .

2.67. SATZ. *CW-Komplexe sind lokal zusammenziehbar.*

Im Beweis müssen wir eine Homotopie auf einer Teilmenge eines CW-Komplexes angeben. Dazu erinnern wir uns, dass ein CW-Komplex X nach Proposition 1.108 als Quotient der disjunkten Vereinigung all seiner Zellen geschrieben werden kann, also

$$X \cong \coprod_{n \in \mathbb{N}} \coprod_{i \in I^n} D^n / \sim.$$

Da $[0, 1]$ (lokal) kompakt ist, gilt nach Übung 1.166 dann auch

$$X \times [0, 1] \cong \coprod_{n \in \mathbb{N}} \coprod_{i \in I^n} (D^n \times [0, 1]) / \sim.$$

Also können wir auch Homotopien Zelle für Zelle definieren. Wenn die gesamte Homotopie wohldefiniert ist, dann ist sie auch stetig.

BEWEIS. Sei X ein CW-Komplex, sei $x_0 \in e_{i_0}^{n_0} \subset X^{n_0} \setminus X^{n_0-1}$, und sei $U \subset X$ eine Umgebung von x_0 . Sei $V^{n_0} \subset U \cap X^{n_0}$ das Bild eines kleinen abgeschlossenen Balles in B^{n_0} unter der charakteristischen Abbildung $\Phi_{i_0}^{n_0}$. Dann konstruieren wir für alle $n > n_0$ induktiv abgeschlossene Mengen $V^n \subset U \cap X^n$, so dass $V^n \cap X^{n-1} = V^{n-1}$ Deformationsretrakt von V^n und V^n Umgebung von x_0 in X^n ist. Für alle $i \in I^n$ sei dazu

$$(\Phi_i^n)^{-1}(V^n) = \left\{ x \in D^n \mid \frac{x}{|x|} \in (\varphi_i^n)^{-1}(V^{n-1}) \text{ und } |x| \geq 1 - \varepsilon_i^n \right\} \subset (\Phi_i^n)^{-1}(U).$$

für ein hinreichend kleines $\varepsilon_i^n \in (0, 1)$; dieses finden wir, da $(\varphi_i^n)^{-1}(V^{n-1})$ kompakt und $(\Phi_i^n)^{-1}(U)$ offen ist. Anschliessend setzen wir $V = \bigcup V^n$.

Wir können jetzt eine Homotopie $H: V \times [0, 1] \rightarrow V$ von der Identität zur konstanten Abbildung auf $x_0 \subset V$ konstruieren. Wir definieren zunächst für $n > n_0$ eine Homotopie $H^n: V^n \times [0, 1] \rightarrow V^n$ zwischen der Identität und einer Retraktion auf V^{n-1} durch

$$H^n(\Phi_i^n(x), t) = \Phi_i^n \left(\frac{x}{|x|^t} \right)$$

für alle $x \in V^n \cap e_i^n$. Hier nutzen wir aus, dass $\varepsilon_i^n < 1$, also $|x| > 0$ für alle $x \in (\Phi_i^n)^{-1}(V^n)$. Außerdem definieren wir $H^{n_0}: V^{n_0} \times [0, 1] \rightarrow V^{n_0}$ durch

$$H^{n_0}(\Phi_{i_0}^{n_0}(x), t) = \Phi_{i_0}^{n_0} \left((1-t)x + t(\Phi_{i_0}^{n_0})^{-1}(x_0) \right).$$

Wir schreiben $P^n = H(\cdot, 1): V^n \rightarrow V^{n-1}$ und definieren $H: V \times [0, 1] \rightarrow V$ für $x \in V^n$ durch

$$H(x, t) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq t \leq 2^{n_0-n-1}, \text{ und} \\ H^{n'}((P^{n'+1} \circ \dots \circ P^n)(x), 2^{n'+1-n_0}t - 1) & \text{für } 2^{n_0-n'-1} \leq t \leq 2^{n_0-n'} \end{cases}.$$

Für die Stetigkeit von H reicht es nach Vorbemerkung, dass $H(\Phi_i^n(\cdot), \cdot): V^n \times [0, 1] \rightarrow X$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $i \in I^n$ stetig ist. Wir schreiben $[0, 1]$ als CW-Komplex mit den 1-Zellen

$$[0, 1] = [0, 2^{n_0-n-1}] \cup [2^{n_0-n-1}, 2^{n_0-n}] \cup \dots \cup [2^{-1}, 2^0]$$

und benötigen mit einem ähnlichen Argument nur die Stetigkeit von $H(\Phi_i^n(\cdot), \cdot)$ auf dem Produkt des kompakten Raums $V^n \cap e_i^n$ mit den einzelnen Teilintervallen, aber die folgt direkt aus der

Konstruktion der H^n und H . Man beachte, dass wir trotz beliebig hoher „Kontraktionsgeschwindigkeiten“ nahe $t = 0$ aufgrund der Quotiententopologie auf X keine Probleme mit der Stetigkeit bei $t = 0$ bekommen. \square

2.68. BEMERKUNG. Sei M eine Familie von *Erzeugern* von G , und sei $R \subset *_{m \in M} \mathbb{Z}$ eine Menge von *Relationen* in der von den Elementen von M erzeugten freien Gruppe F . Dann sei $N = (R)$ der von den Relationen erzeugte Normalteiler von F . Wir schreiben

$$G = F/N = \langle M \mid R \rangle,$$

diese Darstellung heißt auch eine *Präsentation* der Gruppe G . Jede Gruppe besitzt eine Präsentation. Zum Beispiel könnten wir $M = G$ setzen, dann ist F die Menge aller Wörter in M (wobei wir die Gruppenstruktur von G vergessen haben). Dann wählen wir $R = \ker(F \rightarrow G)$, wobei wir jedes Wort in F auf das entsprechende Produkt in G abbilden.

Jetzt haben wir also eine Möglichkeit, jede Gruppe durch Erzeuger und Relationen zu beschreiben. Allerdings sind die folgenden Probleme im Allgemeinen nicht algorithmisch lösbar.

- (1) *Wortproblem*. Stellt ein Wort w in $\langle M \mid R \rangle$ das neutrale Element dar?
- (2) *Isomorphieproblem*. Sind zwei Gruppen $\langle M_1 \mid R_1 \rangle$ und $\langle M_2 \mid R_2 \rangle$ isomorph?

Unter einem *maximalen Baum* in einem punktierten CW-Komplex (X, x_0) mit $x_0 \in X^0$ verstehen wir einen maximalen einfach zusammenhängenden Unterkomplex $Y \subset X^1$ mit $x_0 \in Y$.

2.69. SATZ. Sei X ein wegzusammenhängender CW-Komplex und $x_0 \in X^0$.

- (1) Dann existiert $J^1 \subset I^1$, so dass

$$Y = X^0 \cup \bigcup_{j \in J^1} e_j^1$$

ein maximaler Baum in X ist.

- (2) Für J^1 wie in (1) gilt

$$\pi_1(X^1, x_0) \cong \langle I^1 \setminus J^1 \rangle \cong \prod_{i \in I^1 \setminus J^1} \mathbb{Z}.$$

- (3) Es sei $[\sigma] \in \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ ein Erzeuger, dann gilt

$$\pi_1(X^2, x_0) \cong \pi_1(X^1, x_0) / (\{\varphi_{i*}^2[\sigma] \mid i \in I^2\}).$$

- (4) Es gilt

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X^2, x_0) \cong \langle \{[\sigma_i] \mid i \in I^1 \setminus J\} \mid \{\varphi_{i*}^2[\sigma] \mid i \in I^2\} \rangle.$$

Dieser Satz ist zwar nicht einfach zu formulieren, und auch der Beweis ist kompliziert, da der Satz von Seifert-van Kampen mit offenen Teilmengen arbeitet, während die natürlicherweise auftretenden Unterkomplexe im Beweis abgeschlossen sind — ein Großteil des Beweises besteht darin, dieses Problem zu umgehen. Dafür läßt sich die Berechnung der Fundamentalgruppe eines gegebenen CW-Komplexes mit Hilfe dieses Satzes auf rein algebraische Rechnungen mit Erzeugern und Relationen zurückführen. Das werden wir in Folgerung 2.70 und Beispiel 2.71 ausnutzen.

BEWEIS. Zu (1) betrachten wir die Menge \mathcal{Y} aller Bäume in X^1 , das heißt, aller einfach zusammenhängenden Unterkomplexe von X , die den Punkt x_0 enthalten. Diese Menge ist durch Inklusion halb geordnet, und jede total geordnete Teilmenge $\mathcal{Y}' \subset \mathcal{Y}$ hat als obere Schranke die Vereinigung aller zu \mathcal{Y}' gehörigen Unterkomplexe von X^1 . Die Vereinigung ist wieder einfach zusammenhängend, denn jede Schleife trifft nach Satz 1.112 nur endlich viele Zellen, ist also bereits vollständig in einem der Unterkomplexe enthalten, und nach Voraussetzung in diesem auch zusammenziehbar. Nach dem

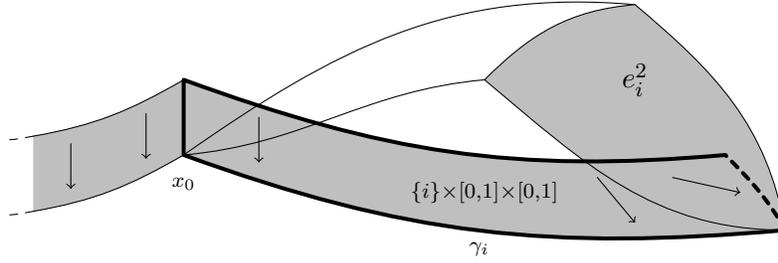


ABBILDUNG 2.5. Der Raum \overline{X}^n

Lemma von Zorn existiert also ein maximaler Baum $Y \subset X^1$. Es seien $J^0 \subset I^0$ und $J^1 \subset I^1$ die Indexmengen der an Y beteiligten 0- und 1-Zellen von X^1 .

Wenn X wegzusammenhängend ist, folgt $J^0 = I^0$. Denn gäbe es einen Punkt $z \in X^0 \setminus Y^0$, dann gäbe es einen Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ von x_0 nach z . Es sei $t_0 \in [0, 1]$ maximal mit $\gamma(t_0) \in Y$, dann befindet sich $\gamma(t_0 + \varepsilon)$ für $\varepsilon > 0$ klein genug innerhalb einer Kante von $X^1 \setminus Y$, die von Y zu einem Punkt führt, der nicht in Y enthalten ist, und wir können Y als Baum vergrößern, im Widerspruch zur Maximalität.

Zu (2) betrachten wir die offenen Teilmengen

$$U_0 = X^1 \setminus \{ \Phi_i^1(0) \mid i \in I^1 \setminus J^1 \} \quad \text{und} \quad U_k = U_0 \cup e_k^1 \subset X^1$$

für alle $k \in I^1 \setminus J^1$. Die Menge U_0 hat Y als Deformationsretrakt und ist daher einfach zusammenhängend. Für jede Menge U_k finden wir eine Schleife durch den Punkt x_k , die nicht zusammenziehbar ist. Man kann jetzt zeigen, dass sich U_k auf diese Schleife zusammenziehen lässt, und erhält insbesondere $\pi_1(U_k, x_0) \cong \mathbb{Z}$. Alle Durchschnitte zweier oder mehr der Mengen U_k ergeben die Menge U_0 , sind also einfach zusammenhängend. Aus dem Satz 2.39 von Seifert-van Kampen folgt die Behauptung.

Auch die Schritte (3) und (4) basieren auf dem Satz von Seifert-van Kampen. Um induktiv von $\pi_1(X^{n-1}, x_0)$ zu $\pi_1(X^n, x_0)$ für $n \geq 2$ zu gelangen, vergrößern wir X^n zu \overline{X}^n , siehe Abbildung 2.5. Dazu wählen wir für jedes $i \in I^n$ einen Weg γ_i von x_0 zum Bild x_i des Basispunktes von S^{n-1} unter der Verklebeabbildung φ_i . Wir verkleben $I^n \times [0, 1] \times [0, 1]$ wie folgt mit X^n .

- (1) Wir identifizieren alle Strecken $\{(i, 0)\} \times [0, 1]$ miteinander und kleben $[(i, 0, 0)]$ an den Punkt x_0 .
- (2) Wir verkleben $\{i\} \times [0, 1] \times \{0\}$ entlang von $\gamma_i: [0, 1] \times \{0\}$ mit X^{n-1} .
- (3) Wir kleben $\{1\} \times [0, 1]$ auf eine Strecke in e_i^n vom Punkt x_i ins Innere der Zelle bis zum Radius $1/2$.

Dann ist X^n ein Deformationsretrakt von \overline{X}^n , indem wir jedes Quadrat $\{i\} \times [0, 1] \times [0, 1]$ auf das Bild von $\{i\} \times ([0, 1] \times \{0\} \cup \{1\} \times [0, 1])$ zusammenziehen.

Wir betrachten die folgenden offenen Teilmengen. Es sei

$$U_0 = \overline{X}^n \setminus \bigcup_{i \in I^n} \Phi_i^n(D_{1/2}^n),$$

wobei $D_{1/2}^n \subset D^n$ den abgeschlossenen Ball vom Radius $\frac{1}{2}$ bezeichne, siehe Abbildung 2.6. Dann ist X^{n-1} ein Deformationsretrakt von U_0 .

Nach Satz 2.67 existiert eine zusammenziehbare Umgebung von x_0 in $X^n \cap U_0$. Es sei $V_0 \subset \overline{X}^n$ ihr Urbild unter der Retraktion $r_n: \overline{X}^n \rightarrow X^n$, dann ist V_0 ebenfalls zusammenziehbar. Für $i \in I^n$ setze

$$U_i = V_0 \cup (\{i\} \times [0, 1] \times (0, 1]) \cup e_i^n.$$

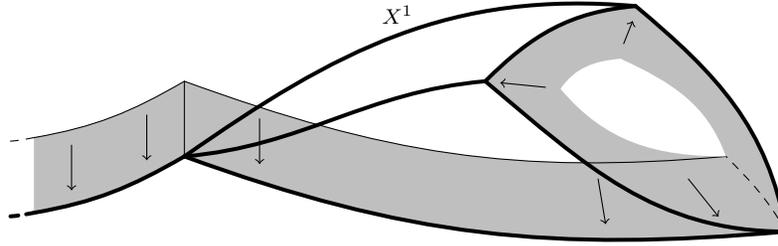


ABBILDUNG 2.6. Die Umgebung U_0 von X^{n-1}

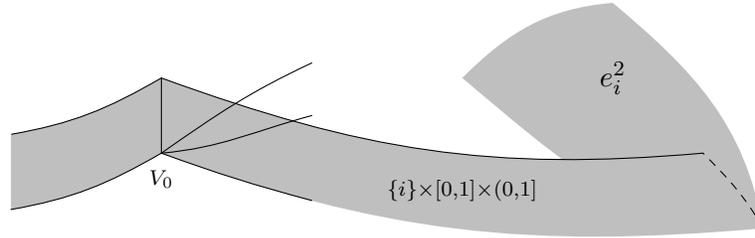


ABBILDUNG 2.7. Der Raum U_i

Man überzeugt sich, dass U_i ebenfalls zusammenziehbar ist, siehe Abbildung 2.7.

Für $i \neq j \in I^n$ ist $U_i \cap U_j = V_0$ zusammenziehbar, also insbesondere wegzusammenhängend. Außerdem ist

$$U_0 \cap U_i = V_0 \cup (\{i\} \times [0, 1] \times (0, 1]) \cup \Phi_i^n(B^n \setminus D_{1/2}^n)$$

wegzusammenhängend mit Deformationsretrakt $\Phi_i^n(S_{3/4}^{n-1})$. Analog sieht man, dass auch dreifache Durchschnitte von $\mathcal{U} = \{U_0\} \cup \{U_i \mid i \in I^n\}$ wegzusammenhängend sind.

Im Fall $n = 2$ folgt

$$\pi_1(U_0 \cap U_i, x_0) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z},$$

wobei ein Erzeuger $[\sigma] \in \pi_1(S^1)$ auf eine Schleife abgebildet wird, die in U_0 zu $\gamma_i(\varphi_i \circ \sigma)\bar{\gamma}_i$ homotop ist, siehe Abbildung 2.8. Behauptung (3) folgt jetzt aus Satz 2.39, da

$$\begin{aligned} \pi_1(X^2, x_0) &= \pi_1(\bar{X}^2, x_0) = \left(\pi_1(U_0, x_0) * \prod_{i \in I^n} \pi_1(U_i, x_0) \right) / (\{[\gamma_i(\varphi_i \circ \sigma)\bar{\gamma}_i] \mid i \in I^2\}) \\ &= \pi_1(X_1, x_0) / (\{[\gamma_i(\varphi_i \circ \sigma)\bar{\gamma}_i] \mid i \in I^2\}). \end{aligned}$$

Man beachte, dass die Erzeuger $[\gamma_i(\varphi_i \circ \sigma)\bar{\gamma}_i]$ nach Satz 2.14 vom Weg γ_i abhängen. Da aber verschiedene Wege zueinander konjugierte Erzeuger liefern, hängt der erzeugte Normalteiler nach Bemerkung 2.38 nicht von der Wahl von γ_i ab.

Der Beweis von Behauptung (4) beginnt damit, dass $U_0 \cap U_i \sim S^{n-1}$ für $n \geq 3$ nach Beispiel 2.43 einfach zusammenhängend ist und somit $\pi_1(X^n, x_0) \cong \pi_1(X^{n-1}, x_0)$ analog zur obigen Überlegung. Jetzt liefert die Inklusion $\iota: X^n \hookrightarrow X$ Isomorphismen der Fundamentalgruppen. Denn sei γ eine Schleife in X , dann verläuft γ in einem Gerüst X^n nach Satz 1.112, also ist die Abbildung

$$\iota_*: \pi_1(X^2, x_0) \cong \pi_1(X^n, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

surjektiv. Falls γ nullhomotop ist, verläuft aus dem gleichen Grund eine Homotopie H zur trivialen Schleife ganz in einem X^n (wobei n jetzt größer sein kann), also ist ι_* auch injektiv. Damit ist der Satz bewiesen. \square

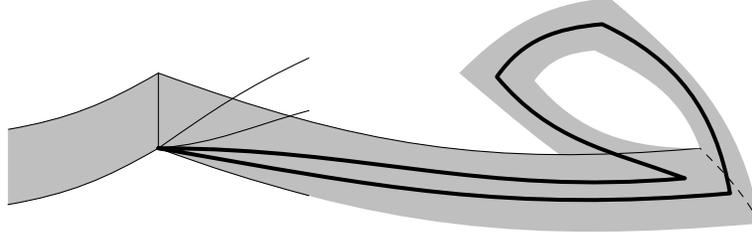


ABBILDUNG 2.8. Die Fundamentalgruppe von $U_0 \cap U_i$

Wir halten also fest, dass wir die Fundamentalgruppe eines CW-Komplexes berechnen können. Außerdem hat ein CW-Komplex nach Satz 2.67 eine universelle Überlagerung. Wir können mit den Ergebnissen aus dem vorigen Abschnitt also auch alle Überlagerungen eines CW-Komplexes beschreiben.

2.70. FOLGERUNG. *Sei G eine Gruppe, dann existiert ein CW-Komplex X mit $\pi_1(X) \cong G$.*

BEWEIS. Sei G durch Erzeuger $M \subset G$ und Relationen R gegeben. Wir konstruieren einen CW-Komplex X . Sei $X^0 = \{x_0\}$ das 0-Skelett, bestehend aus einer 0-Zelle x_0 .

Wir wählen $I^1 = M$, das heißt, für jeden Erzeuger $m \in M$ sei e_m^1 eine 1-Zelle, deren zwei Endpunkte notwendigerweise an x_0 angeklebt sind. Dann ist $\{x_0\} \subset X^1$ ein maximaler Baum, also ist $F = \pi_1(X^1, x_0)$ die von den Schleifen $\{e_m^1 \mid m \in M\}$ erzeugte freie Gruppe. Wir identifizieren den zu e_m^1 gehörigen Erzeuger mit $m \in M$.

Wir wählen $I^2 = R$, und für jede Relation $r = m_1 \cdots m_k \in R$ wählen wir eine 2-Zelle e_r^2 , so dass die Verklebeabbildung $\varphi_r^2: S^1 \rightarrow X^1$ gerade das Element $m_1 \cdots m_k \in \pi_1(X^1, x_0)$ repräsentiert.

Aus Satz 2.69 folgt jetzt

$$\pi_1(X^2, x_0) = \langle M \mid R \rangle = G. \quad \square$$

2.71. BEISPIEL. Wir betrachten Flächen, genauer, kompakte, zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeiten der Dimension 2.

- (1) Eine orientierbare Fläche X_g vom *Geschlecht* $g \geq 0$ lässt sich als CW-Komplex mit einer Ecke $\{x_0\}$, $2g$ Kanten $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ und einer 2-Zelle schreiben. Die zugehörige Verklebeabbildung φ^2 entspreche der Schleife $a_1 b_1 \bar{a}_1 \bar{b}_1 \cdots a_g b_g \bar{a}_g \bar{b}_g$, und wir erhalten die Präsentation

$$\pi_1(X_g, x_0) \cong \langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle.$$

Für $g = 0$ erhalten wir die Kugel S^2 , für $g = 1$ den Torus T^2 . Da die Relation ein Produkt von Kommutatoren ist, erhalten wir die Abelsierung

$$\pi_1(X_g, x_0)^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}^{2g}.$$

- (2) Eine nicht orientierbare Fläche Y_g vom *Geschlecht* $g \geq 0$ lässt sich analog schreiben als CW-Komplex mit einer Ecke $\{x_0\}$, $g + 1$ Kanten a_0, \dots, a_g und einer 2-Zelle. Die Verklebeabbildung sei gegeben durch die Schleife $a_0^2 \cdots a_g^2$, also gilt

$$\pi_1(Y_g, x_0) \cong \langle a_0, \dots, a_g \mid a_0^2 \cdots a_g^2 \rangle.$$

Für $g = 0$ erhalten wir $\mathbb{R}P^2$, für $g = 1$ die Kleinsche Flasche. In diesem Fall erhalten wir die Abelsierung

$$\pi_1(Y_g, x_0)^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}^{g+1} / \langle (2, \dots, 2) \rangle \cong \mathbb{Z}^g \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

wobei die rechte Darstellung zu den Erzeugern a_1, \dots, a_g und $a_0 + \cdots + a_g$ gehört.

Wir sehen also, dass man die unterschiedlichen Flächen anhand ihrer Fundamentalgruppen unterscheiden kann.

2.h. Übungen zu Kapitel 2

Übungen zu Abschnitt 2.a.

2.72. ÜBUNG. Sei (X, A) ein Paar und Y ein Raum. Zeigen Sie: Homotopie relativ zu A ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Abbildungen von X nach Y .

2.73. ÜBUNG. Seien X, Y, Z topologische Räume, und seien $F: X \rightarrow Y$ und $G: Y \rightarrow Z$ Homotopieäquivalenzen, dh., es existieren Abbildungen P, Q mit $P \circ F \sim \text{id}_X$, $F \circ P \sim \text{id}_Y \sim Q \circ G$ und $G \circ Q \sim \text{id}_Z$. Konstruieren Sie Homotopien

$$(P \circ Q) \circ (G \circ F) \sim \text{id}_X \quad \text{und} \quad (G \circ F) \circ (P \circ Q) \sim \text{id}_Z .$$

Insbesondere ist Homotopieäquivalenz eine Äquivalenzrelation.

Übungen zu Abschnitt 2.b.

2.74. ÜBUNG. Seien X, Y topologische Räume, seien $x \in X$ und $y \in Y$ Punkte. Finden Sie einen natürlichen Gruppenisomorphismus

$$\pi_1(X \times Y, (x, y)) \cong \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y) .$$

2.75. ÜBUNG. Sei X ein topologischer Raum. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen, in dem Sie jeweils geeignete Homotopien angeben.

- (1) Jede Abbildung $S^1 \rightarrow X$ ist homotop zu einer konstanten Abbildung.
- (2) Jede Abbildung $F: S^1 \rightarrow X$ lässt sich zu einer Abbildung $\bar{F}: D^2 \rightarrow X$ mit $\bar{F}|_{\partial D^2} = F$ ausdehnen.
- (3) Die Fundamentalgruppen $\pi_1(X, x)$ sind für alle $x \in X$ trivial.
- (4) Je zwei Wege zwischen zwei Punkten $x, y \in X$ sind homotop.

2.76. ÜBUNG. Zeigen Sie, dass die Fundamentalgruppe eines wegzusammenhängenden Raumes X genau dann abelsch ist, wenn für alle $x, y \in X$ der Isomorphismus

$$\pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y) , \quad [\gamma] \mapsto [\gamma_0^{-1} \gamma \gamma_0]$$

nicht vom Weg γ_0 von x nach y abhängt.

2.77. ÜBUNG. (1) Sei \circ eine Verknüpfung auf einer Menge G und $e \in G$. Dann sind äquivalent:

- (a) (G, \circ, e) ist eine Gruppe.
 - (b) Es gibt eine Kategorie \mathcal{G} in der jeder Morphismus invertierbar ist (siehe Bemerkung 2.5) mit $\text{Obj}(\mathcal{G}) = \{*\}$, $\text{Hom}_{\mathcal{G}}(*, *) = G$ mit Verknüpfung \circ und $\text{id}_* = e$.
- (2) Seien G, H Gruppen, \mathcal{G}, \mathcal{H} Kategorien wie in (1) und sei $F: G \rightarrow H$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:
- (a) F ist ein Gruppenhomomorphismus.
 - (b) Es gibt einen Funktor $\mathcal{F}: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ mit $\mathcal{F}* = *$ und $\mathcal{F} = F: \text{Hom}_{\mathcal{G}}(*, *) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{H}}(*, *)$.

Übungen zu Abschnitt 2.c.

2.78. ÜBUNG. Seien T (Toast), S (Schinken) und A (Ananas) drei kompakte, paarweise disjunkte messbare Teilmengen des \mathbb{R}^3 . Zeigen Sie, dass es eine Schnittebene $E \subset \mathbb{R}^3$ gibt, die jede der drei Teilmengen T, S und A in zwei Teile von gleichem Volumen zerlegt.

Hinweis: Zu jedem $v \in S^2$ existiert (mindestens) ein $d = d_v$, so dass die Hyperebene

$$\{x \mid \langle x, v \rangle = d\}$$

das gesamte Sandwich $T \cup S \cup A$ in zwei gleichgrosse Teile teilt. Überlegen Sie sich, dass die Funktionen t , s und $a: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$t(v) = \text{vol}\{x \in T \mid \langle x, v \rangle \leq d_v\}$$

und s , a analog nicht von der Wahl von d_v wie oben, sondern nur von v abhängen, und in v stetig sind. Folgern Sie dann die Behauptung mit dem Satz von Borsuk-Ulam.

2.79. ÜBUNG. Beweisen Sie den Fundamentalsatz der Algebra wie folgt. Sei $P = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n z^0: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ein Polynom. Zeigen Sie: Für $R > \max\{1, \sum_{i=1}^n |a_i|\}$ ist der Pfad

$$\gamma: S^1 \rightarrow S^1, \quad z \mapsto \gamma(z) := \frac{P(Rz)}{|P(Rz)|}$$

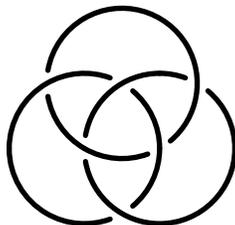
in S^1 homotop zu $\gamma_0: S^1 \rightarrow S^1, \gamma_0(z) = z^n$. Folgern Sie: P hat mindestens eine Nullstelle z_0 mit $|z_0| \leq R$.

Übungen zu Abschnitt 2.d.

2.80. ÜBUNG. Seien G, H Gruppen. Zeigen Sie:

- (1) Das Zentrum $Z(G * H) = \{z \in G * H \mid zw = wz \text{ für alle } w \in G * H\}$ von $G * H$ ist die triviale Gruppe $\{e\} = \{\emptyset\} \subset G * H$;
- (2) alle Torsionselemente (Elemente $w \in G * H$ mit $w^N = e$ für ein $N > 0$) sind von der Form $w = vgv^{-1}$ oder $w = hvh^{-1}$ mit $v \in G * H$ und $g \in G$ bzw. $h \in H$ mit $g^N = e$ bzw. $h^N = e$.

2.81. ÜBUNG. Zeigen Sie mit Hilfe von Beispiel 2.44 (2), dass die Borromäischen Ringe $R_1, R_2, R_3 \subset \mathbb{R}^3$ sich im umgebenden \mathbb{R}^3 nicht trennen lassen. Bestimmen Sie dazu die Äquivalenzklasse $[\gamma] \in \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus (R_1 \cup R_2), \gamma(0)) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ eines Weges γ , der R_3 parametrisiert.



2.82. ÜBUNG. Es sei

$$X = \bigcup_{n \geq 1} \left\{ \frac{1}{n}(\cos \varphi + 1, \sin \varphi) \mid \varphi \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

versehen mit der Unterraumtopologie. Zeigen Sie, dass X überabzählbare Fundamentalgruppe hat, indem Sie für jede \mathbb{Z} -wertige Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Schleife angeben, die den Kreis mit Radius $\frac{1}{n}$ genau a_n -mal umläuft.

2.83. ÜBUNG. Es sei G eine Gruppe. Für $g, h \in G$ schreibe $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1} \in G$. Dann definiert man die Abelisierung von G als

$$G^{\text{ab}} = G / (\{[g, h] \mid g, h \in G\}).$$

Es sei $p: G \rightarrow G^{\text{ab}}$ die Projektion auf den Quotienten. Zeigen Sie:

- (1) Die Gruppe G^{ab} ist abelsch (kommutativ).
- (2) Sei H eine abelsche Gruppe und $f: G \rightarrow H$ ein Homomorphismus, dann gibt es genau einen Homomorphismus $\bar{f}: G^{\text{ab}} \rightarrow H$, so dass $f = \bar{f} \circ p$.

2.84. ÜBUNG. Seien G, H Gruppen, $p: G \rightarrow G^{\text{ab}}, q: H \rightarrow H^{\text{ab}}$ wie in Aufgabe 2.83, und $f: G \rightarrow H$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie:

- (1) Es gibt genau einen Homomorphismus $f^{\text{ab}}: G^{\text{ab}} \rightarrow H^{\text{ab}}$, so dass $q \circ f = f^{\text{ab}} \circ p$.
- (2) Dadurch wird Abelisierung zu einem Funktor von der Kategorie aller Gruppen in die der abelschen Gruppen.
- (3) Folgern Sie, dass die freien Gruppen F_k und F_l für $k \neq l$ nicht isomorph sind.

2.85. ÜBUNG. Es seien \mathcal{C}, \mathcal{D} zwei Kategorien, in denen es alle Produkte „ \times “, Koproducte „ \sqcup “ und Pushouts „ \cup “ gibt, und sei $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor. Konstruieren Sie mit Hilfe der universellen Eigenschaften Morphismen in \mathcal{D} , und zwar

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(A \times B) &\longrightarrow \mathcal{F}(A) \times \mathcal{F}(B), \\ \mathcal{F}(A) \sqcup \mathcal{F}(B) &\longrightarrow \mathcal{F}(A \sqcup B), \\ \mathcal{F}(A) \cup_{\mathcal{F}(C)} \mathcal{F}(B) &\longrightarrow \mathcal{F}(A \cup_C B),\end{aligned}$$

für alle Objekte A, B, C von \mathcal{C} und Morphismen $f: C \rightarrow A, g: C \rightarrow B$.

Übungen zu Abschnitt 2.e.

2.86. ÜBUNG. Seien $p: \tilde{X} \rightarrow X, p_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X_1$ und $p_2: \tilde{X}_2 \rightarrow X_2$ Überlagerungen. Zeigen Sie:

- (1) sei $A \subset X$ eine Unterraum und $\tilde{A} = p^{-1}A \subset \tilde{X}$, dann ist $p|_{\tilde{A}}: \tilde{A} \rightarrow A$ eine Überlagerung;
- (2) die natürliche Abbildung $p_1 \times p_2: \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2 \rightarrow X_1 \times X_2$ ist eine Überlagerung.

2.87. ÜBUNG. Sei $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung, wobei X zusammenhängend sei. Zeigen Sie:

- (1) die Mengen $p^{-1}(\{x\}) \subset \tilde{X}$ sind für alle $x \in X$ gleichmächtig;
- (2) der Raum \tilde{X} ist genau dann kompakt, wenn X kompakt ist und $p^{-1}(\{x_0\})$ endlich ist für ein $x_0 \in X$.

2.88. ÜBUNG. Wir betrachten den topologischen Raum

$$Y := \left\{ \left(2 + \sin \frac{\pi}{t} \right) e^{2\pi i t} \mid \varphi \in (0, 1] \right\} \cup [1, 3] \subset \mathbb{C}.$$

- (1) Skizzieren Sie Y , und zeigen Sie, dass $\pi_1(Y) = 0$.
- (2) Beweisen Sie, dass die Radialprojektion $F: Y \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}$ dennoch keinen Lift $\tilde{F}: Y \rightarrow \mathbb{R}$ zulässt.

Übungen zu Abschnitt 2.f.

2.89. ÜBUNG. Sei $X \subset \mathbb{R}^2$ die Vereinigung aller Kreise um $(\frac{1}{n}, 0)$ mit Radius $\frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ wie in Übung 2.82, und X trage die vom \mathbb{R}^2 induzierte Unterraumtopologie. Skizzieren Sie X und zeigen Sie, dass X keine einfach zusammenhängende Überlagerung besitzt.

2.90. ÜBUNG. Überlagerungstheorie benötigt keine Trennungseigenschaften. Sei $X = ((-1, 1) \times \{1, -1\}) / \sim$ der Ihnen wohlbekannte, nicht Hausdorffsche Raum aus Beispiel 1.28, wobei die Äquivalenzrelation „ \sim “ erzeugt werde von $(t, 1) \sim (t, -1)$ für alle $t \neq 0$.

- (1) Zeigen Sie, dass X zusammenhängend und lokal zusammenziehbar ist.
- (2) Bestimmen Sie die universelle Überlagerung von X .
- (3) Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe von X .

Homotopiegruppen

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir die Fundamentalgruppe aus der Topologie und erhalten höhere Homotopiegruppen. Wir lernen einige Berechnungsmethoden kennen, unter anderem die lange exakten Sequenzen für Paare und für Faserungen.

Als Beispiel zeigen wir, dass eine stetige Abbildung der n -dimensionalen Sphäre S^n in sich durch ihren Abbildungsgrad in \mathbb{Z} bis auf Homotopie eindeutig bestimmt wird, mit anderen Worten gilt $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$. Als Anwendung beweisen wir den Brouwerschen Fixpunktsatz 0.2. Höhere Homotopiegruppen $\pi_{n+k}(S^n)$ der Sphären lassen sich geometrisch als sogenannte gerahmte Bordismusgruppen k -dimensionaler Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^{n+k} interpretieren.

Da wir zur Berechnung der Homotopiegruppen nur wenige Werkzeuge haben, führen wir außerdem stabile Homotopiegruppen ein. Die höheren stabilen Homotopiegruppen der Sphären sind zwar leichter zu bestimmen als die $\pi_k(S^n)$, sind aber dennoch bis zum heutigen Tage noch nicht vollständig bekannt.

3.a. Höhere Homotopiegruppen

Wir betrachten zunächst die Kategorie \mathcal{Top}_+ der punktierten topologischen Räume aus Definition 2.17. Da wir in diesem Kapitel fast nur punktierte Räume betrachten, schreiben wir statt (X, x_0) auch manchmal nur kurz X . Eine Homotopie zwischen zwei punktierten Abbildungen $f, g: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ ist eine Homotopie relativ zu $\{x_0\}$, siehe Definitionen 2.2 und 2.7. Falls eine solche Homotopie existiert, nennen wir f und g homotop in \mathcal{Top}_+ und schreiben wieder kurz $f \sim g$. Wie in Bemerkung 2.3 erhalten wir eine Äquivalenzrelation, die mit der Verkettung von stetigen Abbildungen verträglich ist.

Indem wir als Morphismen zwischen punktierten Räumen nicht einzelne punktierte stetige Abbildungen, sondern punktierte Homotopieklassen betrachten, erhalten wir die punktierte Homotopiekategorie \mathcal{HTop}_+ , siehe Definition 2.17. Streng genommen sollten wir hier nur gut punktierte Räume zulassen, siehe Definition 3.55. Wir schreiben dafür kurz

$$[X, Y] = [(X, x_0), (Y, y_0)] = \text{Hom}_{\mathcal{HTop}_+}((X, x_0), (Y, y_0)) .$$

In Satz 2.19 haben wir bereits gesehen, dass die Fundamentalgruppe einen kovarianten Funktor $\pi_1: \mathcal{HTop}_+ \rightarrow \mathcal{Grp}$ definiert. Wir wollen jetzt weitere Funktoren π_n auf \mathcal{HTop}_+ definieren. Für $n = 0$ erhalten wir nur punktierte Mengen, für $n \geq 2$ erhalten wir abelsche Gruppen.

Es seien $A \subset X$ topologische Räume, dann bezeichne $X/A \in \mathcal{Top}_+$ den Quotientenraum mit Basispunkt A/A . Er trage die Quotiententopologie aus Definition 1.82, die zugrundeliegende Äquivalenzrelation hat dann also A als eine Äquivalenzklasse, alle Punkte von $X \setminus A$ hingegen bilden je einpunktige Äquivalenzklassen. Falls $A = \emptyset$ und X kompakt ist, definieren wir

$$X/\emptyset = X_+ \cong X \sqcup \{*\} \in \mathcal{Top}_+ ,$$

wir fügen also zu X einen zusätzlichen Basispunkt $*$ mit der Topologie der disjunkten Vereinigung (Definition 1.77) hinzu. Übrigens ist der Funktor $\cdot_+ : \mathcal{Top} \rightarrow \mathcal{Top}_+$ linksadjungiert zum vergesslichen Funktor $\mathcal{Top}_+ \rightarrow \mathcal{Top}$, das heißt, für einen unpunktieren Raum X und einen punktierten Raum Y

gilt

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}op_+}(X_+, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{T}op}(X, Y) .$$

Es sei $I = [0, 1]$ das Einheitsintervall und I^k der k -dimensionale Einheitswürfel, dann bezeichne

$$\partial I^k = I^k \setminus (0, 1)^k$$

den (*geometrischen*) *Rand* des Einheitswürfels. Im Falle $k = 0$ ist $\partial(I^0) = \partial \text{pt} = \emptyset$ leer, dabei ist pt ein fester einpunktiger Raum. Nach Übung 3.104 gibt es für alle k einen Homöomorphismus

$$I^k / \partial I^k \cong S^k .$$

Den Basispunkt, also die Äquivalenzklasse des Randes ∂I^k , identifizieren wir mit dem Nordpol.

3.1. DEFINITION. Für einen punktierten Raum X und $k \geq 0$ definieren wir die k -te *Homotopiegruppe*

$$\pi_k(X) = ([I^k / \partial I^k, X], 0) ,$$

dabei sei $0 \in \pi_k(X)$ die Homotopieklasse der konstanten Abbildung $c(t_1, \dots, t_k) = x_0$. Sei $F: X \rightarrow Y$ eine punktierte Abbildung, dann definieren wir $\pi_k F: \pi_k(X) \rightarrow \pi_k(Y)$ durch

$$\pi_k F([f]) = [F \circ f] .$$

Sei schließlich $k \geq 1$ und $a = [f], b = [g] \in \pi_k(X)$, dann definieren wir $ab = [fg] \in \pi_k(X)$, wobei

$$(fg)(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} f([2t_1, t_2, \dots, t_k]) & \text{falls } t_1 \leq \frac{1}{2}, \text{ und} \\ g([2t_1 - 1, t_2, \dots, t_k]) & \text{falls } t_1 \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Wie in Bemerkung 2.3 und Satz 2.13 folgt, dass die Verknüpfung und die Abbildung $\pi_k F$ wohldefiniert sind. Für $k = 0$ erhalten wir keine Gruppe, da wir keine Verknüpfung definiert haben, so dass wir hier eigentlich nur 0-te *Homotopiemenge* sagen dürften. Für $\pi_k F$ schreibt man oft auch kurz F_* , und für ab schreibt man meist $a + b$, wenn $k \geq 2$.

3.2. BEMERKUNG. Wir können $\pi_k(X)$ auch wie folgt beschreiben.

- (1) Für $k = 0$ ist $I^0 / \partial I^0 \cong \{0\} / \emptyset \cong S^0$ ein diskreter Raum aus zwei Punkten $*$ (Basispunkt, Nordpol) und 0 (Südpol). Die Menge der punktierten Abbildungen $f: S^0 \rightarrow X$ entspricht genau den Punkten $x \in X$, wobei $f(*) = x_0$ und $f(0) = x$. Eine Homotopie h zwischen solchen Abbildungen bildet $\{*\} \times I$ konstant auf x_0 ab, und

$$\gamma = h|_{\{0\} \times I}: I \rightarrow X \quad \text{mit} \quad \gamma(t) = h(0, t)$$

beschreibt einen Weg von $f(0)$ nach $g(0)$. Umgekehrt liefert jeder Weg $\gamma: I \rightarrow X$ von $f(0)$ nach $g(0)$ eine punktierte Homotopie h zwischen f und g mit

$$h(s, t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{falls } s = 0, \text{ und} \\ x_0 & \text{falls } s = *. \end{cases}$$

Somit ist $\pi_0(X)$ gerade die Menge der Wegzusammenhangskomponenten von X , und $0 \in \pi_0(X)$ bezeichnet die Wegzusammenhangskomponente des Basispunktes x_0 .

- (2) Für $k = 1$ ist eine punktierte Abbildung $f: S^1 \rightarrow X$ gerade eine Schleife am Basispunkt x_0 , und 0 bezeichnet die konstante Schleife. Die Verkettung entspricht der üblichen Verkettung von Schleifen. Also ist $\pi_1(X)$ genau die Fundamentalgruppe von X aus Abschnitt 2.b.
- (3) Da es für alle k einen Homöomorphismus $I^k / \partial I^k \rightarrow (S^k, *)$ gibt, gibt es eine natürliche Bijektion

$$\pi_k(X) \cong [S^k, X] .$$

3.3. DEFINITION. Es seien \mathcal{C} , \mathcal{D} Kategorien und $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ kovariante (kontravariante) Funktoren. Eine *natürliche Transformation* $\tau: F \rightarrow G$ ordnet jedem Objekt X von \mathcal{C} einen Morphismus $\tau_X: F(X) \rightarrow G(X)$ in \mathcal{D} so zu, dass für jeden Morphismus $f: X \rightarrow Y$ in \mathcal{C} das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{Ff} & F(Y) \\ \tau_X \downarrow & & \downarrow \tau_Y \\ G(X) & \xrightarrow{Gf} & G(Y) \end{array} \quad \text{beziehungsweise} \quad \begin{array}{ccc} F(X) & \xleftarrow{Ff} & F(Y) \\ \tau_X \downarrow & & \downarrow \tau_Y \\ G(X) & \xleftarrow{Gf} & G(Y) \end{array}$$

kommutiert. Wenn τ_X für alle X ein Iso-/Mono-/Epimorphismus ist, spricht man entsprechend von einem *natürlichen* Iso-/Mono-/Epimorphismus.

Oftmals wird das Adjektiv „natürlich“ benutzt, ohne die beteiligten Funktoren im einzelnen zu spezifizieren. In der obigen Bemerkung 3.2 (3) erhalten wir beispielsweise einen natürlichen Isomorphismus zwischen den Funktoren π_k und $[S^k, \cdot]: \mathcal{HTop}_+ \rightarrow \mathcal{Set}_+$. Auch die Abbildung ι_X aus Lemma 1.75 in der Konstruktion der Stone-Čech-Kompaktifizierung ist eine natürliche Transformation zwischen dem Identitätsfunktors und dem Funktor $B: \mathcal{Top} \rightarrow \mathcal{Top}$.

3.4. BEISPIEL. Der einpunktige Raum pt ist initiales (kofinales) und terminales (finales) Objekt in der Kategorie \mathcal{Top}_+ . Das heißt, zu jedem punktierten Raum (X, x_0) gibt es genau eine punktierte Abbildung $\text{pt} \rightarrow X$, nämlich $*$ $\mapsto x_0$ (pt ist *initial*), und genau eine Abbildung $X \rightarrow \text{pt}$, nämlich die konstante Abbildung (pt ist *terminal*). Ein initiales und terminales Objekt heißt auch *Nullobjekt*.

Insbesondere sei $X = S^k$. Wegen Bemerkung 3.2 (3) gilt

$$\pi_k(\text{pt}) \cong [S^k, \text{pt}] = \{e\} = 0.$$

Für unser nächstes Zwischenergebnis benötigen wir drei weitere Kategorien. Die Kategorie \mathcal{Set}_+ der *punktierten Mengen* hat als Objekte Paare (A, a_0) aus einer Menge A mit einem ausgezeichneten Element $a_0 \in A$. Manchmal schreiben wir wieder kurz A für (A, a_0) . Wie bei den punktierten Räumen definieren wir

$$\text{Hom}_{\mathcal{Set}_+}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{Set}_+}((A, a_0), (B, b_0)) = \{f: A \rightarrow B \mid f(a_0) = b_0\}.$$

Außerdem sei \mathcal{Grp} die Kategorie der Gruppen, mit Gruppenhomomorphismen als Morphismen, und \mathcal{Ab} sei die Kategorie der abelschen Gruppen, wiederum mit Gruppenhomomorphismen als Morphismen.

Wir erhalten „vergessliche“ Funktoren

$$\mathcal{Ab} \longrightarrow \mathcal{Grp} \longrightarrow \mathcal{Set}_+.$$

Da jede abelsche Gruppe insbesondere eine Gruppe ist, ist der erste Funktor eine Einbettung. Die Kategorie \mathcal{Ab} ist sogar eine *volle Unterkategorie* von \mathcal{Grp} , das heißt, für zwei Objekte $A, B \in \mathcal{Ab}$ gilt

$$\text{Hom}_{\mathcal{Ab}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{Grp}}(A, B).$$

Der zweite Funktor $\mathcal{Grp} \rightarrow \mathcal{Set}_+$ ordnet jeder Gruppe A mit neutralem Element e die punktierte Menge (A, e) zu. Da jeder Gruppenhomomorphismus die neutralen Elemente aufeinander abbildet, ist er auch ein Morphismus punktierter Mengen.

3.5. SATZ. *Die Homotopiegruppen haben folgende Eigenschaften.*

- (1) Für alle $k \geq 0$ ist $\pi_k: \mathcal{HTop}_+ \rightarrow \mathcal{Set}_+$ ein Funktor.
- (2) Für alle $k \geq 1$ ist $\pi_k: \mathcal{HTop}_+ \rightarrow \mathcal{Grp}$ ein Funktor.
- (3) Für alle $k \geq 2$ ist $\pi_k: \mathcal{HTop}_+ \rightarrow \mathcal{Ab}$ ein Funktor.

Damit sind die wichtigsten elementaren Eigenschaften der π_k bereits zusammengefasst. Insbesondere sind die Homotopiegruppen homotopieinvariant, verträglich mit punktierten Abbildungen, und für $k \geq 2$ sogar abelsche Gruppen.

BEWEIS. Der Beweis von (1) und (2) ist ähnlich wie bei der Fundamentalgruppe, siehe Satz 2.13 und Satz 2.19.

Wir beginnen mit (1) für $k \geq 0$ beliebig, dabei hilft Bemerkung 3.2 (1), den Fall $k = 0$ besser zu verstehen. Seien $F: X \rightarrow Y$ und $f_0 \sim f_1: I^k/\partial I^k \rightarrow X$ punktiert homotope punktierte Abbildungen. Wie in Bemerkung 2.3 (2) sind dann auch $F \circ f_0$ und $F \circ f_1: I^k/\partial I^k \rightarrow Y$ punktiert homotop, so dass

$$\pi_k F([f_0]) = [F \circ f_0] = [F \circ f_1] = \pi_k F([f_1]) .$$

Wir erhalten also in der Tat eine Abbildung

$$\pi_k F: \pi_k(X) \rightarrow \pi_k(Y) .$$

Es gilt offensichtlich $\pi_k \text{id}_X = \text{id}_{\pi_k(X)}$. Für $F: X \rightarrow Y$, $G: Y \rightarrow Z$ und $f: I^k/\partial I^k \rightarrow X$ folgt außerdem

$$\pi_k(G \circ F)([f]) = [G \circ F \circ f] = \pi_k G([F \circ f]) = \pi_k G(\pi_k F([f])) ,$$

also gilt auch $\pi_k(G \circ F) = (\pi_k G) \circ (\pi_k F)$, und π_k ist insbesondere ein Funktor von der Kategorie \mathcal{Top}_+ in die Kategorie \mathcal{Set}_+ der punktierten Mengen.

Seien jetzt $F_0 \sim F_1: X \rightarrow Y$ punktiert homotop, und sei $f: I^k/\partial I^k \rightarrow X$ eine punktierte Abbildung. Dann sind $F_0 \circ f$, $F_1 \circ f$ nach Bemerkung 2.3 (2) punktiert homotop, also gilt

$$\pi_k F_0([f]) = [F_0 \circ f] = [F_1 \circ f] = \pi_k F_1([f]) .$$

Somit ist π_k mit Homotopie verträglich und liefert daher eine Abbildung

$$\pi_k: \text{Hom}_{\mathcal{HTop}_+}(X, Y) = [X, Y] \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{Set}_+}(\pi_k(X), \pi_k(Y)) .$$

Also ist π_k sogar ein Funktor von der Kategorie \mathcal{HTop}_+ in die Kategorie \mathcal{Set}_+ der punktierten Mengen. Damit ist (1) gezeigt.

Zu (2) sei $k \geq 1$. Punktierte Homotopien $H_1, H_2: (I^k/\partial I^k) \times I \rightarrow X$ zwischen f_1 und g_1 beziehungsweise f_2 und $g_2: I^k/\partial I^k \rightarrow X$ lassen sich zusammensetzen zu einer Homotopie H zwischen $f_1 f_2$ und $g_1 g_2$ mit

$$H([t_1, \dots, t_k], s) = \begin{cases} H_1([2t_1, t_2, \dots, t_k], s) , & \text{falls } t_1 \leq \frac{1}{2}, \text{ und} \\ H_2([2t_1 - 1, t_2, \dots, t_k], s) , & \text{falls } t_1 \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Genauso wie in Definition 3.1 behandeln wir also die Variable t_1 so, wie die Variable t in Definition 2.12 und im Beweis von Satz 2.13. Mit dem gleichen Trick lassen sich die Homotopien aus dem Beweis von Satz 2.13 zum Beweis der Gruppenaxiome auf die hiesige Situation übertragen.

Außerdem gilt wie im Beweis von Satz 2.19 für $F: X \rightarrow Y$ und $f, g: I^k/\partial I^k \rightarrow X$, dass

$$\pi_k F([f]) \pi_k F([g]) = (F \circ f)(F \circ g) = F \circ (fg) = \pi_k F([fg]) ,$$

also ist $\pi_k F$ ein Gruppenhomomorphismus. Die Funktoraxiome

$$\pi_k \text{id}_X = \text{id}_{\pi_k(X)} \quad \text{und} \quad \pi_k(F \circ G) = \pi_k F \circ \pi_k G$$

folgen bereits aus (1), also ist (2) bewiesen.

Zum Beweis von (3) benötigen wir die Variablen t_1 und t_2 . Wir definieren eine punktierte Homotopie H zwischen fg und gf durch

$$H([t_1, \dots, t_k], s) = \begin{cases} f\left([2t_1, \frac{t_2}{1-2s}, t_3, \dots, t_k]\right) & \text{für } s \in [0, \frac{1}{4}], \quad t_1 \in [0, \frac{1}{2}], \quad t_2 \in [0, 1-2s], \\ g\left([2t_1 - 1, \frac{t_2-2s}{1-2s}, t_3, \dots, t_k]\right) & \text{für } s \in [0, \frac{1}{4}], \quad t_1 \in [\frac{1}{2}, 1], \quad t_2 \in [2s, 1], \\ f\left([2(t_1 - s) + \frac{1}{2}, 2t_2, \dots]\right) & \text{für } s \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}], \quad t_1 \in [s - \frac{1}{4}, s + \frac{1}{4}], \quad t_2 \in [0, \frac{1}{2}], \\ g\left([2(t_1 + s) - \frac{3}{2}, 2t_2 - 1, \dots]\right) & \text{für } s \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}], \quad t_1 \in [\frac{3}{4} - s, \frac{5}{4} - s], \quad t_2 \in [\frac{1}{2}, 1], \\ f\left([2t_1 - 1, \frac{t_2}{2s-1}, t_3, \dots, t_k]\right) & \text{für } s \in [\frac{3}{4}, 1], \quad t_1 \in [\frac{1}{2}, 1], \quad t_2 \in [0, 2s-1], \\ g\left([2t_1, \frac{t_2+2s-2}{2s-1}, t_3, \dots, t_k]\right) & \text{für } s \in [\frac{3}{4}, 1], \quad t_1 \in [0, \frac{1}{2}], \quad t_2 \in [2-2s, 1], \\ x_0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hieraus folgt, dass $\pi_k(X)$ abelsch ist für $k \geq 2$. Nach (2) ist $\pi_k F: \pi_k(X) \rightarrow \pi_k(Y)$ für alle stetigen Abbildungen $F: X \rightarrow Y$ ein Homomorphismus, der nach (1) nur von der punktierten Homotopieklasse von F abhängt, also erhalten wir einen Funktor $\pi_k: \mathcal{HTop}_+ \rightarrow \mathcal{Ab}$. \square

3.6. BEMERKUNG. Nach Bemerkung 2.5 sind Isomorphismen in der Homotopiekategorie \mathcal{HTop}_+ gerade punktierte Homotopieäquivalenzen. Ein topologischer Raum ist nach Definition 2.4 genau dann zusammenziehbar, wenn er zum einpunktigen Raum pt homotopieäquivalent ist. Da ein Funktor isomorphe Objekte auf isomorphe Objekte abbildet, folgt aus Beispiel 3.4, dass

$$X \text{ zusammenziehbar} \implies \pi_k(X) = 0 \text{ für alle } k \geq 0.$$

Wir werden später im Satz von Whitehead sehen, dass für eine große Klasse topologischer Räume auch die Umkehrung gilt.

3.7. PROPOSITION. Für alle $k \geq 1$ liefert jede relative Homotopieklasse $[\gamma]$ von Pfaden von x_0 nach x_1 einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \cdot[\gamma]: \pi_k(X, x_0) &\rightarrow \pi_k(X, x_1) \quad \text{mit} \quad [f] \cdot [\gamma] = [f \cdot \gamma], \\ \text{wobei} \quad f \cdot \gamma &= \begin{cases} f(2t_1 - \frac{1}{2}, \dots, 2t_k - \frac{1}{2}) & \text{für } \frac{1}{4} \leq t_1, \dots, t_k \leq \frac{3}{4}, \text{ und} \\ \gamma(4 \max\{|t_1 - \frac{1}{2}|, \dots, |t_k - \frac{1}{2}|\} - 1) & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Insbesondere wirkt die Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ von rechts auf $\pi_k(X)$ durch Gruppenautomorphismen.

Für $k = 1$ erhalten wir innere Automorphismen von $\pi_1(X)$, siehe Bemerkung 2.15.

BEWEIS. Mit ähnlichen Methoden wie im vorangegangenen Beweis überprüft man die folgenden Aussagen.

- (1) Die Abbildung $f \cdot \gamma$ ist stetig.
- (2) Relativ homotope Pfade γ_0, γ_1 von x_0 nach x_1 und punktiert homotope Abbildungen $f_0, f_1: I^k/\partial I^k \rightarrow (X, x_0)$ liefern punktiert homotope Abbildungen $f_0 \cdot \gamma_0, f_1 \cdot \gamma_1$. Wenn wir Schleifen an x_0 betrachten, erhalten wir also eine wohldefinierte Abbildung $\pi_1(X) \times \pi_k(X) \rightarrow \pi_k(X)$.
- (3) Es gilt $(f \cdot \gamma_0) \cdot \gamma_1 \sim f \cdot (\gamma_0 \gamma_1)$, und für den konstanten Pfad e gilt $f \cdot e \sim f$. Wenn wir Schleifen an x_0 betrachten, ist die obige Abbildung also eine Gruppenwirkung.
- (4) Die obige Abbildung ist mit den Gruppenstrukturen auf $\pi_k(X, x_i)$ für $i = 0, 1$ verträglich. \square

Wir wollen uns jetzt die Menge $\text{Hom}_{\mathcal{HTop}}(S^n, X) = [S_+^n, X]$ der *freien Homotopieklassen* von Abbildungen von S^n nach X anschauen.

3.8. FOLGERUNG (aus Proposition 3.7). *Es sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum und $k \geq 1$. Dann steht die Menge $[S_+^n, X]$ der freien Homotopieklassen nicht punktierter Abbildungen $S^n \rightarrow X$ in natürlicher Bijektion zur Menge $\pi_k(X)//\pi_1(X)$ der Orbits der $\pi_1(X)$ -Wirkung auf $\pi_k(X)$.*

Wir schreiben hier $\pi_k(X)//\pi_1(X)$ um deutlich zu machen, dass es sich nicht um den Quotienten nach einer Untergruppe handelt.

BEWEIS. Fixiere $x_0 \in X$. Es sei $f: S^k \rightarrow X$ gegeben, dann wählen wir einen Weg γ in X von $f(e_1)$ nach x_0 und erhalten nach Proposition 3.7 ein Element $[f \cdot \gamma] \in \pi_k(X, x_0)$. Für einen weiteren Weg γ' gilt dann

$$[f \cdot \gamma'] = [f \cdot \gamma] \cdot [\bar{\gamma} \gamma'] ,$$

der Orbit von $[\gamma \cdot f]$ unter der $\pi_1(X, x_0)$ -Wirkung hängt also nicht von der Wahl von γ ab.

Sei h eine freie Homotopie zwischen f und $g: S^n \rightarrow X$, dann setzen wir $\gamma(t) = h(e_1, t)$. Mit Hilfe von h lässt sich eine punktierte Homotopie zwischen $f \cdot \gamma$ und g konstruieren, so dass der obige Orbit auch nicht von der freien Homotopieklassen von f abhängt. Also ist die obige Zuordnung wohldefiniert. Sie ist auch natürlich im Sinne von Definition 3.3, denn sei $F: X \rightarrow Y$ stetig, dann erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} [S_+^n, X] & \longrightarrow & \pi_k(X)//\pi_1(X) \\ F \circ \downarrow & & \downarrow F_* \\ [S_+^n, Y] & \longrightarrow & \pi_k(Y)//\pi_1(Y) . \end{array}$$

Surjektivität ist klar, da wir jede punktierte Abbildung als nicht punktierte Abbildung auffassen können. Zur Injektivität bleibt zu zeigen, dass $f, g: S^k \rightarrow X$ frei homotop sind, wenn $[f \cdot \gamma] = [g \cdot \gamma']$ für geeignete Wege γ, γ' gilt. Aber das folgt, da $f \cdot \gamma$ stets frei homotop zu f ist. \square

3.9. DEFINITION. Es sei (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum und $k \geq 1$. Wir definieren den *k-ten Schleifenraum* von (X, x_0) durch

$$\Omega^k(X) = \Omega^k(X, x_0) = \{ f: I^k \rightarrow X \mid \partial I^k \subset f^{-1}(x_0) \} \subset C(I^k, X) ,$$

wobei $C(I^k, X)$ die kompakt-offene und $\Omega^k(X, x_0)$ die Unterraumtopologie trage. Nach Satz 1.83 über die Quotiententopologie gilt

$$\Omega^k(X) = C(I^k/\partial I^k, X) \cong C(S^k, X) ,$$

wobei wir für die letzte Darstellung einen festen Basispunkt in S^k wählen müssen. Als Basispunkt von $\Omega^k(X, x_0)$ fixieren wir die konstante Abbildung auf x_0 .

3.10. BEMERKUNG. Für $k, \ell \geq 0$ gilt $\pi_k(\Omega^\ell(X)) \cong \pi_{k+\ell}(X)$ (Übung 3.106).

3.b. Die lange exakte Homotopiesequenz eines Paares

Ein *punktiertes Paar* (X, A) besteht aus einem punktierten topologischen Raum X mit Basispunkt x_0 und einer Teilmenge $A \subset X$, so dass $x_0 \in A$. Eine *Abbildung* zwischen punktierten Paaren $(X, A), (Y, B)$ ist eine punktierte Abbildung $f: X \rightarrow Y$, so dass $f(A) \subset B$. Die punktierten Paare mit ihren Abbildungen bilden eine Kategorie

$$\text{Pair}_+ .$$

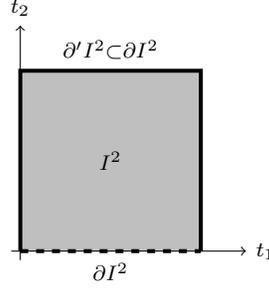


ABBILDUNG 3.1. Das Tripel $\partial' I^2 \subset \partial I^2 \subset I^2$

Zwei Abbildungen $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ punktierter Paare heißen (als Abbildungen punktierter Paare) *homotop*, wenn es eine punktierte Homotopie $h: X \times I \rightarrow Y$ zwischen ihnen gibt, so dass

$$A \times I \subset h^{-1}(B). \quad (3.1)$$

Insbesondere fordern wir nicht, dass h eine Homotopie relativ zu A sei. Die punktierten Paare mit Homotopieklassen von Abbildungen bilden eine Kategorie

$$\mathcal{H}Pair_+.$$

Für $k \geq 1$ bezeichne

$$\partial' I^k = \partial I^k \setminus ((0, 1)^{k-1} \times \{0\})$$

den Rand von I^k ohne eine (offene) Seite, siehe Abbildung 3.1. Da wir im Folgenden manche Abbildungen auf $(0, 1)^{k-1} \times \{0\}$ nicht festlegen, nennen wir $I^{k-1} \times \{0\}$ die „freie Seite“ von I^k .

3.11. DEFINITION. Für ein punktiertes Paar (X, A) und $k \geq 1$ definieren wir

$$\pi_k(X, A) = ([I^k/\partial' I^k, \partial I^k/\partial' I^k], (X, A), 0),$$

dabei bezeichne wieder 0 die konstante Abbildung auf $x_0 \in A$. Seien $a = [f], b = [g] \in \pi_k(X, A)$ und $k \geq 2$, dann definieren wir $ab = [fg] \in \pi_k(X, A)$ wie in Definition 3.1. Außerdem bezeichnen wir die Homotopieklasse der konstanten Abbildung $c(t_1, \dots, t_k) = x_0$ mit $0 = [c] \in \pi_k(X, A)$. Sei schließlich $F: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ eine Abbildung punktierter Paare, dann definieren wir $\pi_k F: \pi_k(X, A) \rightarrow \pi_k(Y, B)$ durch

$$\pi_k F([f]) = [F \circ f].$$

Für $k = 0$ setzen wir

$$\pi_0(X, A) = \pi_0(X)/\pi_0(A),$$

wobei der Quotient als Quotient punktierter Mengen zu verstehen ist. Für eine Abbildung F punktierter Paare sei $\pi_0 F: \pi_0(X, A) \rightarrow \pi_0(Y, B)$ die von $\pi_0 F: \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ induzierte Abbildung.

Man beachte, dass wir aufgrund der Sonderrolle der Koordinate t_k in der Definition von $\partial' I^k$ eine gesonderte Definition für π_0 benötigen und im Falle $k = 1$ keine Gruppenstruktur erhalten. Wie in Bemerkung 2.3 folgt wieder, dass die Verknüpfung und die Abbildung $\pi_k F$ wohldefiniert sind. Für $\pi_k F$ schreibt man oft auch kurz F_* , und für ab schreibt man meist $a + b$, wenn $k \geq 3$.

3.12. BEMERKUNG. Wenn in der obigen Definition $A = \{x_0\}$ gilt, dann wird $\partial I^k/\partial' I^k$ auf x_0 abgebildet. Nach der charakteristischen Eigenschaft der Quotiententopologie in Satz 1.83 entsprechen solche Abbildungen $f: I^k/\partial' I^k \rightarrow (X, x_0)$ genau den Abbildungen aus Definition 3.1. Es folgt

$$\pi_k(X, \{x_0\}, x_0) = \pi_k(X, x_0)$$

sogar für alle $k \geq 0$, aber für $k = 1$ fehlt der linken Seite die Gruppenstruktur.

3.13. BEMERKUNG. Nach Übung 3.104 gibt es für alle $k \geq 1$ einen Homöomorphismus

$$(I^k / \partial' I^k, \partial I^k / \partial' I^k) \cong (D^k, S^{k-1}).$$

Dabei liegt der Basispunkt auf dem Rand S^{k-1} der Einheitskreisscheibe. Wir erhalten also für $k \geq 1$ natürliche Bijektionen

$$\pi_k(X, A, x_0) = [(D^k, S^{k-1}, *), (X, A, x_0)].$$

3.14. PROPOSITION. Die relativen Homotopiegruppen haben folgende Eigenschaften.

- (1) Für alle $k \geq 0$ ist $\pi_k: \mathcal{H}Pair_+ \rightarrow Set_+$ ein Funktor.
- (2) Für alle $k \geq 2$ ist $\pi_k: \mathcal{H}Pair_+ \rightarrow Grp$ ein Funktor.
- (3) Für alle $k \geq 3$ ist $\pi_k: \mathcal{H}Pair_+ \rightarrow Ab$ ein Funktor.

BEWEIS. Völlig analog zum Beweis von Satz 3.5, wobei wir aber, da die Variable t_k eine Sonderrolle spielt, $k \geq 2$ in (2) und $k \geq 3$ in (3) fordern müssen. \square

3.15. PROPOSITION. Für alle $k \geq 1$ liefert jede relative Homotopieklasse $[\gamma]$ von Pfaden in A von x_0 nach x_1 einen Isomorphismus

$$\cdot[\gamma]: \pi_k(X, A, x_0) \rightarrow \pi_k(X, A, x_1) \quad \text{mit} \quad [f] \cdot [\gamma] = [f \cdot \gamma],$$

$$\text{wobei} \quad f \cdot \gamma = \begin{cases} f(2t_2 - \frac{1}{2}, \dots, 2t_{k-1} - \frac{1}{2}, 2t_k) & \text{für } \frac{1}{4} \leq t_1, \dots, t_{k-1} \leq \frac{3}{4}, \quad t_k \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma(4 \max\{|t_1 - \frac{1}{2}|, \dots, |t_{k-1} - \frac{1}{2}|, |\frac{t_k}{2}|\}) - 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Insbesondere wirkt die Fundamentalgruppe $\pi_1(A)$ von rechts auf allen $\pi_k(X, A)$, und für $k \geq 2$ durch Gruppenautomorphismen.

BEWEIS. Analog zum Beweis von Proposition 3.7. \square

3.16. BEMERKUNG. Für $k \geq 1, \ell \geq 0$ gilt (Übung 3.107, siehe Bemerkung 3.10)

$$\pi_k(\Omega^\ell(X), \Omega^\ell(A)) \cong \pi_{k+\ell}(X, A).$$

Für $k = 0$ ist die Behauptung falsch, wie man am Beispiel (D^1, S^0) mit $\ell = 1$ sehen kann.

Wir definieren exakte Sequenzen hier in Set_+ . Sei $f: (A, a_0) \rightarrow (B, b_0)$ eine punktierte Abbildung, dann definieren wir ihren Kern als

$$\ker f = f^{-1}\{b_0\} \subset A.$$

Außerdem sei $0 = \text{pt} = \{*\}$ eine feste einpunktige Menge. Mit dieser Notation sieht alles genauso aus wie in der Kategorie der Gruppen oder R -Moduln, die wir später noch betrachten werden. Allerdings folgt in Set_+ aus $\ker f = \{a_0\} \cong \{*\}$ noch nicht, dass f injektiv ist.

3.17. DEFINITION. Eine Sequenz in Set_+ ist eine Familie $(f_i: M_i \rightarrow M_{i-1})_{i \in \mathbb{Z}}$ punktierter Abbildungen zwischen punktierten Mengen. Eine Sequenzabbildung von $(f_i: M_i \rightarrow M_{i-1})$ nach $(g_i: N_i \rightarrow N_{i-1})$ vom Grad $d \in \mathbb{Z}$ ist eine Familie punktierter Abbildungen $(k_i: M_i \rightarrow N_{i+d})_{i \in \mathbb{Z}}$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longleftarrow & M_{i-1} & \xleftarrow{f_i} & M_i & \xleftarrow{f_{i+1}} & M_{i+1} & \longleftarrow & \cdots \\ & & k_{i-1} \downarrow & & k_i \downarrow & & k_{i+1} \downarrow & & \\ \cdots & \longleftarrow & N_{i+d-1} & \xleftarrow{g_{i+d}} & N_{i+d} & \xleftarrow{g_{i+d+1}} & N_{i+d+1} & \longleftarrow & \cdots \end{array}$$

kommutiert, das heißt, es gilt $k_{i-1} \circ f_i = g_{i+d} \circ k_i$ für alle $i \in \mathbb{Z}$.

Eine Sequenz $(f_i: M_i \rightarrow M_{i-1})$ heißt *exakt an der Stelle M_i* , wenn $\ker f_i = \text{im } f_{i+1} \subset M_i$ gilt. Sie heißt (*lange*) *exakte Sequenz*, wenn sie an allen Stellen exakt ist. Eine *kurze exakte Sequenz* ist eine exakte Sequenz der Form

$$0 \longleftarrow A' \longleftarrow A \longleftarrow A'' \longleftarrow 0.$$

Völlig analog definieren wir Sequenzen und exakte Sequenzen in den Kategorien $\mathcal{G}rp$ und $\mathcal{A}b$.

Kurze exakte Sequenzen denken wir uns nach links und rechts fortgesetzt durch $0 = \{*\}$ beziehungsweise durch die einelementige Gruppe. Wir werden Diagramme zu Sequenzen teils wie oben mit Pfeilen von rechts nach links darstellen, teils aber auch die Richtung der Pfeile umdrehen:

$$\cdots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

3.18. BEMERKUNG. Die *Nullabbildung* bildet alle Elemente aus dem Definitionsbereich auf den Basispunkt ab. Wenn in einer exakten Sequenz von Gruppen eine der Abbildungen die Nullabbildung ist, dann erlaubt es Rückschlüsse über die benachbarten Gruppen und Abbildungen, siehe Übung 3.109. Das passiert insbesondere dann, wenn eine der Gruppen trivial ist.

Es sei (X, A, x_0) ein punktiertes Paar. Dann haben wir natürliche Inklusionen in $\mathcal{T}op_+$ beziehungsweise $\mathcal{P}air_+$,

$$i: (A, x_0) \hookrightarrow (X, x_0) \quad \text{und} \quad j: (X, \{x_0\}, x_0) \hookrightarrow (X, A, \{x_0\}).$$

3.19. SATZ (Homotopiesequenz eines Paares). *Es sei (X, A, x_0) ein punktiertes Paar. Für $k \geq 1$ und $[f] \in \pi_k(X, A, x_0)$ mit $f: I^k/\partial I^k \rightarrow X$ definiere $\partial[f] = [\partial f] \in \pi_{k-1}(A, x_0)$ durch*

$$\partial f = f|_{(I^{k-1} \times \{0\})/(\partial I^{k-1} \times \{0\})}: I^{k-1}/\partial I^{k-1} \rightarrow A.$$

Dann erhalten wir eine natürliche lange exakte Sequenz

$$\cdots \longleftarrow \{*\} \longleftarrow \pi_0(X, A) \xleftarrow{j_*} \pi_0(X) \xleftarrow{i_*} \pi_0(A) \xleftarrow{\partial} \pi_1(X, A) \xleftarrow{j_*} \pi_1(X) \xleftarrow{i_*} \pi_1(A) \xleftarrow{\partial} \cdots$$

punktierter Mengen, von rechts bis einschließlich $\pi_1(X)$ sogar von Gruppen. Die Gruppe $\pi_1(A, x_0)$ wirkt von rechts durch Sequenzabbildungen, wobei sie auf $\pi_0(X)$, $\pi_0(A)$ und $\pi_0(X, A)$ trivial wirke. Diese Wirkung auf der punktierten Menge $\pi_1(X, A)$ lässt sich so auf die Gruppe $\pi_1(X)$ ausdehnen, dass $[c] \cdot [\gamma] = j_*[\gamma]$ für die konstante Kurve c und alle $[\gamma] \in \pi_1(X)$ gilt, und eine natürliche Bijektion $\pi_1(X/A)/\pi_1(X) \cong \text{im } \partial \subset \pi_0(A)$ existiert.

Die Abbildung ∂ nennt man auch den *Verbindungshomomorphismus*. Die Sequenz setzt sich durch $\{*\}$ unendlich weit nach links fort. Eine Verallgemeinerung für Tripel steht in Übung 3.112.

BEWEIS. Zunächst einmal ist die Einschränkung ∂f wie gefordert eine punktierte Abbildung. Außerdem ist ∂ mit punktierten Homotopien von Abbildungen von Paaren verträglich und respektiert die Gruppenstruktur, falls $k \geq 2$. Also ist die Abbildung $\partial: \pi_k(X, A, x_0) \rightarrow \pi_{k-1}(A, x_0)$ wohldefiniert.

Sei $F: (X, A, x_0) \rightarrow (Y, A, y_0)$ eine Abbildung punktierter Paare, dann induziert F eine Sequenzabbildung von der Sequenz des Paares (X, A, x_0) in die des Paares (Y, A, y_0) . Somit ist die Sequenz natürlich, das heißt, i_* , j_* und ∂ sind natürliche Transformationen zwischen Funktoren $\mathcal{H}Pair_+ \rightarrow \mathcal{S}et_+$ im Sinne von Definition 3.3.

Schließlich sind die Gruppenwirkungen aus den Propositionen 3.7 und 3.15 ebenfalls mit i_* , j_* und δ verträglich; dabei wirkt $g \in \pi_1(A)$ als i_*g auf $\pi_k(X)$. Die Wirkung von $\pi_1(X)$ auf $\pi_1(X, A)$ behandeln wir in Übung 3.108

Zur Exaktheit sind sechs Inklusionen zu beweisen. Wir überprüfen nur zwei davon, der Rest ist Übung 3.110. Zu einer Abbildung $f: I^k/\partial I^k \rightarrow X$ wie in Definition 3.1 oder $f: I^k/\partial I^k \rightarrow X$ wie in Definition 3.11 bezeichne dabei \bar{f} die entsprechende Abbildung auf I^k . Wenn wir umgekehrt nur \bar{f} angeben, so lässt sich mit der charakteristischen Eigenschaft der Quotiententopologie aus Satz 1.83 (2) die Stetigkeit der zugehörigen Abbildung f überprüfen. Im Folgenden sei stets $k \geq 1$.

„im $j_* \subset \ker \partial$ “. Gegeben sei $f: I^k/\partial I^k \rightarrow X$. Da $I^{k-1} \times \{0\} \subset \partial I^k$, ist $\partial(j \circ \bar{f}) = f|_{I^{k-1} \times \{0\}}$ die konstante Abbildung auf den Basispunkt, also $\partial j_*[f] = 0 \in \pi_{k-1}(A)$.

„ker $\partial \subset \text{im } j_*$ “. Es sei $f: I^k/\partial'I^k \rightarrow X$ gegeben, und es sei $h: (I^{k-1}/\partial I^{k-1}) \times I \rightarrow A$ eine Nullhomotopie von ∂f in A . Betrachte $\bar{g}: I^k \rightarrow X$ mit

$$\bar{g}(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} \bar{h}(t_1, \dots, t_{k-1}, 1 - 2t_k) & \text{für } t_k \leq \frac{1}{2}, \text{ und} \\ \bar{f}(t_1, \dots, t_{k-1}, 2t_k - 1) & \text{für } t_k \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Betrachte die Homotopie $\bar{k}: I^k \times I \rightarrow X$ zwischen $j \circ \bar{g}$ und \bar{f} mit

$$\bar{k}(t_1, \dots, t_k, s) = \bar{g}\left(t_1, \dots, t_{k-1}, \frac{s + (2-s)t_k}{2}\right).$$

Da \bar{g} ganz $\partial'I^k$ auf x_0 abbildet, bildet sie $\partial'I^k \times I$ auf x_0 ab. Da h Werte in A annimmt, erhalten wir

$$\bar{k}(t_1, \dots, t_{k-1}, 0, s) = \bar{g}\left(t_1, \dots, t_{k-1}, \frac{s}{2}\right) = \bar{h}(t_1, \dots, t_{k-1}, 1 - s) \in A.$$

Somit $j_*[g] = [f] \in \pi_k(X, A)$. □

Das folgende Lemma ist sehr hilfreich im Umgang mit exakten Sequenzen.

3.20. LEMMA (Vierer- und Fünferlemma). *Gegeben sei eine Sequenzabbildung*

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longleftarrow & B & \longleftarrow & C & \longleftarrow & D & \longleftarrow & E \\ a \downarrow & & b \downarrow & & c \downarrow & & d \downarrow & & e \downarrow \\ A' & \longleftarrow & B' & \longleftarrow & C' & \longleftarrow & D' & \longleftarrow & E' \end{array}$$

in Set_+ . Beide Zeilen seien exakt. Außerdem seien C, C' Gruppen und c ein Gruppenhomomorphismus. Dann gilt:

- (1) seien b, d surjektiv und $\ker a = \{a_0\}$, und die Abbildung $C' \rightarrow B'$ lasse sich so zu einer Gruppenwirkung fortsetzen, dass $C' \ni x' \mapsto b'_0 \cdot x'$. Dann ist c surjektiv;
- (2) seien d injektiv, e surjektiv und $\ker b = \{b_0\}$. Dann ist c injektiv;
- (3) unter den Voraussetzungen aus (1) und (2) ist c bijektiv.

Die Bedingung an die Abbildung $C' \rightarrow B'$ in (1) ist automatisch erfüllt, wenn es sich um einen Gruppenhomomorphismus handelt.

BEWEIS. Man beweist (1) und (2) durch Diagrammjagd. Es folgt (3). □

In der Topologie hat man es häufig mit exakten Sequenzen von Gruppen (oder Moduln oder Vektorräumen) zu tun, bei denen sich Terme von drei verschiedenen Typen abwechseln. Eine Sequenzabbildung zwischen Ihnen hat dann die Form

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longleftarrow & C_{-1} & \xleftarrow{\partial} & A_0 & \longleftarrow & B_0 & \longleftarrow & C_0 & \xleftarrow{\partial} & A_1 & \longleftarrow & \dots \\ & & c_{-1} \downarrow & & a_0 \downarrow & & b_0 \downarrow & & c_0 \downarrow & & a_1 \downarrow & & \\ \dots & \longleftarrow & C'_{-1} & \xleftarrow{\partial} & A'_0 & \longleftarrow & B'_0 & \longleftarrow & C'_0 & \xleftarrow{\partial} & A'_1 & \longleftarrow & \dots \end{array}$$

Wenn man weiß, dass alle a_\bullet und alle b_\bullet Isomorphismen sind, sind nach dem Fünferlemma auch alle c_\bullet Isomorphismen. Analog schließt man, wenn alle a_\bullet und alle c_\bullet , oder alle b_\bullet und alle c_\bullet Isomorphismen sind. Für diese Anwendung reicht die einfachst mögliche Formulierung der Aussage (3) aus.

Es gibt aber auch etwas kompliziertere Situationen. Beispielsweise könnte es sein, dass alle a_i und alle c_i mit $i < n$ Isomorphismen sind, während a_n und c_n nur noch surjektiv sind; solche Abbildungen betrachten wir im nächsten Abschnitt. In diesem Fall dürfen wir schließen, dass auch die b_i für $i < n$ Isomorphismen sind, und c_n immerhin surjektiv ist. Später betrachtet man auch

Fälle, in denen a_i und c_i für alle $i > n$ Isomorphismen sind, während a_n und c_n nur noch injektiv sind. Dann gilt das entsprechende auch für die b_i .

Zu guter Letzt gibt es in der Topologie auch exakte Sequenzen, in denen alle Objekte mit Indizes $i > 0$ Gruppen sind, alle Objekte mit Index 0 jedoch nur noch punktierte Mengen, und die bei 0 abbrechen, das heißt, es gibt keine Objekte mit negativen Indizes. Als Beispiele betrachte die Sequenzen aus Satz 3.19 mit $A_1 = \pi_1(X)$ und aus Satz 3.25 mit $A_1 = \pi_1(B)$. In solchen Sequenzen gibt es anstelle eines Gruppenhomomorphismus oft eine Gruppenwirkung der „letzten“ Gruppe A'_1 auf der punktierten Menge C'_0 , so dass $\partial a = *.a$ für den Basispunkt $* \in C'_0$ und alle $a \in A'_1$ gilt (Gruppenhomomorphismen haben — wie gesagt — immer diese Eigenschaft). Lemma 3.20 ist so formuliert, dass wir für jeden „senkrechten“ Gruppenhomomorphismus unter geeigneten Annahmen an die benachbarten senkrechten Pfeile zeigen können, dass er ein Gruppenisomorphismus ist, insbesondere sogar noch für a_1 . Als Beispiel wenden wir das Fünferlemma auf die Sequenz aus Satz 3.19 an.

3.21. FOLGERUNG. *Es sei $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ eine Abbildung von Paaren. Wenn f und $f|_A$ für alle $k \geq 0$ bijektive Abbildungen $\pi_k(X, A) \rightarrow \pi_k(Y, B)$ beziehungsweise $\pi_k(A) \rightarrow \pi_k(B)$ induzieren, dann ist $f_*: \pi_k(X) \rightarrow \pi_k(Y)$ ebenfalls bijektiv für alle $k \geq 1$. \square*

Analoge Folgerungen gelten für $(f_A)_*: \pi_k(A) \rightarrow \pi_k(B)$ für $k \geq 1$ sowie für $f_*: \pi_k(X, A) \rightarrow \pi_k(Y, B)$ für $k \geq 2$, falls jeweils alle anderen „vertikalen“ Abbildungen bijektiv sind.

3.c. Faserungen

Die lange exakte Sequenz aus Satz 3.19 ist in der vorliegenden Form noch nicht wirklich hilfreich, um Homotopiegruppen zu bestimmen. Hier formulieren wir sie um in eine lange exakte Sequenz für Serre-Faserungen. Später werden wir noch eine (nicht so lange, aber noch wichtigere) exakte Sequenz für Kofaserungen kennenlernen.

3.22. DEFINITION. Eine Abbildung $p: E \rightarrow B$ hat die *Homotopieliftungseigenschaft* bezüglich eines Raumes X und Abbildungen $\tilde{f}: X \rightarrow E$ und $h: X \times I \rightarrow B$ mit

$$h(\cdot, 0) = p \circ \tilde{f}: X \rightarrow B,$$

wenn eine Abbildung $\tilde{h}: X \times I \rightarrow E$ existiert mit

$$p \circ \tilde{h} = h \quad \text{und} \quad \tilde{h}(\cdot, 0) = \tilde{f}: X \rightarrow E.$$

Sie hat die Homotopieliftungseigenschaft bezüglich eines Raumes X , wenn Obiges für alle Abbildungen $\tilde{f}: X \rightarrow E$ und $h: X \times I \rightarrow B$ mit $h(\cdot, 0) = p \circ \tilde{f}$ gilt.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \times\{0\} \downarrow & \nearrow \tilde{h} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

Die Abbildung p heißt *Serre-Faserung*, wenn sie die Homotopieliftungseigenschaft bezüglich I^k für alle $k \geq 0$ besitzt. Sie heißt *Hurewicz-Faserung*, wenn sie die Homotopieliftungseigenschaft sogar bezüglich aller topologischen Räume X besitzt.

Wenn die Abbildung p überdies punktiert ist, nennen wir sie eine punktierte Serre- beziehungsweise Hurewicz-Faserung, und $p^{-1}(b_0) \subset E$ ihre *Faser*.

3.23. BEMERKUNG. Nach Übung 3.113 sind die Paare $(I^k, I^{k-1} \times \{0\})$ und $(I^k, \partial'I^k)$ homöomorph. Also ist eine Abbildung $p: E \rightarrow B$ genau dann eine Serre-Faserung, wenn für alle $k \geq 1$ und alle Abbildungen $f: I^k \rightarrow B$ und $\tilde{g}: \partial'I^k \rightarrow E$ mit

$$f|_{\partial'I^k} = p \circ \tilde{g}: \partial'I^k \rightarrow B$$

eine Abbildung $\tilde{f}: I^k \rightarrow E$ existiert mit

$$p \circ \tilde{f} = f \quad \text{und} \quad \tilde{f}|_{\partial'I^k} = \tilde{g}.$$

Das gleiche geht selbstverständlich auch, wenn man eine andere offene Seite aus $\partial'I^k$ entfernt.

$$\begin{array}{ccc} \partial'I^k & \xrightarrow{\tilde{g}} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ I^k & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

3.24. PROPOSITION. *Es sei $p: E \rightarrow B$ eine punktierte Serre-Faserung mit Faser F . Dann induziert p für alle $k > 0$ einen Isomorphismus*

$$p_*: \pi_k(E, F) \rightarrow \pi_k(B, \{b_0\}) \cong \pi_k(B).$$

Für $k = 0$ ist diese Aussage falsch: die Abbildung $p_*\pi_0(E, F) = \pi_0(E)/\pi_0(F) \rightarrow \pi_0(B)$ muss weder injektiv noch surjektiv sein. Allerdings hat sie trivialen Kern, siehe Satz 3.25.

BEWEIS. Zur Surjektivität betrachte eine punktierte Abbildung $f: I^k/\partial'I^k \rightarrow (B, b_0)$, aufgefasst als Abbildung $(I^k, \partial'I^k) \rightarrow (B, \{b_0\})$. Die Abbildung $\tilde{g}: \partial'I^k \rightarrow \{e_0\} \subset E$ sei konstant. Dann liefert Bemerkung 3.23, angewandt auf $\tilde{f}: I^k \rightarrow B$, das gesuchte Urbild \tilde{f} , denn $\tilde{f}|_{\partial'I^k} = \tilde{g}$ ist die konstante Abbildung, und auf der „freien Seite“ $I^{k-1} \times \{0\}$ nimmt \tilde{f} Werte in $F = p^{-1}(e_0)$ an.

Zur Injektivität seien $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1: (I^k/\partial'I^k, \partial'I^k/\partial'I^k) \rightarrow (E, F)$ mit $p_*[\tilde{f}_0] = p_*[\tilde{f}_1]$ gegeben. Dann bilden $p \circ \tilde{f}_i$ den gesamten Rand nach b_0 ab. Es sei $h: (I^k/\partial'I^k) \times I \rightarrow B$ eine punktierte Homotopie zwischen $p \circ \tilde{f}_0$ und $p \circ \tilde{f}_1$ in B . Definiere $\tilde{g}: \partial'I^{k+1} \setminus ((0, 1)^{k-1} \times \{0\} \times (0, 1)) \rightarrow E$ durch

$$\tilde{g}(t_1, \dots, t_{k+1}) = \begin{cases} \tilde{f}_i(t_1, \dots, t_k) & \text{falls } t_{k+1} = i \in \{0, 1\}, \text{ und} \\ e_0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, siehe Abbildung 3.2. Nach Bemerkung 3.23, angewandt auf \tilde{h} , existiert eine Abbildung \tilde{h} , die \tilde{g} fortsetzt, und auf der „freien Seite“ $t_k = 0$ Werte in F annimmt, da \tilde{h} dort auf b_0 abbildet. Also ist \tilde{h} eine punktierte Homotopie von Paaren zwischen \tilde{f}_0 und \tilde{f}_1 , was zu zeigen war. \square

Es ist nicht ungewöhnlich, dass Injektivität ähnlich wie Surjektivität bewiesen wird: „Injektivität bis auf Homotopie ist Surjektivität für Homotopien“.

3.25. SATZ (Homotopiesequenz für Serre-Faserungen). *Es sei $p: (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$ eine punktierte Serre-Faserung, und es sei $i: F = p^{-1}(b_0) \rightarrow E$ die Inklusion der Faser. Dann existiert für alle $k \geq 1$ ein Verbindungshomomorphismus $\partial: \pi_k(B) \rightarrow \pi_{k-1}(F)$, so dass die Sequenz*

$$\pi_0(B) \xleftarrow{p_*} \pi_0(E) \xleftarrow{i_*} \pi_0(F) \xleftarrow{\partial} \pi_1(B) \xleftarrow{p_*} \pi_1(E) \longleftarrow \dots$$

exakt und natürlich ist. Es handelt sich bis einschließlich $\pi_1(B)$ um eine Sequenz von Gruppen, und es gibt eine Rechtswirkung von $\pi_1(B)$ auf $\pi_0(F)$ mit $\partial[\gamma] = [e_0] \cdot [\gamma]$, so dass eine natürliche Bijektion $\pi_0(F)/\pi_1(B) \cong \text{im } i_* \subset \pi_0(E)$ existiert.

Im Gegensatz zur Homotopiesequenz 3.19 eines Paares bricht diese Sequenz bei $\pi_0(B)$ ab.

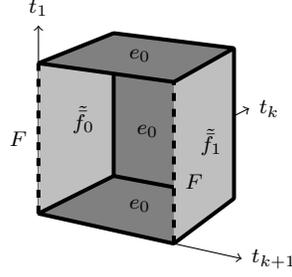


ABBILDUNG 3.2. Der Definitionsbereich von \tilde{g}

BEWEIS. Mit Proposition 3.24 erhalten wir eine Sequenzabbildung

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longleftarrow & \pi_{k-1}(F, e_0) & \xleftarrow{\partial'} & \pi_k(E, F, e_0) & \xleftarrow{j_*} & \pi_k(E, e_0) & \longleftarrow & \dots \\
 & & \parallel & & p_* \downarrow \cong & & \parallel & & \\
 \dots & \longleftarrow & \pi_{k-1}(F, e_0) & \xleftarrow{\partial} & \pi_k(B, b_0) & \xleftarrow{p_*} & \pi_k(E, e_0) & \longleftarrow & \dots,
 \end{array}$$

hierbei sei ∂' der Verbindungshomomorphismus aus Satz 3.19. In der Tat kommutiert das rechte Quadrat, da $p \circ j = \text{id}_{(B, \{b_0\})} \circ p$. Das linke Quadrat nehmen wir als Definition für den Verbindungshomomorphismus $\partial = \partial' \circ (p_*)^{-1}$. Da die obere Sequenz exakt ist, ist es die untere auch.

Da nicht notwendigerweise $\pi_0(E, F) \cong \pi_0(B)$ gilt, bleibt Exaktheit bei $\pi_0(E, e_0)$ zu prüfen. Sei zunächst $f: S^0 \rightarrow (F, e_0)$ gegeben, dann bildet $p \circ i \circ f$ konstant auf b_0 ab, also gilt im $i_* \subset \ker p_*$. Sei umgekehrt $f: S^0 \rightarrow (E, e_0)$ mit $[f] \in \ker p_*$ gegeben, dann existiert eine punktierte Nullhomotopie von $p \circ f$ in B , also ein Pfad von $p(f(0))$ nach b_0 . Mit der Homotopieliftungseigenschaft erhalten wir einen Pfad von $f(0)$ nach F , also eine punktierte Homotopie von f zu einem Element in $\text{im } i_*$.

Zur Natürlichkeit betrachte ein kommutatives Diagramm punktierter Serre-Faserungen

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{g} & D \\
 p \downarrow & & \downarrow q \\
 B & \xrightarrow{f} & C.
 \end{array}$$

Seien $F = p^{-1}(b_0)$ und $G = q^{-1}(c_0)$ die Fasern, dann bildet $g|_F$ die Faser F auf G ab. Betrachte jetzt die zugehörigen langen exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longleftarrow & \pi_{k-1}(E) & \xleftarrow{i_*} & \pi_{k-1}(F) & \xleftarrow{\partial} & \pi_k(B) & \xleftarrow{p_*} & \pi_k(E) & \longleftarrow & \dots \\
 & & g_* \downarrow & & g|_{F*} \downarrow & & f_* \downarrow & & g_* \downarrow & & \\
 \dots & \longleftarrow & \pi_{k-1}(D) & \xleftarrow{i_*} & \pi_{k-1}(G) & \xleftarrow{\partial} & \pi_k(C) & \xleftarrow{p_*} & \pi_k(D) & \longleftarrow & \dots
 \end{array}$$

Die äußeren Quadrate kommutieren, da die entsprechenden punktierten Abbildungen ebenfalls kommutieren. Nach Definition des Verbindungshomomorphismus kommutiert das innere Quadrat, da die Sequenz aus Satz 3.19 natürlich ist. Die Konstruktion der Wirkung von $\pi_1(B)$ auf $\pi_0(F)$ behandeln wir in Übung 3.116. \square

3.26. FOLGERUNG (aus dem Liftungssatz 2.48). *Es sei $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung. Dann ist die Abbildung*

$$p_* = \pi_k p: \pi_k(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_k(X, x_0)$$

ein Isomorphismus für alle $k \geq 2$. Außerdem haben wir eine exakte Sequenz

$$\pi_0(X) \longleftarrow \pi_0(\tilde{X}) \longleftarrow \pi_0(p^{-1}(x_0)) \longleftarrow \pi_1(X) \xleftarrow{\pi_1 p} \pi_1(\tilde{X}) \longleftarrow 0.$$

Die Injektivität von $\pi_1 p$ kennen wir bereits aus Satz 2.46.

BEWEIS. Nach dem Homotopieliftungssatz 2.25 sind alle Überlagerungen Hurewicz-Faserungen, also erst recht Serre-Faserungen. Dabei ist die Faser $F = p^{-1}(x_0)$ einer Überlagerung diskret, und S^k ist zusammenhängend für $k \geq 1$, folglich sind alle stetigen punktierten Abbildungen $S^k \rightarrow F$ konstant. Es folgt $\pi_k(F) = 0$ für alle $k \geq 1$. Mit Satz 3.25 und Bemerkung 3.18 folgen die Behauptungen. \square

3.27. BEISPIEL. Die universelle Überlagerung von S^1 ist \mathbb{R} nach Beispiel 2.24, also zusammenziehbar. Wegen den Bemerkungen 3.2 (1) und 3.6, Satz 2.26 und Folgerung 3.26 gilt daher

$$\pi_k(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } k = 1, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

3.28. BEISPIEL. Es sei $E = B \times F$ ein Produkt punktierter Räume und $p: E \rightarrow B$ die Projektion auf den ersten Faktor. Dann ist p nach Übung 3.114 eine Hurewicz-, also auch eine Serre-Faserung. Es gilt $\pi_k(E) = \pi_k(B) \times \pi_k(F)$, siehe Übung 3.105. Also hat die Homotopiesequenz die Form

$$\cdots \longleftarrow \pi_{k-1}(F) \xleftarrow{\partial} \pi_k(B) \xleftarrow{p_*} \underbrace{\pi_k(B) \times \pi_k(F)}_{\cong \pi_k(E)} \xleftarrow{i_*} \pi_k(F) \xleftarrow{\partial} \pi_{k+1}(B) \longleftarrow \cdots$$

Die Abbildung p_* ist die Projektion auf $\pi_k(B)$, und $i_*(a) = (0, a) \in \pi_k(B) \times \pi_k(F)$ für alle $a \in \pi_k(F)$. Die Sequenz ist offensichtlich bei $\pi_k(E)$ exakt. Da p_* surjektiv und i_* injektiv ist, folgt aus der Exaktheit an den anderen Stellen, dass

$$\ker \partial = \operatorname{im} p_* = \pi_k(B) \quad \text{und} \quad \operatorname{im} \partial = \ker i_* = 0,$$

also ist der Verbindungshomomorphismus $\partial = 0$ für alle k .

3.29. BEMERKUNG. Allgemeiner sei $p: E \rightarrow B$ eine Faserung. Unter einem *Schnitt* von p verstehen wir ein Rechtsinverses von p , also eine Abbildung $s: B \rightarrow E$ mit $p \circ s = \operatorname{id}_B$. Mit anderen Worten ist im $B \subset E$ in diesem Fall ein Retrakt von E . Im obigen Beispiel $E = B \times F$ liefert jeder Punkt $f \in F$ einen Schnitt s_f mit $s_f(b) = (b, f)$.

Wenn p einen Schnitt besitzt, gibt es in der Homotopiesequenz 3.25 ein Rechtsinverses s_* von p_* . Aus $p_* \circ s_* = \operatorname{id}_{\pi_k(B)}$ folgt die Surjektivität von p_* , somit gilt $\partial = 0$. Also können wir ∂ als *Hindernis* gegen die Existenz eines Schnittes auffassen.

In Übung 5.33 werden wir sehen, dass die Homotopiesequenz 3.25 ab $k \geq 2$ dann genau die gleiche Gestalt wie im obigen Beispiel hat. Im Falle $k = 1$ können wir lediglich folgern, dass $\pi_1(E)$ isomorph zu einem semidirekten Produkt $\pi_1(B) \ltimes \pi_1(F)$ ist.

3.30. DEFINITION. Ein *Faserbündel* mit *typischer Faser* F ist eine stetige Abbildung $p: E \rightarrow B$, so dass jeder Punkt b eine Umgebung $U \subset B$ besitzt, für die ein Homöomorphismus $\varphi: p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ existiert, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times F \\ & \searrow p & \swarrow \operatorname{pr}_U \\ & & U \end{array}$$

kommutiert, wobei pr_U die Projektion auf den ersten Faktor bezeichne. Dann heißt E der *Totalraum*, B die *Basis*, und φ eine *lokale Trivialisierung* oder *Bündelkarte* von $p: E \rightarrow B$.

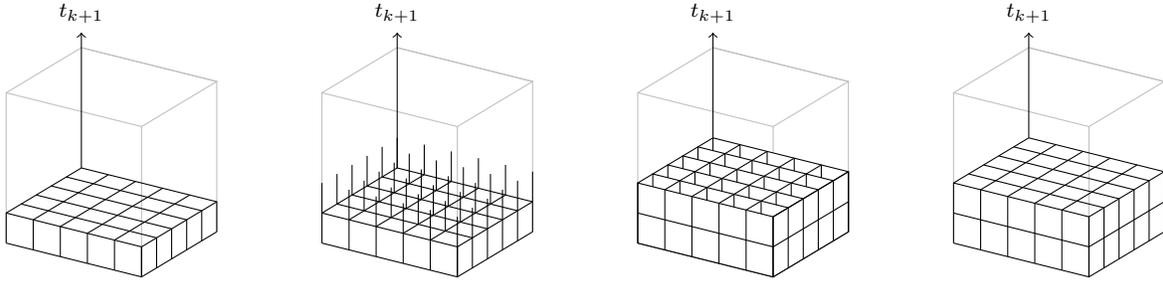


ABBILDUNG 3.3. Schichtweise Konstruktion von \tilde{h}

Ein Produkt wie in Beispiel 3.28 heißt auch *triviales Faserbündel*, daher die Terminologie.

3.31. PROPOSITION. *Es sei $p: E \rightarrow B$ eine Abbildung, und jeder Punkt $b \in B$ besitze eine Umgebung $U \subset B$, so dass $p: p^{-1}(U) \rightarrow U$ eine Serre-Faserung ist. Dann ist p ebenfalls eine Serre-Faserung.*

3.32. FOLGERUNG. *Jedes Faserbündel $p: E \rightarrow B$ ist eine Serre-Faserung.* □

Faserbündel über parakompakten Räumen sind sogar Hurewicz-Faserungen [tD2, Section 13.4], aber das zeigen wir hier nicht.

BEWEIS von Proposition 3.31. Es sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung von B durch Mengen U , über denen p eine Serre-Faserung ist. Es sei $X = I^k$ für $k \geq 0$, und $h: X \times I \rightarrow B$ und $\tilde{f}: X \rightarrow E$ seien Abbildungen wie in Definition 3.22. Dann ist $\{h^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ eine offene Überdeckung von I^{k+1} . Nach dem Satz 1.63 von Lebesgue können wir I^{k+1} für ein geeignetes $N \gg 1$ in N^{k+1} Würfeln der Kantenlänge $\frac{1}{N}$ unterteilen, so dass jeder dieser Würfel ganz in einer der Mengen $h^{-1}(U)$ mit $U \in \mathcal{U}$ enthalten ist.

Um \tilde{h} zu konstruieren, setzen wir \tilde{f} von $I^k \times \{0\}$ Schicht für Schicht auf I^{k+1} fort. Wir konstruieren in jeder Schicht \tilde{h} zunächst auf den Strecken über allen Ecken, dann auf den Quadraten über allen Kanten, und so weiter, und zum Schluss auf den $k+1$ -dimensionalen Würfeln selbst, siehe Abbildung 3.3. Dabei müssen wir in jedem Schritt von einer Menge der Form $\partial' I^i$ auf I^i fortsetzen. Dazu benutzen wir Bemerkung 3.23 und die Tatsache, dass wir stets über einer der offenen Mengen $U \subset B$ arbeiten, für die $p^{-1}(U) \rightarrow U$ eine Serre-Faserung ist. □

3.33. BEISPIEL. Der *komplex projektive Raum* $\mathbb{C}P^n$ ist definiert als Quotientenraum

$$\mathbb{C}P^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim,$$

wobei $(z_0, \dots, z_n) \sim (w_0, \dots, w_n)$ genau dann, wenn es $a \in \mathbb{C}^\times$ mit $a \cdot (z_0, \dots, z_n) = (w_0, \dots, w_n)$ gibt, siehe Übung 1.167. Man schreibt für die Äquivalenzklassen auch gern $(z_0 : \dots : z_n) = q(z_0, \dots, z_n)$. Der $\mathbb{C}P^n$ wird überdeckt von den $n+1$ Teilmengen U_0, \dots, U_n mit

$$U_k = \{(z_0 : \dots : z_n) \mid z_k \neq 0\} = \text{im}(q|_{\mathbb{C}^k \times \{0\} \times \mathbb{C}^{n-k}}).$$

Wir betrachten die sogenannte *Hopf-Faserung*

$$p: S^{2n+1} \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{q} \mathbb{C}P^n.$$

Über jedem U_k erhalten wir als lokale Trivialisierung den Homöomorphismus

$$\varphi: p^{-1}(U_k) \rightarrow U_k \times S^1 \quad \text{mit} \quad \varphi(z_0, \dots, z_n) = ((z_0 : \dots : z_n), \frac{z_k}{|z_k|})$$

$$\text{und} \quad \varphi^{-1}((z_0 : \dots : z_n), w) = \frac{w(z_k^{-1}z_0, \dots, 1, \dots, z_k^{-1}z_n)}{\|(z_k^{-1}z_0, \dots, 1, \dots, z_k^{-1}z_n)\|}.$$

Also ist die Hopf-Faserung ein Faserbündel mit typischer Faser $S^1 \subset \mathbb{C}^\times$.

Es gilt $S^2 \cong \mathbb{C}P^1$ (Riemannsche Zahlenkugel). Also erhalten wir als Spezialfall insbesondere die klassische Hopf-Faserung $S^3 \rightarrow S^2$ mit Faser S^1 . Die zugehörige exakte Homotopiesequenz 3.25 hat die Form

$$\cdots \longleftarrow \underbrace{\pi_{k-1}(S^1)}_{=0 \text{ für } k \neq 2} \xleftarrow{\partial} \pi_k(S^2) \xleftarrow{p_*} \pi_k(S^3) \xleftarrow{i_*} \underbrace{\pi_k(S^1)}_{=0 \text{ für } k \neq 1} \longleftarrow \cdots$$

Also gilt $\pi_k(S^2) \cong \pi_k(S^3)$ für alle $k \geq 3$.

3.34. BEISPIEL. Der *quaternionisch projektive Raum* $\mathbb{H}P^n$ ist definiert als Quotient

$$\mathbb{H}P^n = (\mathbb{H}P^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim,$$

wobei $(q_0, \dots, q_n) \sim (r_0, \dots, r_n)$ genau dann, wenn es $a \in \mathbb{H}^\times$ mit $a \cdot (q_0, \dots, q_n) = (r_0, \dots, r_n)$ gibt. Mit den gleichen Argumenten wie oben erhalten wir die *quaternionische Hopf-Faserung*

$$p: S^{4n+3} \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{H}P^n$$

als Faserbündel mit typischer Faser $S^3 \subset \mathbb{H}^\times$.

Es gilt $S^4 \cong \mathbb{H}P^1$, also existiert ein Faserbündel $p: S^7 \rightarrow S^4$ mit typischer Faser S^3 . Die zugehörige Homotopiesequenz hat die Gestalt

$$\cdots \longleftarrow \pi_{k-1}(S^3) \xleftarrow{\partial} \pi_k(S^4) \xleftarrow{p_*} \pi_k(S^7) \xleftarrow{i_*} \pi_k(S^3) \xleftarrow{\partial} \pi_{k+1}(S^4) \longleftarrow \cdots$$

3.d. Der Ausschneidungssatz

Für kleine k ist es manchmal möglich, die k -te Homotopiegruppe eines Raumes aus den k -ten Homotopien von Unterräumen (genauer, von Unterraum-Paaren) zusammensetzen, ähnlich wie im Satz 2.39 von Seifert und van Kampen. Einen direkter Vergleich mit diesem Ergebnis nehmen wir später vor.

3.35. DEFINITION. Ein Raum $X \neq \emptyset$ heißt *n -zusammenhängend*, wenn $\pi_k(X, x) = 0$ für alle $x \in X$ und alle $0 \leq k \leq n$.

Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ mit $X \neq \emptyset$ heißt *n -zusammenhängend*, wenn für alle $x \in X$ die induzierte Abbildung $f_*: \pi_k(X, x) \rightarrow \pi_k(Y, f(x))$ ein Isomorphismus ist für alle $0 \leq k < n$ und surjektiv für $k = n$.

Ein Paar (X, A) mit $A \neq \emptyset$ heißt *n -zusammenhängend*, wenn die Inklusion $A \hookrightarrow X$ eine n -zusammenhängende Abbildung ist.

Eine Abbildung $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ von Paaren mit $A, B \neq \emptyset$ heißt *n -zusammenhängend*, wenn für alle $x \in A$ und alle $0 \leq k < n$ die induzierte Abbildung $f_*: \pi_k(X, A, x) \rightarrow \pi_k(Y, B, f(x))$ ein Isomorphismus ist, und eine Surjektion für $k = n$.

Für einen Raum bedeutet 0-zusammenhängend das gleiche wie wegzusammenhängend, siehe Bemerkung 3.2 (1), und 1-zusammenhängend bedeutet wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend nach Bemerkung 3.2 (2). Ein Paar (X, A) ist 0-zusammenhängend, wenn jede Wegzusammenhangskomponente von X einen Punkt von A enthält.

3.36. BEMERKUNG. Für einen Raum X sind äquivalent:

- (1) der Raum X ist n -zusammenhängend;
- (2) für alle $k \leq n$ lässt sich jede Abbildung $S^k \rightarrow X$ zu einer Abbildung $D^{k+1} \rightarrow X$ fortsetzen;
- (3) für alle $k \leq n$ lässt sich jede Abbildung $\partial I^{k+1} \rightarrow X$ zu einer Abbildung $I^{k+1} \rightarrow X$ fortsetzen.

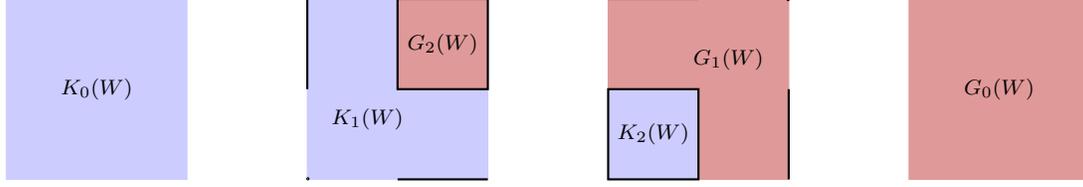


ABBILDUNG 3.4. Die Mengen $K_r(W)$ und $G_r(W)$

Die Äquivalenz von (2) und (3) ist offensichtlich, da die Paare (D^{k+1}, S^k) und $(I^{k+1}, \partial I^{k+1})$ homöomorph sind.

Zur Äquivalenz von (1) und (2) sei $f: S^k = I^k/\partial I^k \rightarrow X$ gegeben. Eine Nullhomotopie h von f ist eine Fortsetzung von f auf $I^{k+1}/\partial' I^{k+1}$ und umgekehrt, und das Paar $(I^{k+1}/\partial' I^{k+1}, I^k/\partial I^k)$ ist homöomorph zu (D^{k+1}, S^k) .

3.37. BEMERKUNG. Für ein Paar (X, A) und $n \geq 0$ sind äquivalent:

- (1) das Paar (X, A) ist n -zusammenhängend;
- (2) für alle $k \leq n$ und alle $x \in A$ gilt $\pi_k(X, A, x) = 0$;
- (3) für alle $1 \leq k \leq n$ ist jede Abbildung $(I^k, \partial I^k) \rightarrow (X, A)$ als Abbildung von Paaren homotop zu einer Abbildung $(I^k, \partial I^k) \rightarrow (A, A)$.
- (4) für alle $k \leq n$ lässt sich jede Abbildung $(\partial' I^{k+1}, \partial I^k \times \{0\}) \rightarrow (X, A)$ zu einer Abbildung $(I^{k+1}, I^k \times \{0\}) \rightarrow (X, A)$ fortsetzen.

Die Äquivalenz von (1) und (2) ergibt aus der langen exakten Sequenz 3.19 des Paares (X, A) .

Zu (2) \Rightarrow (3) überlegt man sich, dass die Paare $(I^k, \partial I^k)$, (D^k, S^{k-1}) und $(I^k/\partial' I^k, \partial I^k/\partial' I^k)$ paarweise homöomorph sind.

Wie in Bemerkung 3.23 existiert ein Homöomorphismus $g: I^{k+1} \rightarrow I^{k+1}$, der $\partial' I^{k+1}$ auf $I^k \times \{0\}$ abbildet und umgekehrt. Zu (3) \Rightarrow (4) sei $h: (I^{k+1}, \partial' I^{k+1}) \rightarrow (X, A)$ die Homotopie aus (3) zu $f \circ g^{-1}|_{I^k \times \{0\}}$. Dann ist $h \circ g$ die gesuchte Fortsetzung.

Für (4) \Rightarrow (2) betrachte $f: (I^k/\partial' I^k, \partial I^k/\partial' I^k) \rightarrow (X, A)$. Da das Paar $(I^k/\partial' I^k, \partial I^k/\partial' I^k)$ zu $(\partial' I^{k+1}, \partial I^k \times \{0\})$ homöomorph ist, ist f relativ zum Rand $\partial I^k/\partial' I^k$ homotop zu einer Abbildung $(I^k/\partial' I^k, \partial I^k/\partial' I^k) \rightarrow (A, A)$, liegt also im Bild von $\pi_k(A, A, x) = 0$.

3.38. SATZ (Ausschneidungssatz, Blakers-Massey). *Es sei X ein topologischer Raum und $U, V \subset X$ offen mit $X = U \cup V$ und $U \cap V \neq \emptyset$. Das Paar $(U, U \cap V)$ sei p -zusammenhängend, und $(V, U \cap V)$ sei q -zusammenhängend mit $p, q \geq 0$, dann ist $i: (U, U \cap V) \rightarrow (X, V)$ eine $(p+q)$ -zusammenhängende Abbildung von Paaren.*

Der Name rührt daher, dass wir die abgeschlossene Menge $V \setminus U$ aus X „ausschneiden“ können, ohne die ersten $p+q-1$ Homotopiegruppen zu verändern. Mit Hilfe dieses Satzes werden wir später einige nichttriviale Homotopiegruppen ausrechnen und viele wichtige Resultate beweisen.

Wir kopieren den Beweis von Puppe, siehe [tD2, Abschnitt 6.9]. Als erstes bringen wir die Repräsentanten von Homotopieklassen oder Homotopien zwischen ihnen in eine spezielle Form (Propositionen 3.39, 3.40), siehe Abbildung 3.6. Anschließend können wir den Anteil mit Werten in $V \setminus U$ wegdeformieren (Proposition 3.41).

Dazu betrachten wir achsenparallele Würfel der Form

$$W(a, \delta, J) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in [a_i, a_i + \delta] \text{ für } i \in J, \text{ und } x_i = a_i \text{ sonst} \} \subset \mathbb{R}^n$$

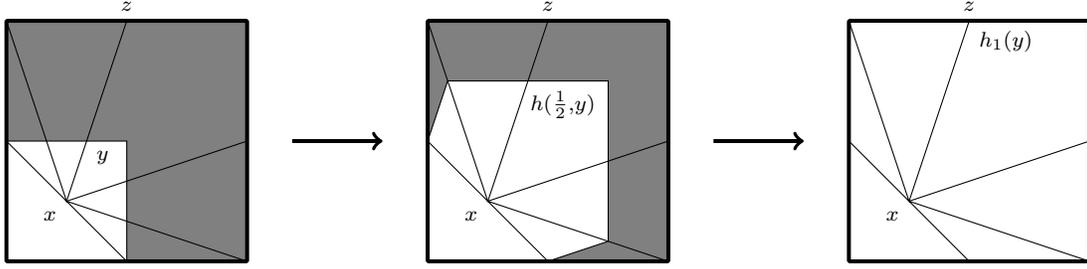


ABBILDUNG 3.5. Die Homotopie h_1

für $a \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$ und $J \subset \{1, \dots, n\}$. Für $W = W(a, \delta, J)$ und $0 \leq r$ definieren wir Teilmengen $K_r(W)$ und $G_r(W) \subset W$ — wie in Abbildung 3.4 angedeutet — durch

$$\begin{aligned} K_r(W) &= \left\{ x \in W \mid x_i \in \left(a_i, a_i + \frac{\delta}{2}\right) \text{ für mindestens } r \text{ verschiedene } i \in J \right\}, \\ G_r(W) &= \left\{ x \in W \mid x_i \in \left(a_i + \frac{\delta}{2}, a_i + \delta\right) \text{ für mindestens } r \text{ verschiedene } i \in J \right\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Inbesondere gilt $K_r(W) = G_r(W) = \emptyset$ falls $r > \dim W = \#J$. Unter den Seiten von $W(a, \delta, J)$ verstehen wir alle Würfel $W(a', \delta, J')$ mit $J' \subset J$ und mit $a'_i \in \{a_i, a_i + \delta\}$ für alle $i \in J \setminus J'$ und $a'_i = a_i$ sonst. Die Vereinigung aller echten Seiten W heißt wieder der (*geometrische*) Rand ∂W von W .

3.39. PROPOSITION. *Es seien $r \leq \dim W$, $f: W \rightarrow X$ und $A \subset X$ gegeben, so dass*

$$f^{-1}(A) \cap W' \subset K_r(W')$$

für alle echten Seiten W' von W gilt. Dann ist f homotop relativ zu ∂W zu einer Abbildung $g: W \rightarrow X$ mit $g^{-1}(A) \subset K_r(W)$. Eine entsprechende Aussage gilt, wenn man K_r überall durch G_r ersetzt.

BEWEIS. Ohne Einschränkung sei $W = I^k$ ein Einheitswürfel. Wir definieren eine Abbildung $h = h_1: I^k \rightarrow I^k$ homotop zur Identität und ersetzen f durch die homotope Abbildung $f \circ h$. Dazu fixieren wir $x = (\frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{4})$. Für jeden Strahl s am Punkt x sei y der Schnittpunkt von s mit $\partial[0, \frac{1}{2}]^k$, und z sei der Schnittpunkt von s mit ∂I^k . Dann bilde h_1 die Strecke xy affin auf die Strecke xz , und die Strecke yz konstant auf den Punkt z ab, siehe Abbildung 3.5. Diese Abbildung ist stetig, eine Homotopie zur Identität wird gegeben durch $h_t = (1-t)\text{id}_W + t h_1$, und man sieht leicht, dass $g = f \circ h_1$ die gestellte Bedingung erfüllt. \square

Wir betrachten jetzt eine Abbildung $f: I^k \rightarrow X$. Nach dem Satz 1.63 können wir I^k für ein geeignetes N so in N^k Würfel der Kantenlänge $\frac{1}{N}$ zerlegen, dass jeder dieser Würfel entweder in $f^{-1}(U)$ oder in $f^{-1}(V)$ liegt.

3.40. PROPOSITION. *Das Paar $(U, U \cap V)$ sei p -zusammenhängend, und $(V, U \cap V)$ sei q -zusammenhängend für $p, q \geq 0$. Dann existiert zu jeder Abbildung $f: I^k \rightarrow X$ eine Homotopie h von f zu $g: I^k \rightarrow X$, die für alle Seiten W von Würfeln der obigen Zerlegung folgendes erfüllt:*

- (1) falls $W \subset f^{-1}(U \cap V)$, gelte $h(x, t) = f(x)$ für alle $x \in W$, $t \in I$;
- (2) falls $W \subset f^{-1}(U)$, gelte $h(x, t) \subset U$ für alle $x \in W$, $t \in I$, und $g^{-1}(U \setminus V) \cap W \subset K_{p+1}(W)$;
- (3) falls $W \subset f^{-1}(V)$, gelte $h(x, t) \subset V$ für alle $x \in W$, $t \in I$, und $g^{-1}(V \setminus U) \cap W \subset G_{q+1}(W)$.

BEWEIS. Wir konstruieren h der Reihe nach für alle Ecken der Würfel W , dann für alle Kanten, und so weiter, und zum Schluss für die Würfel W selbst.

Sei also zunächst $W = \{x\}$ eine Ecke. Falls $f(x) \in U \cap V$, definieren wir $h|_{W \times I}$ durch (1). Sei also $f(x) \in U \setminus V$. Da $\pi_0(U, U \cap V) = 0$, finden wir einen Weg von x zu einem Punkt in $U \cap V$; dieser sei unsere Homotopie. Genauso verfahren wir, falls $f(x) \in V \setminus U$.

Sei jetzt W ein Würfel der Dimension $n \geq 1$. Nach Induktion ist h auf $\partial W \times I$ bereits konstruiert und wird auf $W \times \{0\}$ durch $f|_W$ gegeben. Falls $W \subset f^{-1}(U \cap V)$, definieren wir $h|_{W \times I}$ wieder durch (1). Gelte also $W \subset f^{-1}(U)$, aber nicht $W \subset f^{-1}(V)$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Falls $n \leq p$, gilt $\pi_n(U, U \cap V) = 0$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $h(x, t) \in U$ und $h(x, 1) \in U \cap V$ für alle $x \in \partial W$ und alle $t \in I$. Wir setzen $f|_{W \times \{0\}}$ und $h|_{\partial W \times I}$ gemäß Bemerkung 3.37 (4) zu einer Abbildung $h: W \times I \rightarrow U$ so fort, dass $h(x, 1) \in U \cap V$ für alle $x \in W$. Es folgt

$$g^{-1}(U \setminus V) = \emptyset = K_{p+1}(W) .$$

Falls $n > p$, konstruieren wir h und g mit Hilfe von Proposition 3.39. Analog verfahren wir, falls $W \subset f^{-1}(V)$, aber nicht $W \subset f^{-1}(U)$. \square

3.41. PROPOSITION. *Es sei $1 \leq k \leq p+q$ und $f: (I^k, \partial I^k) \rightarrow (X, U)$ eine Abbildung mit $I^{k-1} \times \{0\} \subset f^{-1}(V)$. Dann existiert eine Homotopie $h: I^{k+1} \rightarrow X$ von f zu einer Abbildung $g: I^k \rightarrow U$ mit folgenden Eigenschaften.*

- (1) *Wenn f eine Seite $W \subset \partial I^k$ von I^k nach $U \cap V$ abbildet, gelte $h(x, t) = f(x)$ für alle $t \in I$ und alle $x \in W$.*
- (2) *Für alle $t \in I$ und alle $x \in \partial I^k$ gelte $h(x, t) \in U$.*
- (3) *Für alle $t \in I$ und alle $x \in I^{k-1} \times \{0\}$ gelte $h(x, t) \in V$.*

BEWEIS. Wir wenden Proposition 3.40 an und erhalten eine zu f homotope Abbildung $I^k \rightarrow X$. Die Bedingungen (1)–(3) in Proposition 3.40 stellen sicher, dass diese Homotopie die obigen Eigenschaften (1)–(3) erfüllt. Wir dürfen daher ohne Einschränkung für alle W annehmen, dass

$$f^{-1}(U \setminus V) \subset K_{p+1}(W) \quad \text{und} \quad f^{-1}(V \setminus U) \subset G_{q+1}(W) .$$

Betrachte jetzt die orthogonale Projektion $P: I^k \rightarrow I^{k-1} \times \{0\}$. Sei W' das Bild unter p eines Würfels W der obigen Zerlegung. Da wir die Kontrolle über eine Koordinate verlieren, gilt

$$K_{p+1}(W) \subset P^{-1}(K_p(W')) \quad \text{und} \quad G_{q+1}(W) \subset P^{-1}(G_q(W')) .$$

Da $k-1 < p+q$, sind die Mengen $K_p(W')$ und $G_q(W')$ nach Konstruktion (3.2) disjunkt, siehe Abbildung 3.4. Wegen Proposition 3.40 (2) und (3) sind dann auch die kompakten Mengen

$$A = \{ P(x) \mid x \in f^{-1}(U \setminus V) \} \quad \text{und} \quad B = \{ P(x) \mid x \in f^{-1}(V \setminus U) \} \subset I^{k-1}$$

disjunkt. Da ∂I^k auf U abgebildet wird, ist insbesondere B auch disjunkt zu ∂I^{k-1} . Nach Urysohns Lemma 1.29 existiert eine stetige Funktion $u: I^{k-1} \rightarrow I$ mit $u|_{A \cup \partial I^{k-1}} = 0$ und $u|_B = 1$.

Insbesondere liegt $f^{-1}(U \setminus V)$ oberhalb des Graphen von u in I^k , und $f^{-1}(V \setminus U)$ unterhalb, siehe Abbildung 3.6. Wir konstruieren eine Homotopie relativ zu ∂I^k durch

$$h(x_1, \dots, x_k, t) = f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + (1 - x_k)tu(x_1, \dots, x_{k-1})) .$$

Diese Homotopie bildet ganz $\partial I^k \times I$ nach V ab, und die Abbildung $g = h(\cdot, 1)$ nimmt Werte in U an. Zusammen mit der Homotopie aus Proposition 3.40 ist die Behauptung bewiesen. \square

BEWEIS des Ausschneidungssatzes 3.38. Es sei $k = 0$. Jede Wegzusammenhangskomponente von U und V enthält Punkte von $U \cap V$, da $p, q \geq 0$. Es folgt

$$\pi_0(X, V) = \{*\} = \pi_0(U, U \cap V) .$$

Sei $x \in U \cap V$. Zur Surjektivität der Abbildung

$$i_*\pi_k(U, U \cap V, x) \rightarrow \pi_k(X, V, x)$$

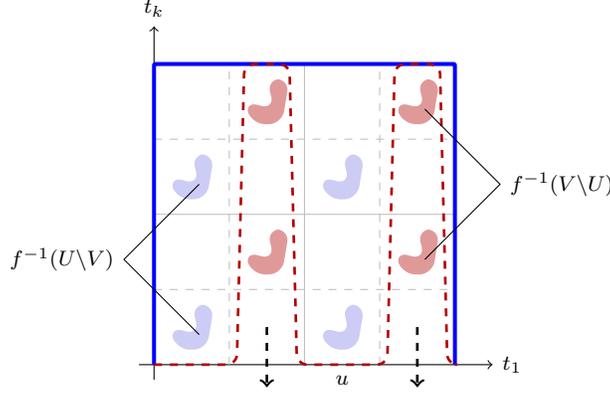


ABBILDUNG 3.6. Die Urbilder von $V \setminus U$ und $U \setminus V$ in I^k

seien $1 \leq k \leq p + q$ und $f: (I^k/\partial I^k, \partial I^k/\partial I^k) \rightarrow (X, V)$ gegeben. Wir wenden Proposition 3.41 auf $\bar{f}: I^k \rightarrow X$ an. Es folgt $[f] = [g] \in \pi_k(X, V)$ und $[g] \in \text{im}(i_*)$. Damit ist Surjektivität von i_* bewiesen.

Der Beweis der Injektivität verläuft ähnlich. Sei $2 \leq k \leq p + q$, und seien $f_0, f_1 \in \pi_{k-1}(U, U \cap V, x)$ mit $i_* f_0 = i_* f_1$ repräsentiert durch $\bar{f}_j: (I^{k-1}, \partial I^{k-1}) \rightarrow (U, U \cap V)$, so dass $\partial I^{k-1} \subset \bar{f}_j^{-1}(\{x\})$ für $j = 0, 1$. Dann existiert eine Homotopie $\bar{h}: (I^k, \partial I^{k-1} \times I) \rightarrow (X, V)$ zwischen \bar{f}_0 und \bar{f}_1 , wobei ganz $\partial I^{k-1} \times I$ auf x abgebildet wird. Insbesondere bildet \bar{h} die Seite $\partial I^{k-2} \times \{0\} \times I$ nach V ab, alle anderen Seiten von I^k werden nach U abgebildet. Wir wenden Proposition 3.41 auf \bar{h} an und erhalten eine neue Abbildung $\bar{k}: I^k \rightarrow U$. Dabei wird zunächst f_j durch eine in $(U, U \cap V)$ punktiert homotope Abbildung $g_j = k(\cdot, j)$ ersetzt, und k ist eine punktierte Homotopie zwischen g_0 und g_1 in $(U, U \cap V)$. Es folgt $[f_0] = [g_0] = [g_1] = [f_1] \in \pi_{k-1}(U, U \cap V)$, und wir erhalten die Injektivität von i_* in den Graden $0, \dots, p + q - 1$. Zusammen mit der obigen Surjektivität ist $i: (U, U \cap V) \rightarrow (X, V)$ also eine $(p + q)$ -zusammenhängende Abbildung von Paaren. \square

3.e. Der Satz von Brouwer und Hopf

In diesem Abschnitt berechnen wir einige Homotopiegruppen von Sphären. Die Homotopiegruppen der S^1 kennen wir bereits aus Beispiel 3.27.

Für $n \geq 1$ bezeichne $e_1 \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ den Basispunkt. Wir zerlegen $S^n = U \cup V$ mit $U = S^n \setminus \{-e_2\}$ und $V = S^n \setminus \{e_2\}$; beide Teilmengen sind zusammenziehbar. Mit Bemerkung 3.6 liefert die lange exakte Sequenz des Paares (S^n, V) Isomorphismen

$$\cdots \longleftarrow \underbrace{\pi_{k-1}(V)}_{=0} \longleftarrow \pi_k(S^n, V) \xleftarrow{\cong} \pi_k(S^n) \longleftarrow \underbrace{\pi_k(V)}_{=0} \longleftarrow \cdots \quad (3.3)$$

für alle k . Der Durchschnitt $U \cap V$ ist homotopieäquivalent zu einer S^{n-1} . Mit Folgerung 3.21 aus dem Fünferlemma 3.20 schließen wir, dass die jeweiligen Inklusionen der „oberen“ und „unteren“ Hemisphären in die S^n für alle k Isomorphismen

$$\pi_k(D^n, S^{n-1}) \cong \pi_k(U, U \cap V) \quad \text{und} \quad \pi_k(D^n, S^{n-1}) \cong \pi_k(V, U \cap V) \quad (3.4)$$

induzieren. Der Raum D^n ist zusammenziehbar. Die Homotopiesequenz 3.19 des Paares (D^n, S^{n-1}) liefert also Isomorphismen

$$\cdots \longleftarrow \underbrace{\pi_{k-1}(D^n)}_{=0} \longleftarrow \pi_{k-1}(S^{n-1}) \xleftarrow{\cong} \pi_k(D^n, S^{n-1}) \longleftarrow \underbrace{\pi_k(D^n)}_{=0} \longleftarrow \cdots \quad (3.5)$$

für alle k .

3.42. SATZ (Brouwer, Hopf). Für alle $n \geq 1$ gilt:

- (1) der Raum S^n ist $(n-1)$ -zusammenhängend;
- (2) das Paar (D^n, S^{n-1}) ist $(n-1)$ -zusammenhängend;
- (3) es gilt

$$\pi_n(S^n) \cong \pi_{n+1}(D^{n+1}, S^n) \cong \mathbb{Z},$$

dabei werden beide Gruppen von der jeweiligen Identität erzeugt;

- (4) die Abbildung

$$\pi_{k-1}(S^{n-1}) \xrightarrow[\cong]{\partial^{-1}} \pi_k(D^n, S^{n-1}) \cong \pi_k(U, U \cap V) \xrightarrow{i_*} \pi_k(S^n, V) \xrightarrow[\cong]{j_*^{-1}} \pi_k(S^n)$$

ist ein Isomorphismus für alle $1 \leq k < 2n-2$, und surjektiv, falls $1 \leq k = 2n-2$.

In (3) haben wir $I^n/\partial I^n$ gemäß Bemerkung 3.2 (3) mit S^n und $(I^n/\partial' I^n, \partial I^n/\partial' I^n)$ gemäß Bemerkung 3.13 mit (D^n, S^{n-1}) identifiziert.

Aussage (1) kann man auch elementar (ohne Ausschneidung) beweisen, allerdings ist der Beweis immer noch etwas aufwändig. Dazu stellt man ein Element von $\pi_k(S^n)$ mit $k < n$ durch eine punktierte Abbildung $f: I^k/\partial I^k \rightarrow S^n$ dar. Diese Abbildung kann surjektiv sein, siehe Beispiel 1.21. Indem man f im Inneren von I^k geschickt glättet, erhält man eine punktiert homotope Abbildung, die einen Punkt in S^n nicht trifft, ohne Einschränkung den Südpol x . Dann zieht man $S^n \setminus \{x\}$ auf den Nordpol zusammen und erhält so eine Nullhomotopie von f .

BEWEIS. Wir beweisen zunächst (1), (2) und (4) durch Induktion über n . Für $n=1$ gelten die Behauptungen, denn S^1 ist zusammenhängend, es gilt $\pi_0(D^1, S^0) = \{*\}$, und Aussage (4) ist leer.

Sei jetzt $n > 1$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\pi_k(S^{n-1}) = 0$ für $k \leq n-2$. Aus (3.5) folgt $\pi_k(D^n, S^{n-1}) = 0$ für alle $k \leq n-1$, also ist (D^n, S^{n-1}) ein $(n-1)$ -zusammenhängendes Paar nach Bemerkung 3.37, und (2) ist gezeigt.

Wegen (3.4) sind auch die Paare $(U, U \cap V)$ und $(V, U \cap V)$ jeweils $(n-1)$ -zusammenhängend. Nach dem Ausschneidungssatz 3.38 ist $(U, U \cap V) \rightarrow (S^n, V)$ eine $(2n-2)$ -zusammenhängende Abbildung. Es folgt Behauptung (4).

Für $n \geq 2$ ist $2n-2 \geq n$, und für $k < n$ erhalten wir

$$0 = \pi_k(D^n, S^{n-1}) \cong \pi_k(U, U \cap V) \cong \pi_k(S^n, V) \cong \pi_k(S^n).$$

Damit sind (1), (2) und (4) für alle n gezeigt.

Für $n=1$ folgt (3) aus Satz 2.26. Für $n=2$ betrachten wir die Homotopiesequenz der Hopf-Faserung aus Beispiel 3.33. Wegen (1) hat sie die Form

$$\cdots \longleftarrow \underbrace{\pi_1(S^3)}_{=0} \xleftarrow{i_*} \underbrace{\pi_1(S^1)}_{\cong \mathbb{Z}} \xleftarrow{\partial} \pi_2(S^2) \xleftarrow{p_*} \underbrace{\pi_2(S^3)}_{=0} \longleftarrow \cdots$$

Mit (4) und (3.5) erhalten wir die Isomorphismen in (3) induktiv für alle n .

Wir konstruieren induktiv Homöomorphismen

$$\varphi_k: I^k/\partial I^k \xrightarrow{\cong} S^k \quad \text{und} \quad \psi_k: (I^k/\partial' I^k, \partial I^k/\partial' I^k) \xrightarrow{\cong} (D^k, S^{k-1})$$

wie in den Bemerkung 3.2 (3), und zeigen, dass $[\text{id}_{S^n}] = [\varphi_n]$ und $[\text{id}_{(D^{n+1}, S^n)}] = [\psi_{n+1}]$ jeweils Erzeuger von $\pi_n(S^n)$ beziehungsweise $\pi_{n+1}(D^{n+1}, S^n)$ sind. Für $\pi_1(S^1)$ folgt das aus Satz 2.26.

Sei also $n \geq 2$ und $[\varphi_{n-1}]$ Erzeuger von $\pi_{n-1}(S^{n-1})$. Dann können wir ψ_n konstruieren, indem wir

$$\psi_n|_{(I^{n-1} \times \{0\})/(\partial I^{n-1} \times \{0\})} = \varphi_{n-1}$$

auf $(I^n/\partial I^n, \partial I^n/\partial I^n)$ fortsetzen. Nach Satz 3.19 und (3.5) ist dann $[\psi_n] = \partial^{-1}[\varphi_{n-1}]$ Erzeuger von $\pi_n(D^n, S^{n-1})$.

Mit dem Ausschneidungssatz 3.38 erhalten wir einen Isomorphismus

$$\mathbb{Z} \cong \pi_n(D^n, S^{n-1}) \cong \pi_n(U, U \cap V) \longrightarrow \pi_n(S^n, V) \cong \pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$$

(für $n = 2$ ist diese Abbildung wegen (4) zunächst nur surjektiv, aber die einzigen surjektiven Gruppen-Endomorphismen von \mathbb{Z} sind $a \mapsto \pm a$, also bijektiv). Das Bild von $[\psi_n]$ ist Erzeuger von $\pi_n(S^n)$.

Das Bild von $[\psi_n]$ in $\pi_n(S^n, V)$ entspricht einer Abbildung, die das Innere von I^n homöomorph auf die Hemisphäre $\{x \in S^n \mid x_2 > 0\}$ abbildet. In $\pi_n(S^n, \{e_1\}) \cong \pi_n(S^n)$ entspricht das einer Abbildung, die das Innere von I^n homöomorph auf $S^n \setminus \{e_1\}$ abbildet; diese sei unsere neue Abbildung φ_n . \square

3.43. BEISPIEL. Wir betrachten die Hopf-Faserungen aus den Beispielen 3.33 und 3.34.

- (1) Da $\pi_1(S^{2n+1}) = 0$ für $n \geq 1$ nach Satz 3.42 (1), ist die Inklusion $i: S^1 \rightarrow S^{2n+1}$ der Faser in der Hopf-Faserung $p: S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ homotop zur konstanten Abbildung; es folgt $\pi_k i = 0$ für alle k . Somit zerfällt die lange exakte Sequenz in eine Folge kurzer exakter Sequenzen der Form

$$0 \longleftarrow \pi_{k-1}(S^1) \xleftarrow{\partial} \pi_k(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{p_*} \pi_k(S^{2n+1}) \longleftarrow 0.$$

Aus Beispiel 3.27 folgt jetzt

$$\pi_2(\mathbb{C}P^n) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad \pi_k(\mathbb{C}P^n) \cong \pi_k(S^{2n+1}) \quad \text{für alle } k \neq 2.$$

Wegen Satz 3.42 (3) gilt für $k \neq 2$ also auch

$$\pi_{2n+1}(\mathbb{C}P^n) \cong \pi_{2n+1}(S^{2n+1}) \cong \mathbb{Z}, \quad \text{insbesondere} \quad \pi_3(S^2) \cong \pi_3(\mathbb{C}P^1) \cong \mathbb{Z}.$$

Erzeuger dieser Gruppe \mathbb{Z} ist übrigens die Hopf-Faserung selbst, denn

$$[p] = [p \circ \text{id}_{S^{2n+1}}] = p_*[\text{id}_{S^{2n+1}}].$$

Interessanterweise kann man also eine Sphäre in eine Mannigfaltigkeit M kleinerer Dimension nicht-nullhomotop abbilden.

- (2) Genauso ist in der quaternionischen Hopf-Faserung $i: S^3 \rightarrow S^{4n+3}$ homotop zur konstanten Abbildung, und wir erhalten eine Folge kurzer exakter Sequenzen

$$0 \longleftarrow \pi_{k-1}(S^3) \xleftarrow{\partial} \pi_k(\mathbb{H}P^n) \xrightarrow{p_*} \pi_k(S^{4n+3}) \longleftarrow 0.$$

Im Gegensatz zur S^1 gilt $\pi_k(S^3) \neq 0$ für unendlich viele $k \geq 3$. Für $k = 4n + 3$ sehen wir aber immerhin, dass die Klasse $[p] = p_*[\text{id}_{S^{4n+3}}]$ der quaternionischen Hopf-Faserung unendliche Ordnung in der Gruppe $\pi_{4n+3}(\mathbb{H}P^n)$ hat. Im Spezialfall $n = 1$ folgt daraus, dass $\pi_7(S^4)$ eine unendliche Gruppe ist.

In der Tat enthält $\pi_{4n-1}(S^{2n})$ stets \mathbb{Z} als direkten Summanden für alle $n \in \mathbb{Z}$, aber das können wir jetzt noch nicht beweisen. Ansonsten ist $\pi_k(S^n)$ endlich für $k > n$, und wir sehen, dass die Bedingung in Satz 3.42 (4) scharf ist, denn $\pi_{4n-1}(S^{2n}) \rightarrow \pi_{4n}(S^{2n+1})$ ist sicher nicht injektiv.

Der Satz 3.42 von Brouwer-Hopf hat viele topologische und geometrische Anwendungen. Einige fassen wir hier zusammen, weitere folgen in Übung 3.121.

3.44. SATZ (Brouwerscher Fixpunktsatz). *Für $n \geq 0$ hat jede stetige Abbildung $f: D^n \rightarrow D^n$ einen Fixpunkt.*

Der Fall $n = 1$ folgt aus dem Zwischenwertsatz, siehe Bemerkung 2.27, und $n = 2$ haben wir bereits in Satz 2.29 behandelt.

BEWEIS. Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen, es sei also $n \geq 1$. Wie im Beweis von Satz 2.29 im Fall $n = 2$ nehmen wir an, dass die Abbildung $f: D^n \rightarrow D^n$ keinen Fixpunkt hat, und konstruieren dann eine Retraktion $r: D^n \rightarrow S^{n-1} = \partial D^n$ wie in Abbildung 2.2. Sei $i: S^{n-1} \rightarrow D^n$ die Inklusion, dann gilt also $r \circ i = \text{id}_{S^{n-1}}$. Wie in Bemerkung 2.28 folgt für jeden kovarianten Funktor Φ von der Kategorie \mathcal{Top}_+ in eine Kategorie \mathcal{C} , dass $\Phi r \circ \Phi i = \text{id}_{\Phi S^{n-1}}$. Der Funktor $\pi_{n-1}: \mathcal{Top}_+ \rightarrow \mathcal{Set}_+$ liefert jetzt einen Widerspruch, da $\pi_{n-1}(S^{n-1}) \neq \{*\} = \pi_{n-1}(D^n)$. \square

Wir wollen jetzt freie Homotopieklassen von Abbildungen von S^n nach S^n betrachten und erinnern uns an Folgerung 3.8. Für die Spären S^n mit $n \geq 1$ wirkt $\pi_1(S^n)$ trivial auf $\pi_k(S^n)$, denn $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ ist abelsch und alle anderen $\pi_k(S^1)$ verschwinden, und für $n > 1$ ist $\pi_1(S^n)$ trivial. Daher identifizieren wir $[S_+^k, S^n]$ mit $\pi_k(S^n)$.

3.45. DEFINITION. Sei $\text{deg}: [S_+^n, S^n] \cong \pi_n(S^n) \rightarrow \mathbb{Z}$ der Isomorphismus aus Satz 3.42 (3). Für eine Abbildung $f: S^n \rightarrow S^n$ heißt $\text{deg } f = \text{deg}[f] \in \mathbb{Z}$ der *Abbildungsgrad* von f .

Später werden wir diesen Begriff verallgemeinern auf Abbildungen zwischen orientierten topologischen Mannigfaltigkeiten der gleichen Dimension.

3.46. FOLGERUNG (aus Satz 3.42). *Zwei Abbildungen $f, g: S^n \rightarrow S^n$ sind genau dann homotop, wenn sie den gleichen Abbildungsgrad haben.* \square

3.47. BEISPIEL. Es sei $A \in GL(n, \mathbb{R})$ für $n \geq 1$, dann hat die Abbildung $f_A: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ mit

$$f_A(x) = \frac{Ax}{\|Ax\|}$$

den Abbildungsgrad $\text{deg } f_A = \text{sign det } A \in \{1, -1\}$.

Die Gruppe $GL(n, \mathbb{R})$ hat genau zwei Wegzusammenhangskomponenten, auf denen die Determinante unterschiedliches Vorzeichen hat. Ein Weg γ zwischen zwei Elementen $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$ liefert eine Homotopie

$$h(x, t) = \frac{\gamma(t)x}{\|\gamma(t)x\|}$$

zwischen f_A und f_B . Da $\text{deg } f_{E_n} = \text{deg id} = \text{sign det } E_n$ gilt, reicht es, ein Element A mit $\text{deg } f_A = \text{sign det } A = -1$ anzugeben. Aus dem Beweis von Satz 3.5 schließen wir, dass folgende Matrix das Gewünschte leistet:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Unter einem Vektorfeld auf S^n verstehen wir eine Abbildung $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, so dass x und $f(x)$ für alle x aufeinander senkrecht stehen.

3.48. SATZ (Satz vom Igel). *Die Sphäre S^n trägt genau dann ein nirgends verschwindendes Vektorfeld, wenn n ungerade ist.*

BEWEIS. Sei $n = 2k - 1$ ungerade. Ein nicht verschwindendes Vektorfeld wird gegeben durch

$$f(z) = iz \quad \text{für alle } z \in S^n \subset \mathbb{C}^k.$$

Umgekehrt sei f ein nirgends verschwindendes Vektorfeld. Indem wir $f(x)$ durch $\frac{f(x)}{\|f(x)\|}$ ersetzen, dürfen wir $\|f(x)\| = 1$ für alle $x \in S^n$ annehmen. Dann erhalten wir eine Homotopie zwischen id und $-\text{id}$ durch

$$h(x, t) = \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)f(x).$$

Es folgt

$$1 = \text{deg id} = \text{deg}(-\text{id}) = \text{sign det}(-E_{n+1}) = (-1)^{n+1},$$

also ist n ungerade. \square

Wir beweisen noch die Invarianz der Dimension. Dabei ist interessant, dass wir mit Hilfe eines homotopieinvarianten Funktors Eigenschaften nachweisen können, die nicht homotopieinvariant sind. Wir erinnern uns an den Begriff der topologischen Mannigfaltigkeit aus Definition 1.103, siehe auch Bemerkung 1.105 (4). Es sei (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum und $x \in X$, $x \neq x_0$. Dann schreiben wir $X|x = (X, X \setminus \{x\}) = (X, X \setminus \{x\}, x_0)$.

3.49. BEISPIEL. Bis auf Homöomorphie gibt es nur zwei zusammenhängende eindimensionale Mannigfaltigkeiten: den Kreis S^1 und das offene Intervall \mathbb{R} . In diesem Fall erhalten wir für jeden Punkt x Bijektionen $\pi_0(S^1|x) = \pi_0(\mathbb{R}|x) = \{*\}$, sowie mit Folgerung 3.21 auch

$$\pi_1(S^1|x) \cong \pi_1(S^1, \{x_0\}) \cong \mathbb{Z}, \quad \text{und} \quad \pi_1(\mathbb{R}|x) \cong \pi_1(D^1, S^0) \cong \pi_0(S^0) \cong \{0, *\}.$$

3.50. PROPOSITION. *Es sei M eine zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$, und es sei $x \in M$. Dann gilt*

- (1) Für $0 \leq k \leq n - 1$ ist $\pi_k(M|x) = 0$.
- (2) Die Gruppe $\pi_n(M|x)$ enthält eine Kopie von \mathbb{Z} als Untergruppe.

Falls M nicht zusammenhängend ist, gilt die Aussage, falls wir den Basispunkt in der gleichen Zusammenhangskomponente wie x wählen.

BEWEIS. Es sei $U \subset M$ eine offene Umgebung von x , die zu B^n (oder äquivalent zu \mathbb{R}^n) homöomorph ist. Indem wir U gegebenenfalls verkleinern, dürfen wir annehmen, dass sich der Homöomorphismus zu einem Homöomorphismus $\bar{U} \cong D^n$ fortsetzt.

Wir zerlegen

$$M = U \cup (M \setminus \{x\}).$$

Da M zusammenhängend ist, ist $(M \setminus \{x\}, U \setminus \{x\})$ ein 0-zusammenhängendes Paar. Da U zusammenziehbar und $U \setminus \{x\}$ zu S^{n-1} homotopieäquivalent ist, ist $U|x = (U, U \setminus \{x\})$ ein $(n - 1)$ -zusammenhängendes Paar. Aus dem Ausschneidungssatz folgt für $k \leq n - 1$, dass

$$\pi_k(M|x) = \pi_k(M, M \setminus \{x\}) \cong \pi_k(U, U \setminus \{x\}) = \pi_k(U|x) = 0.$$

Betrachte jetzt die Inklusion $U \rightarrow M$ und die Quotientenabbildung

$$q: M \rightarrow M/(M \setminus U) \cong S^n.$$

Wie im Beweis von Satz 3.42 erhalten wir einen Isomorphismus

$$\pi_n(q \circ i): \pi_n(U|x) \cong \pi_n(D^n, S^{n-1}) \longrightarrow \pi_n(S^n).$$

Wie in Bemerkung 2.28 folgt die Injektivität von $\pi_n i$. □

3.51. SATZ (Invarianz der Dimension, Brouwer). *Es seien M, N topologische Mannigfaltigkeiten der Dimensionen $m, n \in \mathbb{N}$. Wenn M und N homöomorph sind, gilt $m = n$.*

BEWEIS. Wir betrachten als erstes den Spezialfall, dass $m = 0$. In diesem Fall trägt M die diskrete Topologie. Wenn M und N homöomorph ist, trägt auch N die diskrete Topologie, also gilt auch $n = 0$. Andernfalls können wir mit Beispiel 3.49 und Proposition 3.50 die Dimension von M charakterisieren als

$$m = \inf \{ k \in \mathbb{N} \mid \pi_k(M|x) \neq 0 \}.$$

Wenn M und N homöomorph sind, folgt $m = n$. □

3.52. DEFINITION. Eine (topologische) Mannigfaltigkeit mit Rand der Dimension $n \in \mathbb{N}$ ist ein Hausdorff-Raum M mit abzählbarer Basis, so daß jeder Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset M$ besitzt, die homöomorph zu \mathbb{R}^n oder zu $\mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$ ist.

Der (geometrische) Rand ∂M von M ist die Teilmenge derjenigen Punkte, die von Homöomorphismen $U \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$ wie oben auf Punkte in $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ abgebildet werden.

3.53. BEMERKUNG. Für einen Punkt x in einer Mannigfaltigkeit M mit Rand gibt es genau zwei Möglichkeiten, siehe Übung 3.122.

- (1) Für jede offene Umgebung $U \subset M$ von x und jeden Homöomorphismus $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$ gilt $\varphi(x) \in \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)$; in diesem Fall heißt x ein *innerer Punkt* von M , oder
- (2) Es gibt keine offene Umgebung von x in M , die zu \mathbb{R}^n homöomorph ist, und für jede offene Umgebung $U \subset M$ von x und jeden Homöomorphismus $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$ gilt $\varphi(x) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$; in diesem Fall heißt x ein *Randpunkt* von M .

3.54. BEISPIEL. Wir kennen bereits einige topologische Mannigfaltigkeiten mit Rand.

- (1) Jede topologische Mannigfaltigkeit M im Sinne von Definition 1.103 ist eine Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial M = \emptyset$.
- (2) Jede differenzierbare Mannigfaltigkeit M mit Rand $N \subset M$ ist topologische Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial M = N$.
- (3) Der Halbraum $\mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$ ist eine Mannigfaltigkeit mit Rand $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$.
- (4) Der abgeschlossene Ball D^n ist eine Mannigfaltigkeit mit Rand S^{n-1} .
- (5) Der Einheitswürfel I^n ist eine Mannigfaltigkeit mit Rand ∂I^n , denn es gilt $(D^n, S^{n-1}) \cong (I^n, \partial I^n)$.

3.f. Kofaserungen und Quotienten

Wenn man in einem Diagramm alle Pfeile umdreht, erhält man ein dazu duales Diagramm. In diesem Sinne sind Produkte dual zur disjunkten Vereinigung (Sätze 1.78 und 1.53), Unterräume sind dual zu Quotienten (Sätze 1.50 und 1.83). Solange man nur abstrakt mit universellen Eigenschaften arbeitet, lassen sich alle Argumente übertragen. Aber bereits die Existenz von Produkten oder disjunkten Vereinigungen lässt sich nicht rein abstrakt zeigen, man braucht konkrete Überlegungen.

Eckmann-Hilton-Dualität ist die Idee, dass es auch zu jedem homotopietheoretischen Begriff einen dualen Begriff geben sollte. In diesem Abschnitt geht es um den dualen Begriff zu den Faserungen aus Abschnitt 3.c, der tatsächlich mindestens so wichtig ist wie das Original. Im Hinblick auf später betrachten wir in diesem Abschnitt auch Räume ohne Basispunkt. Wir bilden das duale Diagramm zum Diagramm zur Homotopieliftungseigenschaft

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\
 \times\{0\} \downarrow & \nearrow \tilde{h} & \downarrow p \\
 Y \times I & \xrightarrow{h} & B
 \end{array}
 \quad \text{und} \quad
 \begin{array}{ccc}
 Y & \xleftarrow{f} & X \\
 \text{ev}_0 \uparrow & \nwarrow H & \uparrow i \\
 C(I, Y) & \xleftarrow{h} & A
 \end{array}
 \tag{3.6}$$

Hier ist nach dem Exponentialgesetz 1.101 (2) das Produkt mit dem festen, lokalkompakten Raum I dual zum Wegeraum $C(I, \cdot)$: anstelle von Homotopien von Abbildungen von Y nach B oder E betrachten wir Homotopien von Abbildungen von A oder X nach Y . Das rechte Diagramm führt zu unserem neuen Begriff.

3.55. DEFINITION. Eine Abbildung $i: A \rightarrow X$ ist eine (*Hurewicz*-) *Kofaserung*, wenn i für jeden Raum Y die *Homotopieausdehnungseigenschaft* besitzt, das heißt, wenn es zu jedem Raum Y , jeder Abbildung $f: X \rightarrow Y$ und jeder Homotopie $h: A \times I \rightarrow Y$ mit

$$h(a, 0) = f(i(a)) \quad \text{für alle } a \in A \tag{1}$$

eine Homotopie $H: X \times I \rightarrow Y$ gibt, so dass

$$H(x, 0) = f(x) \quad \text{und} \quad H(i(a), t) = h(a, t) \quad \text{für alle } x \in X, a \in A \text{ und } t \in I. \tag{2}$$

Wir nennen ein Paar (X, A) eine *Kofaserung*, wenn die Inklusion $i: A \rightarrow X$ eine Kofaserung ist. Wir nennen einen punktierten Raum (X, x_0) *gut punktiert* und x_0 einen *guten* oder *nicht entarteten Basispunkt*, wenn $\{x_0\}$ in X abgeschlossen und $(X, \{x_0\})$ eine Kofaserung ist.

3.56. BEISPIEL. Zunächst wollen wir etwas besser verstehen, was wir gerade definiert haben. Wir beginnen mit einigen trivialen Beispielen.

- (1) Die Identität id_X ist eine Kofaserung.
- (2) Die triviale Abbildung $\emptyset \rightarrow X$ ist eine Kofaserung in \mathcal{Top} , das Analogon $\text{pt} \rightarrow X$ in \mathcal{Top}_+ jedoch nicht immer, denn
- (3) Das Paar $(\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{0\}, \{0\})$ ist keine Kofaserung.

Weitere Beispiele gibt es in den Übungen 3.126 und 3.133.

3.57. DEFINITION. Es sei $f: Y \rightarrow X$ eine Abbildung. Wir definieren den *Abbildungszylinder*

$$Zf = (Y \times I \sqcup X) / \sim ,$$

wobei „ \sim “ die von $(y, 0) \sim f(y)$ für alle $y \in Y$ erzeugte Äquivalenzrelation sei.

3.58. BEMERKUNG. Zunächst liefert uns das Exponentialgesetz 1.101 eine natürliche Bijektion $C(X \times I, Y) \cong C(X, C(I, Y))$, so dass wir h und H als Abbildungen $A \times I \rightarrow Y$ beziehungsweise $X \times I \rightarrow Y$ auffassen dürfen.

Wir betrachten in Definition 3.55 den Spezialfall $Y = Zi$ und $F = \text{id}_{Zi}$ mit den zugehörigen Abbildungen f und h . Wenn i eine Kofaserung ist, existiert eine Abbildung $H: X \times I \rightarrow Zi$, so dass für alle $x \in X$, $a \in A$ und $t \in I$ gilt

$$H(i(a), t) = [a, t] \in Zi \quad \text{und} \quad H(x, 0) = x \in X \subset Zi .$$

Hieraus folgt zunächst die Injektivität von i , und wir dürfen A als Teilmenge von X auffassen. Dann ist auch $Zi = A \times I \cup X \times \{0\}$ eine Teilmenge von $X \times I$. Es sei $\bar{i}: Zi \rightarrow X \times I$ die Inklusionsabbildung. Die Abbildung $H: X \times I \rightarrow Zi$ erfüllt $H \circ \bar{i} = \text{id}_{Zi}$, ist also eine Retraktion. Wir schließen, dass $Zi \subset X \times I$ und $A \subset X$ jeweils die Unterraumtopologie tragen, siehe Übung 3.128.

Sei jetzt umgekehrt $i: A \rightarrow X$ eine Einbettung, und es existiere eine Retraktion $\bar{r}: X \times I \rightarrow Zi$. Dann ist i eine Kofaserung. Denn für beliebige Räume Y entspricht ein Paar von Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ und $h: A \times I \rightarrow Y$ wie in Definition 3.55 (1) nach der charakteristischen Eigenschaft 1.83 (2) der Quotiententopologie genau einer stetigen Abbildung $F: Zi \rightarrow Y$. Dann erfüllt $H = F \circ \bar{r}: X \times I \rightarrow Y$ gerade die Bedingungen in Definition 3.55 (2).

Da jede Kofaserung eine Einbettung ist, können wir uns also auf Paare (X, A) beschränken. In diesem Fall ist $Zi = X \times \{0\} \cup A \times I$ also ein Retrakt von $X \times I$. Wenn X ein Hausdorff-Raum ist, ist $A \subset X$ abgeschlossen (Übung 3.129).

3.59. PROPOSITION. *Es sind äquivalent:*

- (1) (X, A) ist ein Umgebungsdeformationsretrakt, das heißt, es gibt eine Abbildung $u: X \rightarrow I$ und eine Homotopie $h: X \times I \rightarrow X$, so dass

$$A \subset u^{-1}(0) , \tag{a}$$

$$h|_{X \times \{0\} \cup A \times I} = \pi_X|_{X \times \{0\} \cup A \times I} , \tag{b}$$

$$h(x, t) \in A \text{ für alle } x \in X \text{ mit } u(x) < t ; \tag{c}$$

- (2) $X \times \{0\} \cup A \times I$ ist starker Deformationsretrakt von $X \times I$;
- (3) $X \times \{0\} \cup A \times I$ ist Retrakt von $X \times I$;
- (4) (X, A) ist eine Kofaserung.

Der Begriff Umgebungsdeformationsretrakt bedeutet, dass sich eine Umgebung $U = u^{-1}([0, 1])$ von A in X (aber nicht notwendigerweise in U) auf A zusammenziehen lässt. Aus (c) schließen wir, dass $u^{-1}(0)$ gerade der Abschluss von A ist. Wenn A abgeschlossen ist, folgt also $A = u^{-1}(0)$.

BEWEIS. Nach Bemerkung 3.58 sind (3) und (4) äquivalent, und (3) folgt offensichtlich aus (2). Es gelte (1), dann folgt (2) mit der Deformationsretraktion $r: X \times I \times I \rightarrow X \times I$,

$$r(x, t, s) = \begin{cases} (h(x, st), (1-s)t) & \text{falls } t \leq u(x), \text{ und} \\ (h(x, st), t - su(x)) & \text{falls } t \geq u(x). \end{cases}$$

Es gelte jetzt (3), und $r: X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$ sei Retraktion. Es seien $\pi_X: X \times I \rightarrow X$ und $\pi_I: X \times I \rightarrow I$ die Projektionen. Dann definiere u und h durch

$$u(x) = \sup_{t \in I} (t - \pi_I r(x, t)) ,$$

$$h(x, t) = \pi_X r(x, t) .$$

Die Funktion u ist stetig, da I kompakt ist. Die Eigenschaften (a)–(c) sind leicht zu prüfen, also folgt (1). \square

3.60. BEMERKUNG. Mit diesem Ergebnis erhalten wir weitere Beispiele von Kofaserungen.

- (1) Nach Bemerkung 3.23 ist das Paar $(D^n, S^{n-1}) \cong (I^n, \partial I^n)$ eine Kofaserung für $n \geq 0$.
- (2) Allgemeiner sei M topologischer Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial M \neq \emptyset$, dann ist $(M, \partial M)$ eine Kofaserung. Hierzu ist allerdings noch zu zeigen, dass ∂M in M eine Umgebung der Gestalt $\partial M \times [0, 1)$ besitzt.

3.61. FOLGERUNG (aus Proposition 3.59). *Es seien (X, A) und (Y, B) Kofaserungen mit $A \subset X$ und $B \subset Y$ abgeschlossen. Dann ist auch $(X \times Y, A \times Y \cup X \times B)$ Kofaserung.*

BEWEIS. Wir nehmen an, dass (X, A) mit $u: X \rightarrow I$ und $h: X \times I \rightarrow X$ sowie (Y, B) mit $v: Y \rightarrow I$ und $k: Y \times I \rightarrow Y$ zu Umgebungsdeformationsretrakten wie in Proposition 3.59 (1) werden. Dann ist auch $(X \times Y, A \times Y \cup X \times B)$ ein Umgebungsdeformationsretrakt mit $w: X \times Y \rightarrow I$ und $\ell: X \times Y \times I \rightarrow X \times Y$, wobei

$$w(x, y) = \min(u(x), v(y)) ,$$

$$\ell(x, y, t) = \left(h(x, \min(t, v(y))), k(y, \min(t, u(x))) \right) .$$

Wir benötigen A und B abgeschlossen, um $\ell(x, y, t) \in A \times Y \cup X \times B$ aus $t > w(t)$ zu folgern. \square

Wir benutzen als nächstes die Homotopieausdehnungseigenschaft, um interessante Aussagen über Kofaserungen zu beweisen.

3.62. PROPOSITION. *Es sei (X, A) eine Kofaserung. Falls A zusammenziehbar ist, ist die Quotientenabbildung $X \rightarrow X/A$ eine Homotopieäquivalenz.*

BEWEIS. Es bezeichne $F: X \rightarrow X/A$ die Quotientenabbildung. Es sei $h: A \times I \rightarrow A$ eine Homotopie zwischen id_A und der konstanten Abbildung auf den Punkt $a_0 \in A \subset X$. Mit der Homotopieausdehnungseigenschaft für $\iota \circ h$ erhalten wir eine Homotopie $H: X \times I \rightarrow X$ mit $H|_{A \times I} = h$ und $H(\cdot, 0) = \text{id}_X$. Da $H(a, 1) = a_0$ für alle $a \in A$, induziert $H(\cdot, 1)$ eine Abbildung $G: X/A \rightarrow X$. Da $G(F(x)) = H(x, 1)$ für alle $x \in X$, ist H eine Homotopie zwischen id_X und $G \circ F$.

Da $H(a, t) = h(a, t) \in A$ für alle $a \in A$, induziert H eine Abbildung $\bar{H}: (X/A) \times I \rightarrow X/A$, und es gilt $\bar{H}(\cdot, 1) = F \circ G$. Also ist \bar{H} eine Homotopie zwischen $\text{id}_{X/A}$ und $F \circ G$. \square

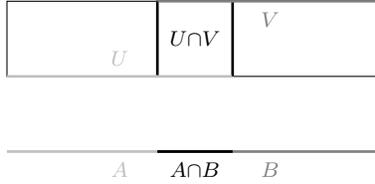


ABBILDUNG 3.7. Der Raum $Y = U \cup V$

In Folgerung 1.86 haben wir Pushouts kennengelernt. Wenn $A \subset X$ Teilmenge und $f: A \rightarrow B$ stetig ist, schreiben wir hier $X \cup_f B$ statt $B \cup_f X$. Dieser Begriff ist übrigens dual zum Faserprodukt oder Pullback aus Übung 3.114. Ein Spezialfall des Pullbacks ist die Faser, das duale Diagramm liefert die Kofaser einer Kofaserung $A \rightarrow X$, nämlich den Quotienten X/A .

3.63. BEISPIEL. Es sei $A \subset X$ Teilmenge und $f: A \rightarrow \text{pt}$ die konstante Abbildung, dann ist $X \cup_f \text{pt}$ homöomorph zum Quotienten X/A .

Das nächste Resultat ist eine wichtige Übung, siehe 3.130.

3.64. PROPOSITION. *Es sei (X, A) eine abgeschlossene Kofaserung und $f: A \rightarrow B$ stetig. Dann ist auch $(X \cup_f B, B)$ eine abgeschlossene Kofaserung.* \square

Weitere Aussagen über Kofaserungen folgen in den nächsten Abschnitten. Anstelle beliebiger Paare betrachtet man in der Homotopietheorie besonders gern Kofaserungen. Daher wollen wir ein wichtiges Resultat auf eine Kofaserungs-Situation übertragen.

3.65. FOLGERUNG (Ausschneidungssatz für Kofaserungen). *Es seien $A, B \subset X$ abgeschlossen mit $A \cup B = X$, $A \cap B \neq \emptyset$, so dass $(A, A \cap B)$ eine p -zusammenhängende und $(B, A \cap B)$ eine q -zusammenhängende Kofaserung ist, mit $p, q \geq 0$. Dann ist (X, B) ebenfalls eine Kofaserung, und $i: (A, A \cap B) \rightarrow (X, B)$ ist eine $(p + q)$ -zusammenhängende Abbildung von Paaren.*

BEWEIS. Indem wir X als Pushout von A längs der Inklusion $A \cap B \rightarrow B$ auffassen, sehen wir mit Proposition 3.64, dass (X, B) eine Kofaserung ist.

Wir betrachten die Teilmenge

$$Y = (A \times \{0\}) \cup ((A \cap B) \times I) \cup (B \times \{1\}) \subset X \times I,$$

siehe Abbildung 3.7. Nach Proposition 3.59 (2) existieren Homotopien $H: A \times I^2 \rightarrow A \times I$ zwischen $\text{id}_{A \times I}$ und einer Retraktion auf $A \times \{0\} \cup (A \cap B) \times I$, und $K: B \times I^2 \rightarrow B \times I$ zwischen $\text{id}_{B \times I}$ und einer Retraktion auf $B \times \{1\} \cup (A \cap B) \times I$. Da $(A \cap B) \times I$ abgeschlossen ist, dürfen wir H und K verkleben und sehen, dass Y Deformationsretrakt von $X \times I$ ist. Insbesondere induziert die Projektion $X \times I \rightarrow X$ eine Homotopieäquivalenz $Y \rightarrow X$.

Wir zerlegen jetzt Y in offene Teilmengen $U = Y \cap (X \times [0, 1))$ und $V = Y \cap (X \times (0, 1])$. Dann induziert die obige Projektion Homotopieäquivalenzen $U \rightarrow A$, $V \rightarrow B$ und $U \cap V \rightarrow A \cap B$. Jetzt folgt die Aussage aus dem Ausschneidungssatz 3.38. \square

3.g. Konstruktionen mit gut punktierten Räumen

Wir wollen den Ausschneidungssatz benutzen, um Aussagen über Quotienten von Paaren topologischer Räume zu machen. Dazu führen wir zuerst das Koprodukt und ein neues "Produkt" punktierter topologischer Räume ein.

3.66. DEFINITION. Das *Bouquet* oder *Wedge-Produkt* einer Familie $(X_i, x_i)_{i \in I}$ punktierter topologischer Räume ist der punktierte Raum

$$\bigvee_{i \in I} (X_i, x_i) = \prod_{i \in I} X_i / \{x_i \mid i \in I\}$$

mit der Quotiententopologie. Sei $\iota_i: (X_i, x_i) \rightarrow (\bigvee_{i \in I} (X_i, x_i), x_0)$ die natürliche Inklusion.

3.67. BEMERKUNG. Beim Wedge-Produkt identifizieren wir also in der disjunkten Vereinigung alle Basispunkte. Analog zur disjunkten Vereinigung in der Kategorie \mathcal{Top} erfüllt das Wedge-Produkt die universelle Eigenschaft eines Koproduktes in der Kategorie \mathcal{Top}_+ . Das ergibt sich aus der Konstruktion und den Sätzen 1.78 (3) und 1.83 (2). Wenn alle X_i gut punktiert sind, dann ist auch ihre Bouquet gut punktiert; das zeigt am besten mit dem Diagramm am Anfang von Abschnitt 3.f.

Das kartesische Produkt punktierter Räume erfüllt die universelle Eigenschaft des Produkts in \mathcal{Top}_+ , siehe Übung 3.105. Insbesondere gibt es eine natürliche Abbildung

$$\iota: \bigvee_{i \in I} (X_i, x_i) \longrightarrow \prod_{i \in I} (X_i, x_i),$$

so dass

$$\pi_i \circ \iota \circ \iota_j = \begin{cases} \text{id}_{X_i} & \text{für } i = j, \text{ und} \\ c_{x_i} & \text{für } i \neq j, \end{cases}$$

dabei bezeichne c_{x_i} die konstante Abbildung auf den Basispunkt $x_i \in X_i$. Im Folgenden identifizieren wir $\bigvee_{i \in I} (X_i, x_i)$ vermöge ι mit einer Teilmenge von $\prod_{i \in I} (X_i, x_i)$.

3.68. DEFINITION. Das *reduzierte* oder *Smash-Produkt* einer Familie $(X_i, x_i)_{i \in I}$ punktierter topologischer Räume ist der Quotient punktierter Räume

$$\bigwedge_{i \in I} (X_i, x_i) = \prod_{i \in I} (X_i, x_i) / \bigvee_{i \in I} (X_i, x_i).$$

Seien $(X, A), (Y, B)$ punktierte Paare, dann setzen wir

$$(X, A) \wedge (Y, B) = (X \wedge Y, A \wedge Y \cup X \wedge B).$$

Seien $f: X_1 \rightarrow X_2, g: Y_1 \rightarrow Y_2$ punktierte Abbildungen von Räumen oder Paaren, dann definieren wir ihr reduziertes Produkt als

$$f \wedge g: X_1 \wedge Y_1 \rightarrow X_2 \wedge Y_2 \quad \text{mit} \quad (f \wedge g)(x \wedge y) = f(x) \wedge g(y).$$

Wir können das reduzierte Produkt auch von beliebig vielen Paaren oder Abbildungen bilden. Da wir aber meistens nur endliche reduzierte Produkte benötigen, lassen wir es bei der obigen Definition. Später werden wir die Basispunkte des Öfteren nicht mitschreiben.

3.69. BEISPIEL. Es folgen einige wichtige elementare Beispiele.

- (1) Es gilt $S^k \wedge S^\ell \cong S^{k+\ell}$. Formal sieht man das am einfachsten mit Hilfe der Homöomorphismen

$$S^k \wedge S^\ell \cong (I^k / \partial I^k) \wedge (I^\ell / \partial I^\ell) \cong I^{k+\ell} / (\partial I^k \times I^\ell \cup I^k \times \partial I^\ell) = I^{k+\ell} / \partial I^{k+\ell} \cong S^{k+\ell}.$$

- (2) Es gilt $S^k \wedge (D^\ell, S^{\ell-1}) \cong (D^{k+\ell}, S^{k+\ell-1})$. Hierzu ersetzen wir S^k durch das Paar $(S^k, *)$ und betrachten

$$\begin{aligned} (S^k, *) \wedge (D^\ell, S^{\ell-1}) &\cong (I^k / \partial I^k, \partial I^k / \partial I^k) \wedge (I^\ell / \partial I^\ell, \partial I^\ell / \partial I^\ell) \\ &\cong (I^{k+\ell} / \underbrace{(\partial I^k \times I^\ell \cup I^k \times \partial I^\ell)}_{=\partial I^{k+\ell}}, \underbrace{(\partial I^k \times I^\ell \cup I^k \times \partial I^\ell)}_{\partial I^{k+\ell}} / \partial I^{k+\ell}) \cong (D^{k+\ell}, S^{k+\ell-1}). \end{aligned}$$

3.70. BEMERKUNG. Das reduzierte Produkt besitzt folgende elementare Eigenschaften.

- (1) Das reduzierte Produkt ist ein Funktor $\wedge: \mathcal{Top}_+ \times \mathcal{Top}_+ \rightarrow \mathcal{Top}_+$. Insbesondere ist es mit der Verkettung von Abbildungen verträglich.
- (2) Es seien X, Y, Z punktierte Räume. Dann gibt es natürliche Homöomorphismen

$$\begin{aligned} (X \vee Y) \vee Z &\cong X \vee (Y \vee Z), & (X \wedge Y) \wedge Z &\cong X \wedge (Y \wedge Z), \\ X \vee \text{pt} &\cong X, & X \wedge S^0 &\cong X, \\ X \vee Y &\cong Y \vee X, & X \wedge Y &\cong Y \wedge X \end{aligned}$$

und $X \wedge (Y \vee Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$.

Diese Homöomorphismen sind miteinander verträglich. Mithin verhält sich $(\mathcal{Top}_+, \vee, \wedge)$ (bis auf natürliche Homöomorphismen) wie ein kommutativer Halbring mit Null und Eins.

- (3) Ein reduziertes Produkt gut punktierter Räume ist wieder gut punktiert. Dazu benutzen wir Folgerung 3.61 und Proposition 3.64, und stellen $X \wedge Y$ als Pushout der Kofaserung $(X \times Y, X \vee Y)$ längs der konstanten Abbildung $X \vee Y \rightarrow \text{pt}$ dar.

Genauso ist ein reduziertes Produkt gut punktierter, abgeschlossener Kofaserungen wieder eine gut punktierte, abgeschlossene Kofaserung (Übung 3.136).

- (4) Seien (X, A) und (Y, B) gut punktierte, abgeschlossene Kofaserungen, und sei $(Z, C) = (X, A) \wedge (Y, B)$, dann gilt $Z/C \cong (X/A) \wedge (Y/B)$. Eine analoge Eigenschaft haben wir in Beispiel 3.69 (1) bereits benutzt.

Man beachte, dass das reduzierte Produkt nicht die universelle Eigenschaft eines Produktes aus Satz 1.53 auf \mathcal{Top}_+ erfüllt — diese Rolle übernimmt das punktierte kartesische Produkt, wie wir bereits aus Übung 3.105 wissen. Stattdessen legen die obigen Eigenschaften nahe, es als eine Art Tensorprodukt zu betrachten. Diesen Standpunkt werden wir später noch näher beleuchten.

3.71. DEFINITION. Es sei (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum, und 0 der Basispunkt des Einheitsintervalles I . Dann definieren wir den (*reduzierten*) *Kegel* und den reduzierten Zylinder ZX über X als

$$CX = X \wedge I.$$

Wir identifizieren X mit der Teilmenge $X \times \{1\} \subset CX$. Analog definieren wir den (*reduzierten*) *Zylinder* $ZX = X \wedge I_+$.

Es sei $f: X \rightarrow Y$ stetig, dann definieren wir den (*reduzierten*) *Abbildungszylinder* Zf und den (*reduzierten*) *Abbildungskegel* Cf als Pushouts

$$Zf = ZX \cup_f Y \quad \text{und} \quad Cf = CX \cup_f Y,$$

wobei wir hier X mit dem Bild von $X \times \{1\}$ in ZX beziehungsweise CX identifizieren. Es sei (X, A) ein punktiertes Paar mit Inklusionsabbildung $i: A \rightarrow X$, dann definieren wir den *Homotopiequotienten* (auch die *Homotopiekofaser*) $X//A$ als

$$X//A = Ci = X \cup_A CA$$

Die (*reduzierte*) *Einhängung* oder (*reduzierte*) *Suspension* von X oder (X, A) ist definiert als

$$SX = X \wedge S^1 \quad \text{beziehungsweise} \quad (SX, SA).$$

Die Einhängung einer punktierten Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist definiert als

$$Sf = f \wedge \text{id}_{S^1}: SX \rightarrow SY.$$

Wir können auch die unreduzierten Varianten $X \times I$, $CX_+ = X_+ \wedge I$, $(X \times I) \cup_f Y$, $CX_+ \cup_f Y$, $X_+//A_+$ und $\Sigma X = CX_+ \cup_X CX_+$ betrachten. Wenn X und gegebenenfalls A gut punktiert sind, sind sie nach Proposition 3.62 zu den entsprechenden reduzierten Varianten homotopieäquivalent. Tatsächlich ist Zi in Bemerkung 3.58 der Abbildungszylinder in \mathcal{Top} , das heißt, er ist unreduziert.

3.72. BEMERKUNG. In den obigen Konstruktionen tauchen einige Kofaserungen auf. Wir schreiben sie in Diagrammen als gefiederte Pfeile \twoheadrightarrow . Wir nehmen an, dass X und Y gut punktiert sind.

- (1) Wenn wir mit der Kofaserung $(I, \partial I) = (D^1, S^0)$ aus Bemerkung 3.60 (1) starten, erhalten wir mit Folgerung 3.61 und Proposition 3.64 ein Diagramm aus Pushouts der Form

$$\begin{array}{ccccc} X & \twoheadrightarrow & X & \xrightarrow{c\vee\text{id}} & X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ ZX & \longrightarrow & CX & \longrightarrow & Cf & & \end{array}$$

dabei sei c die konstante Abbildung auf den Basispunkt. Insbesondere sind (CX, X) und (Cf, Y) abgeschlossene Kofaserungen. Wenn wir nicht reduzieren, erhalten wir analog Kofaserungen (CX_+, X) und $(CX_+ \cup_f Y, Y)$.

- (2) Wir können die Pushouts auch in einer anderen Reihenfolge bilden und erhalten dann

$$\begin{array}{ccccc} X & \twoheadrightarrow & X & \xrightarrow{\text{id}\vee f} & X & \twoheadrightarrow & Y & \xrightarrow{c\vee\text{id}} & Y \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ ZX & \longrightarrow & Zf & \longrightarrow & Cf & & \end{array}$$

Insbesondere ist auch $X \twoheadrightarrow X \vee Y \twoheadrightarrow Zf$ eine Kofaserung. Man sieht leicht, dass $Y \subset Zf$ ein Deformationsretrakt ist, das heißt, wir können f in eine Kofaserung und eine Homotopieäquivalenz zerlegen:

$$X \twoheadrightarrow Zf \xrightarrow{\cong} Y.$$

- (3) Sei jetzt (X, A) ebenfalls eine abgeschlossene Kofaserung. Dann dürfen wir den Pushout „umdrehen“ und erhalten eine Kofaserung $(X//A, CA)$. Da CA_+ zusammenziehbar ist, ist CA nach Proposition 3.62 zusammenziehbar, und $X//A$ ist homotopieäquivalent zum Quotienten $(X//A)/CA \cong X/A$. Wir betrachten $X//A$ als Ersatz für den Quotienten bis auf Homotopie, selbst wenn (X, A) keine abgeschlossene Kofaserung ist. Daher der Name „Homotopiequotient“.

3.73. PROPOSITION. *Es sei (X, A) eine p -zusammenhängende abgeschlossene Kofaserung und A sei q -zusammenhängend mit $p \geq 0$, $q \geq -1$. Dann ist die Quotientenabbildung $(X, A) \rightarrow (X/A, *)$ eine $p + q + 1$ -zusammenhängende Abbildung.*

Wenn A nicht zusammenhängend ist, sei $q = -1$.

BEWEIS. Anstelle von X/A betrachten wir den Raum $X//A = X \cup_A CA$. Da CA zusammenziehbar und A ein q -zusammenhängender Raum ist, ist (CA, A) ein $(q + 1)$ -zusammenhängendes Paar nach Definition 3.35. Nach dem Ausschneidungssatz 3.65 ist die Inklusion $(X, A) \rightarrow (X \cup_A CA, CA)$ eine $(p + q + 1)$ -zusammenhängende Abbildung. Da CA zusammenziehbar und die Quotientenabbildung $X \cup_A CA \rightarrow X/A$ eine Homotopieäquivalenz ist, gilt $\pi_k(X \cup_A CA, CA) \cong \pi_k(X \cup_A CA) \cong \pi_k(X/A)$ für alle k . \square

3.74. BEISPIEL. Wir betrachten das 1-zusammenhängende Paar (D^2, S^1) . Da S^1 zusammenhängend ist, erhalten wir eine 2-zusammenhängende Quotientenabbildung $(D^2, S^1) \rightarrow (S^2, *)$. Tatsächlich gilt $\pi_2(D^2, S^1) \cong \mathbb{Z} \cong \pi_2(S^2)$, aber $0 \cong \pi_3(D^2, S^1) \rightarrow \pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ ist nicht mehr surjektiv.

3.75. FOLGERUNG (aus der langen exakten Sequenz 3.19 des Paares (X, A)). *Es sei (X, A) eine p -zusammenhängende Kofaserung mit $p \geq 0$, und A sei q -zusammenhängend. Dann erhalten wir*

eine natürliche exakte Sequenz

$$0 \longleftarrow \pi_0(X) \longleftarrow \pi_0(A) \xleftarrow{\partial} \pi_1(X/A) \longleftarrow \cdots \longleftarrow \pi_{p+q}(X) \longleftarrow \pi_{p+q}(A).$$

BEWEIS. Wir betrachten die lange exakte Sequenz für Paare und erhalten

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_{p+q}(X, A) & \longleftarrow & \pi_{p+q}(X) & \longleftarrow & \pi_{p+q}(A) & \xleftarrow{\partial} & \pi_{p+q+1}(X, A) \longleftarrow \cdots \\ \cong \downarrow & & \parallel & & \parallel & & \downarrow \\ \pi_{p+q}(X/A) & \longleftarrow & \pi_{p+q}(X) & \longleftarrow & \pi_{p+q}(A) & & \pi_{p+q+1}(X/A). \end{array} \quad \square$$

Im Allgemeinen gibt es keine passende Abbildung $\partial: \pi_{p+q+1}(X/A) \rightarrow \pi_{p+q}(A)$, die die Sequenz verlängert oder das Diagramm vervollständigt. Für $(X, A) = (D^3, S^2)$ mit $p = 2$ und $q = 1$ erhalten wir beispielsweise

$$\begin{array}{ccccc} \pi_3(D^3) & \longleftarrow & \pi_3(S^2) & \xleftarrow{\cong} & \pi_4(D^3, S^2) \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow \\ \pi_3(S^3) & \longleftarrow & \pi_3(S^2) & & \pi_4(S^3) \\ =0 & & \cong \mathbb{Z} & & \cong \mathbb{Z}/2 \end{array} .$$

3.h. Stabile Homotopiegruppen

Wir beweisen den Freudenthalschen Einhängungssatz und zeigen, dass Homotopiegruppen unter iterierter Einhängung „stabil“ werden. Diese stabile Homotopiegruppen haben einige angenehme Eigenschaften. Unter anderem können wir abgeschlossene Kofaserungen durch ihre Quotienten ersetzen, ohne höheren Zusammenhang vorauszusetzen. Tatsächlich liefert stabile Homotopietheorie den Prototyp für eine Homologietheorie. Allerdings bezahlen wir auch einen Preis: die einfachen Formeln für Produkte und die lange exakte Sequenz für Faserbündel gehen verloren.

3.76. SATZ (Freudenthalscher Einhängungssatz). *Es sei X ein n -zusammenhängender, gut punktierter Raum, dann ist der Einhängungshomomorphismus*

$$S: \pi_k(X) \rightarrow \pi_{k+1}(SX)$$

ein Isomorphismus für $k \leq 2n$ und surjektiv für $k = 2n + 1$. Insbesondere ist SX ein $(n + 1)$ -zusammenhängender Raum.

Wir haben genau dieses Verhalten für $X = S^n$ bereits in Satz 3.42 (4) beobachtet.

BEWEIS. Wir erinnern uns an den reduzierten Kegel CX aus Definition 3.71. Wir hatten in Bemerkung 3.72 (1) die Basis des Kegels CX mit X identifiziert und gezeigt, dass (CX, X) eine Kofaserung ist. Für den Quotienten erhalten wir

$$CX/X \cong (X \times I)/(X \times \partial I \cup \{x_0\} \times I) \cong (X \times S^1)/(X \vee S^1) \cong SX .$$

Wir fahren ähnlich fort wie im Beweis des Satzes 3.42 von Brouwer und Hopf. Da CX zusammenziehbar ist, erhalten wir in der langen exakten Homotopiesequenz 3.19 des Paares (CX, X) einen Isomorphismus $\partial: \pi_{k+1}(CX, X) \xrightarrow{\cong} \pi_k(X)$. Die Umkehrabbildung wird induziert von $f \mapsto f \wedge \text{id}_{(I,1)}$. Wir schalten die Quotientenabbildung $q: CX \rightarrow SX$ nach und erhalten die gesuchte Abbildung

$$S: \pi_k(X) \xrightarrow{\partial^{-1}} \pi_{k+1}(CX, X) \xrightarrow{q_*} \pi_{k+1}(SX) .$$

Da X ein n -zusammenhängender Raum und CX zusammenziehbar ist, ist (CX, X) ein $(n+1)$ -zusammenhängendes Paar. Unsere Behauptung folgt also aus Proposition 3.73 über die Quotientenabbildung q . \square

3.77. BEMERKUNG. Wir betrachten Abbildungen zwischen Einhängungen.

- (1) Es seien X, Y punktierte Räume. Auf der Menge $[SX, Y]$ der punktierten Homotopieklassen von Abbildungen $SX \rightarrow Y$ können wir wie in den Definitionen 2.12 und 3.1 eine Gruppenstruktur definieren durch

$$(f + g)(x \wedge t) = \begin{cases} f(x \wedge (2t)) & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \text{ und} \\ g(x \wedge (2t - 1)) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Die Abbildung ist wohldefiniert, denn für $t \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ bildet sie auf den Basispunkt y_0 ab, ebenso wie im Falle, dass $x = x_0$.

- (2) Indem wir diese Konstruktion iterieren, erhalten wir Gruppenstrukturen auch auf $[S^k X, Y]$ für alle $k \geq 1$. Im Falle $k \geq 2$ ist $[S^k X, Y]$ abelsch wie in Satz 3.5 (3).
(3) Als Spezialfall der obigen Konstruktion betrachten wir $[S^k X, S^k Y]$. Da Einhängung ein Funktor ist, erhalten wir eine Abbildung

$$S: [S^k X, S^k Y] \rightarrow [S^{k+1} X, S^{k+1} Y] \quad \text{mit} \quad f \mapsto Sf.$$

Nach Bemerkung 3.70 (2) ist das reduzierte Produkt assoziativ und kommutativ. Wir können also dafür sorgen, dass die „neue“ Kopie von S^1 in $S^{k+1} X = S(S^k X)$ nicht diejenige ist, mit der wir oben die Gruppenstruktur definiert haben. Daher ist $S: [S^k X, S^k Y] \rightarrow [S^{k+1} X, S^{k+1} Y]$ ein Gruppenhomomorphismus.

- (4) Wir wissen aus Übung 3.120, dass $[S^n, S^n]$ mit der Hintereinanderschaltung zu einem Ring wird. Analog sehen wir, dass Hintereinanderausführung eine bilineare Abbildung

$$[S^n Y, S^n Z] \times [S^n X, S^n Y] \xrightarrow{\circ} [S^n X, S^n Z]$$

liefert.

In Folgerung 1.87 haben wir die universelle Eigenschaft des Kolimes kennengelernt und Kolimiten für Familien topologischer Räume definiert. Auch in der Kategorie der abelschen Gruppen gibt es Kolimiten. Sei dazu $(G_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Familie abelscher Gruppen mit Homomorphismen $f_{k\ell}: G_k \rightarrow G_\ell$, so dass $f_{k\ell} \circ f_{jk} = f_{j\ell}$ für alle $j \leq k \leq \ell$. Dann definieren wir in Analogie zu (1.4) den Kolimes

$$G = \varinjlim G_k = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} G_k / \sim,$$

wobei $G_j \ni g_j \sim g_k \in G_k$ genau dann gelte, wenn es ein $\ell \geq k, j$ gibt, so dass $f_{j\ell}(g_j) = f_{k\ell}(g_k) \in G_\ell$. Für jedes k erhalten wir eine natürliche Abbildung $f_k: G_k \rightarrow G$ mit $g_k \mapsto [g_k] \in G$, so dass $f_k = f_\ell \circ f_{k\ell}$ für alle $k \leq \ell$. Man kann sich davon überzeugen, dass G eine Gruppe ist, dass alle f_k Gruppenhomomorphismen sind, und dass $(G, (f_k)_k)$ die universelle Eigenschaft eines Kolimes aus Folgerung 1.87 erfüllt. Beispiele gibt es in Übung 3.138.

Hier haben wir zunächst Abbildungen $S: [S^k X, S^k Y] \rightarrow [S^{k+1} X, S^{k+1} Y]$. Hintereinanderschalten von $(\ell - k)$ dieser Abbildungen liefert $f_{k\ell}: [S^k X, S^k Y] \rightarrow [S^\ell X, S^\ell Y]$. Bei einem Kolimes kommt es nie auf die ersten Glieder in der Folge an. Daher stört es im Folgenden nicht, dass im Allgemeinen $[X, Y]$ keine Gruppe und $[SX, SY]$ nicht abelsch ist. Wir dürfen am Anfang der Folge sogar negative Indizes zulassen.

Sei $f: X \rightarrow Y$ stetig, dann erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_k(X) & \xrightarrow{S} & \pi_{k+1}(SX) & \xrightarrow{S} & \pi_{k+2}(S^2X) & \longrightarrow & \dots \\ \pi_k f \downarrow & & \pi_{k+1} S f \downarrow & & \pi_{k+1} S^2 f \downarrow & & \\ \pi_k(Y) & \xrightarrow{S} & \pi_{k+1}(SY) & \xrightarrow{S} & \pi_{k+2}(S^2Y) & \longrightarrow & \dots \end{array},$$

denn für $u: S^k \rightarrow X$ gilt nach Bemerkung 3.70 (1), dass

$$(\pi_{k+1} S f)(S[u]) = [(f \wedge \text{id}_{S^1}) \circ (u \wedge \text{id}_{S^1})] = [(f \circ u) \wedge \text{id}_{S^1}] = S((\pi_k f)[u]). \quad (3.7)$$

Die obere Reihe des Diagramms „konvergiert“ gegen den Kolimes der $\pi_{k+n}(S^n X)$ für $n \rightarrow \infty$, die untere gegen den Kolimes der $\pi_{k+n}(S^n Y)$, und die Abbildungen $\pi_{k+n} S^n f$ induzieren eine Abbildung zwischen diesen Kolimiten.

3.78. DEFINITION. Es seien X, Y punktierte Räume, dann definieren wir

$$[X, Y]^s = \varinjlim [S^n X, S^n Y] \in \mathcal{A}b.$$

Insbesondere definieren wir für alle $k \in \mathbb{Z}$ die k -te stabile Homotopiegruppe von X als

$$\pi_k^s(X) = [S^k, X]^s = \varinjlim \pi_{k+n}(S^n X) \in \mathcal{A}b.$$

Für Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ definieren wir

$$\pi_k^s f = \varinjlim \pi_{k+n} S^n f: \pi_k^s(X) \rightarrow \pi_k^s(Y).$$

Wir könnten jetzt eine „naive“ stabile Homotopiekategorie mit den gleichen Objekten wie in \mathcal{Top}_+ und \mathcal{HTop}_+ definieren, und als Morphismenmengen die Gruppen $[X, Y]^s$ einsetzen. Diese Kategorie ist aber für Anwendungen nicht „stabil genug“: zum einen enthält sie zu wenig Objekte, so dass man später zu sogenannten „Spektren“ übergeht. Zum anderen enthält sie zu wenig Morphismen, so dass man stattdessen Folgen solcher Abbildungen f_k zwischen Teilmengen der k -ten Räume der Spektren betrachtet, dass jeder „Teil“ des k -ten Raumes für irgendein $\ell \geq k$ im Definitionsbereich von f_ℓ liegt. Im Falle der stabilen Homotopiegruppen sind diese Überlegungen allerdings nicht notwendig, so dass wir hier bereits das Wort „stabil“ benutzen dürfen.

3.79. PROPOSITION. Für alle $k \in \mathbb{Z}$ sind die stabilen Homotopiegruppen Funktoren

$$\pi_k^s: \mathcal{HTop}_+ \rightarrow \mathcal{A}b. \quad \square$$

Ein Kolimes ist besonders leicht dann zu berechnen, wenn die Folge der betrachteten Objekte irgendwann stationär wird, das heißt, wenn die Abbildungen $f_{k\ell}: G_k \rightarrow G_\ell$ für alle $k, \ell \geq n_0$ Isomorphismen sind. In diesem Fall ist der Kolimes G natürlich isomorph zu allen Gruppen G_k mit $k \geq n_0$. Genau dieses Phänomen beobachten wir im Fall der stabilen Homotopiegruppen.

3.80. FOLGERUNG (aus dem Freudenthalschen Einhängungssatz 3.76). Für jeden gut punktierten topologischen Raum X gilt

$$\pi_k^s(X) \cong \begin{cases} 0 & \text{falls } k < 0, \text{ und} \\ \pi_{k+\ell}(S^\ell X) & \text{falls } k \geq 0 \text{ und } \ell \geq k + 2. \end{cases}$$

Wenn X ein n -zusammenhängender Raum ist, gilt sogar

$$\pi_k^s(X) \cong \pi_{k+\ell}(S^\ell X) \quad \text{falls } \ell \geq \max(k - 2n, 0). \quad \square$$

3.81. DEFINITION. Ein gutes Paar (X, A, x_0) ist eine abgeschlossene Kofaserung, bei der (A, x_0) gut punktiert ist.

Zu jedem guten Paar betrachten wir die Inklusionsabbildung $i: A \rightarrow X$ und die Quotientenabbildung $q: X \rightarrow X/A$. Für Abbildungen f schreiben wir wieder kurz $f_* = \pi_k^s f$, wenn keine Missverständnisse zu erwarten sind.

3.82. SATZ (stabile Homotopiesequenz). *Für gute Paare (X, A) erhalten wir eine natürliche lange exakte Sequenz abelscher Gruppen*

$$\cdots \longleftarrow \pi_{k-1}^s(A) \xleftarrow{\partial} \pi_k^s(X/A) \xleftarrow{q_*} \pi_k^s(X) \xleftarrow{i_*} \pi_k^s(A) \longleftarrow \cdots$$

Diese Sequenz haben wir in Folgerung 3.75 bereits für die „unstabilen“ Homotopiegruppen gesehen, allerdings hat sie dort auf beiden Seiten nach endlich vielen Schritten aufgehört.

BEWEIS. Wir starten wieder mit den langen exakten Sequenzen der Paare $(S^n X, S^n A)$ aus Satz 3.19. Sie sind mit Einhängung verträglich, das heißt, das Diagramm

$$\begin{array}{cccccccc} \cdots & \longleftarrow & \pi_{k-1}(X) & \xleftarrow{\pi_{k-1}^i} & \pi_{k-1}(A) & \xleftarrow{\partial} & \pi_k(X, A) & \xleftarrow{\pi_k q} & \pi_k(X) & \longleftarrow & \cdots \\ & & S \downarrow & & S \downarrow & & S \downarrow & & S \downarrow & & \\ \cdots & \longleftarrow & \pi_k(SX) & \xleftarrow{\pi_k S i} & \pi_{k-1}(SA) & \xleftarrow{\partial} & \pi_{k+1}(SX, SA) & \xleftarrow{\pi_{k+1} S q_*} & \pi_{k+1}(SX) & \longleftarrow & \cdots \end{array}$$

kommutiert. Dadurch erhalten wir die gesuchte Sequenz als Kolimes der obigen Sequenzen unter iterierter Einhängung. Jedes endliche Stück der obigen Sequenz wird durch ausreichend häufiges Einhängen stationär. Für die Terme $\pi_{k+\ell}(S^\ell A)$ und $\pi_{k+\ell}(S^\ell X)$ erhalten wir das mit Folgerung 3.80, und für die Terme $\pi_{k+\ell}(S^\ell X, S^\ell A)$ ergibt es sich aus dem Fünferlemma 3.20. Schließlich dürfen wir $\pi_{k+\ell}(S^\ell X, S^\ell A)$ für hinreichend hohe ℓ nach Proposition 3.73 und Bemerkung 3.70 (3) und (4) durch $\pi_{k+\ell}(S^\ell(X/A))$ ersetzen.

Die äußeren Quadrate der obigen Sequenz kommutieren wegen der Funktorialität der Einhängung, siehe (3.7). Für das mittlere Quadrat betrachten wir die Konstruktion von ∂ in Satz 3.19. Es sei $[u] \in \pi_k(X, A)$ repräsentiert durch

$$u: (I^k / \partial' I^k, \partial I^k / \partial' I^k) \rightarrow (X, A).$$

Mit Beispiel 3.69 (2) sehen wir schließlich, dass

$$\begin{aligned} \partial S u &= \partial(u \wedge \text{id}_{S^1}) = (u \wedge \text{id}_{S^1})|_{(I^k \times \{0\}) / (\partial I^k \times \{0\})} \\ &= (u|_{(I^{k-1} \times \{0\}) / (\partial I^{k-1} \times \{0\})}) \wedge \text{id}_{S^1} = \partial u \wedge \text{id}_{S^1} = S \partial u. \end{aligned}$$

Also kommutieren S und ∂ , und wir erhalten den Verbindungshomorphismus auch im Kolimes.

Die stabile lange exakte Sequenz im Satz ist natürlich, da die einzelnen Sequenzen natürlich sind. \square

3.83. BEMERKUNG. Motiviert durch den obigen Beweis können wir $\pi_k^s(X, A) = \pi_k^s(X/A)$ definieren. Dann gilt eine lange exakte Sequenz für Paare wie in Satz 3.19. Den Ausschneidungssatz für stabile Homotopiegruppen bekommen wir geschenkt, denn wenn $(A, A \cap B)$ und $(B, A \cap B)$ gute Paare sind, gilt $A/(A \cap B) \cong X/B$, also erst recht $\pi_k^s(A, A \cap B) \cong \pi_k^s(X, B)$. Wir dürfen dabei aber nicht vergessen, dass sowohl Proposition 3.73 über Quotienten als auch der Freudenthalsche Einhängungssatz 3.76 wesentlich auf dem Ausschneidungssatz beruhen.

Es sei $(X_j)_{j \in J}$ eine Familie gut punktierter Räume, und $\iota_j: X_j \rightarrow X = \bigvee_{j \in J} X_j$ seien die Strukturabbildungen. Nach Bemerkung 3.70 (2) gilt

$$S^\ell X = \bigvee_{j \in J} S^\ell X_j$$

mit Strukturabbildungen $S^\ell \iota_j: S^\ell X_j \rightarrow S^\ell X$. Dann erhalten wir Abbildungen $\iota_{j*}: \pi_k^s(X_j) \rightarrow \pi_k^s(X)$ für alle $j \in J$. Aufgrund der universellen Eigenschaft 1.79 des Koproduktes $\bigoplus_{j \in J} \pi_k^s(X_j)$ induzieren diese Abbildungen eine eindeutige Abbildung

$$\bigoplus_{j \in J} \iota_{j*}: \bigoplus_{j \in J} \pi_k^s(X_j) \rightarrow \pi_k^s(X) = \pi_k^s\left(\bigvee_{j \in J} X_j\right).$$

3.84. PROPOSITION. *Die obige Abbildung $\bigoplus \iota_{j*}$ ist ein natürlicher Isomorphismus.*

BEWEIS. Falls die Indexmenge $J = \{1, \dots, N\}$ endlich ist, zeigen wir die Behauptung durch Induktion über N . Dazu betrachten wir das Paar $(\bigvee_{j=1}^N X_j, \bigvee_{j=1}^{N-1} X_j)$ zusammen mit der Inklusion und der Quotientenabbildung

$$\iota_N: X_N \hookrightarrow \bigvee_{j=1}^N X_j \quad \text{und} \quad q_N: \bigvee_{j=1}^N X_j \twoheadrightarrow \bigvee_{j=1}^N X_j / \bigvee_{j=1}^{N-1} X_j \cong X_N.$$

Da $q_N \circ \iota_N = \text{id}_{X_N}$, spaltet die lange exakte Sequenz

$$\dots \leftarrow \pi_k^s(X_N) \xrightleftharpoons[\iota_{N*}]{q_{N*}} \pi_k^s\left(\bigvee_{j=1}^N X_j\right) \leftarrow \pi_k^s\left(\bigvee_{j=1}^{N-1} X_j\right) \leftarrow \dots$$

aus Satz 3.82. Induktiv erhalten wir

$$\pi_k^s\left(\bigvee_{j=1}^N X_j\right) \cong \pi_k^s\left(\bigvee_{j=1}^{N-1} X_j\right) \oplus \pi_k^s(X_N) \cong \bigoplus_{i=1}^N \pi_k^s(X_j).$$

Im Falle einer unendlichen Indexmenge zeigen wir zuerst Surjektivität. Dazu wählen wir zunächst einen Repräsentanten $[f] \in \pi_{k+n}(S^n X)$, der wiederum dargestellt wird durch

$$f: S^{k+n} \longrightarrow S^n X = \bigvee_{j \in J} S^n X_j.$$

Da X gut punktiert ist, ist auch $S^n X$ nach Bemerkung 3.70 (3) gut punktiert. Wir bestimmen $u: S^n X \rightarrow I$ und $h: S^n X \times I \rightarrow S^n X$ wie in Proposition 3.59 (1). Dann erhalten wir eine offene Umgebung $U = u^{-1}([0, 1))$ vom Basispunkt $* \in S^n X$, so dass h die Menge U in $S^n X$ relativ zu $*$ auf $*$ zusammenzieht. Außerdem sei $U_j = S^n X_j \setminus \{*\} \subset S^n X$, dann ist U_j ebenfalls offen, und die Mengen U und $(U_j)_{j \in J}$ überdecken $S^n X$.

Da f stetig und S^{k+n} kompakt ist, existiert eine endliche Teilmenge $J_0 \subset J$, so dass

$$S^{k+n} = f^{-1}(U) \cup \bigcup_{j \in J_0} f^{-1}(U_j).$$

Die Teilmenge $\bigcup_{j \in J_0} f^{-1}(U_j) \subset S^{k+n}$ ist offen, und ihr Rand wird auf den Basispunkt in X abgebildet. Durch Verkleben erhalten wir eine Homotopie

$$(s, t) \longmapsto \begin{cases} h(f(s), t) & \text{falls } s \notin \bigcup_{j \in J_0} f^{-1}(U_j), \text{ und} \\ f(s) & \text{falls } s \in \overline{\bigcup_{j \in J_0} f^{-1}(U_j)}. \end{cases}$$

Für $t = 1$ trifft diese Abbildung nur noch diejenigen X_j mit $j \in J_0$. Wir erhalten eine Abbildung $g \sim f$ mit

$$g: S^{k+n} \longrightarrow \bigvee_{j \in J_0} S^n X_j \hookrightarrow \bigvee_{j \in J} S^n X_j.$$

Somit liegt $[f] = [g]$ im Bild von $\pi_k^s(\bigvee_{j \in J_0} X_j) \cong \bigoplus_{J_0} \pi_k^s(X_j)$, also auch im Bild von $\bigoplus_J \pi_k^s(X_j)$.

Um Injektivität zu zeigen, sei $\sum_{i \in I} [f_i]$ ein Element des Kernes, insbesondere $[f_i] \in \pi_k^s(X_i)$, und $[f_i] = 0$ für fast alle i . Wir betrachten einen Repräsentanten $f: S^{k+n} \rightarrow S^n X$, der nur endlich viele der X_i trifft. Dann können wir eine Nullhomotopie h wie oben ebenfalls auf einen endlichen Teil des Koproduktes herunterdrücken, und die Behauptung folgt. \square

3.85. BEMERKUNG. Wir haben jetzt bei einigen bekannten Resultaten die lästigen Zusammenhangsvoraussetzung durch den Übergang zu stabilen Homotopiegruppen eliminiert. Wir haben aber auch einige schöne Eigenschaften verloren: da die Einhängung eines kartesischen Produktes kein Produkt mehr ist, geht die Produktformel aus Beispiel 3.28 verloren, genauso wie die lange exakte Homotopiesequenz 3.25 für Serre-Faserungen. Anstelle dieser Resultate treten Spektralsequenzen, die für viele Berechnungen zu sperrig sind.

Die Kunst im Umgang mit Homotopiegruppen besteht daher oft darin, möglichst viele Rechnungen im sogenannten „stabilen Bereich“ durchzuführen, also für solche k , für die $\pi_k(X) \cong \pi_k^s(X)$ für den jeweiligen Raum X noch gilt.

3.i. Gerahmter Bordismus

Wir geben jetzt eine differentialtopologische Beschreibung der stabilen Homotopiegruppen. Der Begriff einer k -dimensionalen differenzierbaren Untermannigfaltigkeit M des \mathbb{R}^n sollte bekannt sein. Wir lassen im Folgenden übrigens auch die leere Menge als Untermannigfaltigkeit zu. In jedem Punkt $p \in M$ spaltet sich \mathbb{R}^n auf in den Tangentialraum $T_p M$ an M und den dazu senkrechten Normalenraum $\nu_p M$. Diese Unterräume des \mathbb{R}^n hängen stetig von $p \in M$ ab, insbesondere bildet die Vereinigung aller $\nu_p M$ eine Untermannigfaltigkeit νM von $M \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$, das *Normalenbündel* νM von M . Dabei identifizieren wir $p \in M$ mit dem Nullvektor an der Stelle p und erhalten eine Einbettung $M \hookrightarrow \nu M$, den *Nullschnitt*.

Unter einer *Trivialisierung* des Normalenbündels von M verstehen wir eine stetige Abbildung $\tau: \nu M \rightarrow M \times \mathbb{R}^{n-k}$, so dass $\tau_p: \nu_p M \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^{n-k}$ für alle $p \in M$ ein linearer Isomorphismus ist. Äquivalent dazu können wir jedem $p \in M$ auf stetige Weise einen Rahmen (v_1, \dots, v_{k-n}) , das heißt, eine Basis von $\nu_p M$, zuordnen, so dass $\tau(v_j) = (p, e_j) \in M \times \mathbb{R}^{n-k}$. Daher nennen wir τ auch *Rahmung* von M .

Sei schließlich τ eine Rahmung von $M \subset \mathbb{R}^n$, und sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall der Länge > 0 . Dann können wir das Normalenbündel $\nu(J \times M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit $J \times \nu M \rightarrow J \times M$ identifizieren, da die zusätzliche Richtung im umgebenden Raum tangential zu J ist, also nicht zum Normalenbündel beiträgt. Daher induziert τ eine Rahmung $\tau \circ \pi_{\nu M}: \nu(J \times M) \cong J \times \nu M \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$.

3.86. DEFINITION. Es seien $0 \leq k < n$.

- (1) Eine *gerahmte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit* des \mathbb{R}^n besteht aus
 - (a) einer glatten, kompakten k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ (ohne Rand) für ein $n > k$, und
 - (b) einer Trivialisierung $\tau: \nu M \rightarrow M \times \mathbb{R}^{n-k}$ des Normalenbündels von M in \mathbb{R}^n , der *Rahmung*.
- (2) Ein *gerahmter Bordismus* zwischen zwei k -dimensionalen gerahmten Untermannigfaltigkeiten (M_i, τ_i) ($i = 0, 1$) des \mathbb{R}^n besteht aus
 - (a) einer glatten, kompakten $(k+1)$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit $W \subset I \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit Rand $\partial W \subset \partial I \times \mathbb{R}^n$ mit *Krägen*

$$W \cap ([0, \varepsilon) \times \mathbb{R}^n) = [0, \varepsilon) \times M_0 \quad \text{und} \quad W \cap ((1 - \varepsilon, 1] \times \mathbb{R}^n) = (1 - \varepsilon, 1] \times M_1$$

für ein geeignetes $\varepsilon > 0$, und

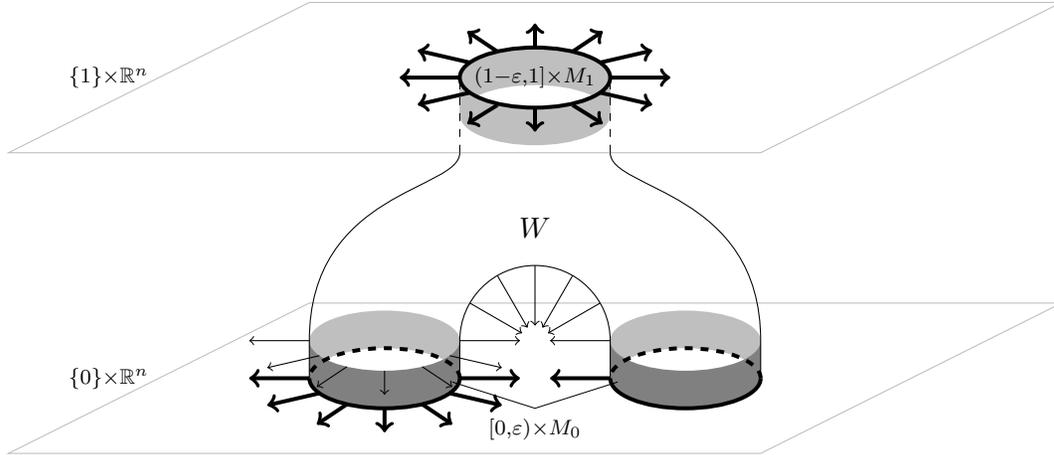


ABBILDUNG 3.8. Ein gerahmter Bordismus

(b) einer Trivialisierung $\bar{\tau}: \nu W \rightarrow W \times \mathbb{R}^{n-k}$ von νW , so dass auf den Krügen

$$\bar{\tau}|_{[0,\varepsilon) \times M_0} = \tau_0 \circ \pi_{\nu M_0}: \nu W|_{W \cap ([0,\varepsilon) \times \mathbb{R}^n)} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$$

und $\bar{\tau}|_{(1-\varepsilon,1] \times M_1} = \tau_1 \circ \pi_{\nu M_1}: \nu W|_{W \cap ((1-\varepsilon,1] \times \mathbb{R}^n)} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$.

- (3) Zwei gerahmte k -dimensionale Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n heißen *gerahmt bordant*, wenn ein gerahmter Bordismus zwischen ihnen existiert. Es bezeichne $\Omega_k^{\text{fr},n}$ die Menge aller gerahmten k -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n bis auf gerahmten Bordismus.

In (2) schreiben wir

$$\partial(W, \bar{\tau}) = \partial_0(W, \bar{\tau}) \sqcup \partial_1(W, \bar{\tau}) \quad \text{mit } \partial_i(W, \bar{\tau}) = (M_i, \tau_i).$$

Wenn $\partial_1(W, \bar{\tau}) = \emptyset$ gilt, nennen wir (M_0, τ_0) *gerahmt nullbordant* und $(W, \bar{\tau})$ einen *gerahmten Nullbordismus* von (M_0, τ_0) .

Die einzigen kompakten Untermannigfaltigkeiten, die wir uns gut vorstellen können, sind geschlossene Kurven im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 („Knoten“) sowie orientierbare Flächen im \mathbb{R}^3 . Für alle diese Untermannigfaltigkeiten finden wir Rahmungen (für Knoten sogar abzählbar viele nicht homotope). Es gibt aber auch Untermannigfaltigkeiten höherer Dimension und Kodimension, die keine Rahmungen zulassen.

Als Beispiel für einen Bordismus betrachten wir eine „Hose“ wie in Abbildung 3.8, deren Rand aus zwei Kreisen in $\{0\} \times \mathbb{R}^2$ und einem Kreis in $\{1\} \times \mathbb{R}^2$ besteht. Wir erhalten eine kompatible Trivialisierung des Normalenbündels zum Beispiel, wenn wir jeweils für alle Kreise die nach außen beziehungsweise die nach innen weisenden Normalenvektoren gewählt haben.

3.87. BEMERKUNG. Wir überprüfen, dass „gerahmt bordant“ eine Äquivalenzrelation definiert.

- (1) Sei (M, τ) gerahmte Mannigfaltigkeit, dann ist $W = I \times M$ ein Bordismus, und τ induziert eine Trivialisierung $\bar{\tau}$ von νW , die τ an beiden Randkomponenten fortsetzt.
- (2) Sei W ein gerahmter Bordismus zwischen (M_0, τ) und (M_1, τ_1) . Spiegeln an der Ebene $\{\frac{1}{2}\} \times \mathbb{R}^n$ liefert einen Bordismus zwischen M_1 und M_0 , und die Trivialisierung $\bar{\tau}$ lässt sich mitspiegeln.
- (3) Sei schließlich $(W', \bar{\tau}')$ gerahmter Bordismus zwischen (M_0, τ_0) und (M_1, τ_1) , und $(W'', \bar{\tau}'')$ sei gerahmter Bordismus zwischen (M_1, τ_1) und (M_2, τ_2) . Wir stauchen beide Bordismen auf $[0, \frac{1}{2}] \times \mathbb{R}^n$ beziehungsweise $[\frac{1}{2}, 1] \times \mathbb{R}^n$, dann bildet die Vereinigung W aufgrund der Produktstruktur auf den Krügen wieder eine glatte Mannigfaltigkeit, und wir wählen $\varepsilon =$

$\min(\frac{\varepsilon'}{2}, \frac{\varepsilon''}{2})$. Die Trivialisierungen $\bar{\tau}'$ und $\bar{\tau}''$ stimmen nach Stauchung auf $(\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon)$ mit der von τ_1 induzierten Trivialisierung überein, und lassen sich daher auf ganz W fortsetzen.

Wir haben also gezeigt, dass gerahmter Bordismus eine wohldefinierte Äquivalenzrelation darstellt.

Sei (M, τ) eine gerahmte Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n , und sei $p \in M$. Wir definieren eine Abbildung $a: \nu M \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$a(p, v) = p + v .$$

An der Stelle $(p, 0) \in M \times \{0\} \subset \nu M$ mit $p \in M$ hat νM den Tangentialraum

$$T_{(p,0)}\nu M = T_p M \oplus \nu_p M \cong \mathbb{R}^n = T_p \mathbb{R}^n ,$$

und wir sehen, dass $da_{(p,0)} = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$. Nach dem Umkehrsatz ist a also ein lokaler Diffeomorphismus nahe des Nullschnitts $M \subset \nu M$. Da M kompakt ist, finden wir ein $r > 0$, so dass $a: \nu^{(r)} M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Einbettung wird, wobei

$$\nu^{(r)} M = \{ v \in \nu_p M \mid |v| < r \} .$$

Wir definieren jetzt eine Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow S^{n-k} \cong D^{n-k}/S^{n-k-1}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tau_p(v)}{r} & \text{falls } x = a(p, v) \text{ für ein } p \in M \text{ und ein } v \in \nu_p M \text{ mit } |v| < r, \text{ und} \\ * & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.8)$$

Diese Abbildung ist stetig auf im a . Sei jetzt $U \subset S^{n-k}$ offene Umgebung von $*$. Dann ist $a^{-1}(U)$ offene Umgebung von $\mathbb{R}^n \setminus \text{im } a$. Also ist f insgesamt stetig. Das Bild im a ist in einem Kompaktum K in \mathbb{R}^n enthalten, also wird $\mathbb{R}^n \setminus K$ konstant auf $*$ abgebildet. Also können wir f auf die Einpunktkompaktifizierung fortsetzen und erhalten $f: S^n \rightarrow S^{n-k}$.

3.88. SATZ (Pontryagin-Thom-Konstruktion, [Mi, Chapter 7]). Für $0 \leq k < n$ gilt

$$\pi_n(S^{n-k}) \cong \Omega_k^{\text{fr}, n} .$$

BEWEIS. Der vollständige Beweis benötigt einige Sätzen aus der Differentialtopologie. Wir geben hier daher nur eine Beweisskizze und verweisen ansonsten auf [Mi].

Als erstes geben wir eine Umkehrabbildung zur obigen Konstruktion an. Dabei benutzen wir, dass es in jeder punktierten Homotopieklasse von Abbildungen $f: S^n \rightarrow S^{n-k}$ einen glatten Repräsentanten gibt, für den der „Südpol“ $0 \in \mathbb{R}^{n-k} \cong S^{n-k} \setminus \{*\}$ regulärer Wert ist, und setzen

$$M = f^{-1}(0) \subset f^{-1}(S^{n-k} \setminus \{*\}) \subset \mathbb{R}^n .$$

Dann ist M eine glatte Untermannigfaltigkeit nach dem Satz über implizite Funktionen. Als Trivialisierung des Normalenbündels wählen wir einfach $\tau = df|_{\nu M}$.

Offensichtlich hängt (M, τ) von der Wahl des Repräsentanten f von $[f] \in \pi_n(S^{n-k})$ ab. Es sei also g ein weiterer glatter punktierter Repräsentant, für den 0 ein regulärer Wert ist. Dann können wir mit dem gleichen Satz wie oben eine Homotopie zwischen f und g durch eine glatte punktierte Homotopie approximieren, für die 0 ein regulärer Wert ist. Dabei können wir sogar annehmen, dass diese Homotopie nahe der Endpunkte stationär ist. Dann ist $W = h^{-1}(0) \subset I \times \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit wie in Definition 3.86 (2a) und $\bar{\tau} = dh|_{\nu W}$ eine Trivialisierung von νW , so dass $(W, \bar{\tau})$ einen gerahmten Bordismus zwischen (M_0, τ_0) und (M_1, τ_1) darstellt.

Wir erhalten also eine wohldefinierte Abbildung $\Phi: \pi_n(S^{n-k}) \rightarrow \Omega_k^{\text{fr}, n}$. Die Surjektivität haben wir oben bereits gezeigt, indem wir f zu (M, τ) konstruiert haben. Injektivität erhalten wir, indem wir auf dem gleichen Wege zu einem gerahmten Bordismus zwischen $(f_0^{-1}, df_0|_{\nu(f_0^{-1}(0))})$ und $(f_1^{-1}, df_1|_{\nu(f_1^{-1}(0))})$ eine Homotopie $h: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow D^{n-k}/S^{n-k-1}$ zwischen f_0 und f_1 angeben. \square

3.89. BEMERKUNG. Für $n \geq 2$ trägt $\pi_n(S^{n-k})$ eine abelsche Gruppenstruktur. Auch $\Omega_k^{\text{fr},n}$ ist eine abelsche Gruppe für $n \geq 2$. Für die konstante Abbildung $f \equiv *$ ist $f^{-1}(0) = \emptyset$, also ist das Nullelement die leere Menge.

Seien (M_0, τ_0) und (M_1, τ_1) gegeben. Beide Mannigfaltigkeiten sind kompakt, also beschränkt in \mathbb{R}^n . Wir können daher beide Mannigfaltigkeiten innerhalb \mathbb{R}^n in verschiedene Richtungen parallel so verschieben, dass sie disjunkt werden. Dann nehmen wir die disjunkte Vereinigung als Summe. Man überprüft leicht, dass verschiedene Verschiebungsvektoren gerahmt bordante Summen $(M_0, \tau_0) + (M_1, \tau_1)$ liefern, und dass diese Summe genau der Summe in $\pi_n(S^{n-k})$ entspricht.

Außerdem erhalten wir das gerahmte Inverse $-(M, \tau)$ von (M, τ) , indem wir M und τ gemeinsam an einer Hyperbene H in \mathbb{R}^n spiegeln. Wenn wir diese Hyperbene disjunkt zu M wählen, stellen wir uns jetzt vor, dass (M, τ) an der „Achse“ $H \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ auf sein Inverses „rotiert“. Die so erzeugte „Rotationsmannigfaltigkeit“ stauchen wir nach $\mathbb{R}^n \times [0, 1)$ und erhalten einen Bordismus von $(M, \tau) + (-(M, \tau))$ zur leeren Menge.

3.90. BEISPIEL. Für $k = 0$ betrachten wir endliche Teilmengen $M = (p_1, \dots, p_N)$ des \mathbb{R}^n . Der Einfachheit halber sei $n \geq 2$. Für jeden Punkt p_i fixieren wir eine Basis von \mathbb{R}^n . Ein gerahmter Bordismus zwischen M_0 und M_1 ist eine Sammlung von Kurven zwischen den Punkten aus beiden Mengen. Aufgrund der Rahmung verbindet eine Kurve mit zwei Randpunkten in M_0 immer Punkte mit verschiedenen orientierten Basen, während eine Kurve von M_0 nach M_1 immer Punkte mit gleich orientierten Basen miteinander verbindet. Jetzt überzeugt man sich leicht, dass $\Omega_0^{\text{fr},n} \cong \mathbb{Z} \cong \pi_n(S^n)$ gilt. Man beachte, dass es uns soeben gelungen ist, $\pi_n(S^n)$ ohne Benutzung des Ausschneidungssatzes und der Homotopiesequenz 3.25 für Faserungen zu bestimmen.

3.91. FOLGERUNG. *Es sei $f: S^n \rightarrow S^n$ punktierte Abbildung. Wenn ein Punkt $p \in \mathbb{R}^n \cong S^n \setminus \{*\}$ existiert, so dass f in einer Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von $f^{-1}(p)$ glatt und p regulärer Wert ist, dann berechnet sich der Abbildungsgrad aus Definition 3.45 als*

$$\deg f = \sum_{q \in f^{-1}(p)} \text{sign det } df_q . \quad \square$$

Später können wir mit einer ähnlichen Formel einen Abbildungsgrad für Abbildungen zwischen kompakten orientierten Mannigfaltigkeiten der gleichen Dimension erklären.

In Abschnitt 3.j betrachten wir noch den Fall $k = 1$. Für größere k ist der Aufwand bei der Bestimmung von $\pi_n(S^{n-k})$ mit der Pontryagin-Thom-Konstruktion so hoch, dass man lieber auf andere Methoden zurückgreift.

Wir wollen jetzt zu $\pi_k^s(S^0)$ übergehen. Wir betrachten dazu die Inklusion $\iota: \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Es sei (M, τ) gerahmte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n . Dann ist $M' = \iota(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ wieder Untermannigfaltigkeit mit Tangential- und Normalbündel

$$TM' = d\iota(TM) \cong TM \quad \text{und} \quad \nu M' = d\iota(\nu M) \times \{0\} \times \mathbb{R} \cong \nu M \times \mathbb{R} .$$

Wir erweitern also τ zu einer Trivialisierung

$$\tau' = \tau \times \text{id}_{\mathbb{R}}: \nu M' \cong \nu M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1-k} .$$

Mit gerahmten Bordismen verfahren wir analog und erhalten eine Abbildung

$$\iota_{\#}: \Omega_k^{\text{fr},n} \longrightarrow \Omega_k^{\text{fr},n+1} .$$

3.92. PROPOSITION. *Für alle $0 \leq k < n$ kommutiert das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(S^{n-k}) & \xrightarrow{\cong} & \Omega_k^{\text{fr},n} \\ S \downarrow & & \downarrow \iota_{\#} \\ \pi_{n+1}(S^{n+1-k}) & \xrightarrow{\cong} & \Omega_k^{\text{fr},n+1} . \end{array}$$

BEWEIS. Der Einfachheit halber betrachten wir $S^{n+1} = S^n \wedge S^1$ und $S^{n+1-k} = S^{n-k} \wedge S^1$ und stabilisieren entsprechend in der letzten Koordinate. Sei $f: S^n \rightarrow S^{n-k}$ wie im Beweis von Satz 3.88 eine glatte punktierte Abbildung, so dass $0 \in \mathbb{R}^n = S^n \setminus \{0\}$ regulärer Wert ist, und es sei $(M, \tau) = (f^{-1}(0), df|_{\nu(f^{-1}(0))})$. Dann ist $Sf = f \wedge \text{id}_{S^1}$ in einer Umgebung von $(Sf)^{-1}(0)$ immer noch glatt und stimmt dort mit $f \times \text{id}_{\mathbb{R}}$ überein. Daher erhalten wir

$$(Sf)^{-1}(0) = f^{-1}(0) \times \{0\} = M' \quad \text{und} \quad d(Sf)|_{\nu M'} = (df \times d\text{id}_{\mathbb{R}})|_{\nu M \times \mathbb{R}} = \tau'. \quad \square$$

3.93. DEFINITION. Für $k \geq 0$ ist die k -te gerahmte Bordismusgruppe definiert durch

$$\Omega_k^{\text{fr}} = \varinjlim \Omega_k^{\text{fr}, n}.$$

3.94. FOLGERUNG (Aus Satz 3.42 (4) und 3.88). Es gilt

$$\pi_k^s \cong \Omega_k^{\text{fr}},$$

insbesondere gilt $\Omega_k^{\text{fr}} \cong \Omega_k^{\text{fr}, n}$ für alle $n \geq 2k + 2$. \square

Wir nennen (M, τ) schlicht *gerahmte k -dimensionale Mannigfaltigkeit*, wenn es uns egal ist, in welchen \mathbb{R}^n wir (M, τ) betrachten wollen — nur muss n eine gewisse Mindestgröße haben, typischerweise jedoch nicht mehr als $2k + 2$. Genauso sprechen wir nur noch von gerahmten Bordismen $(W, \bar{\tau})$ zwischen (M_0, τ_0) und (M_1, τ_1) — dabei müssen wir unter Umständen (M_0, τ_0) und (M_1, τ_1) erst in einen größeren \mathbb{R}^n einbetten. Als nächstes kommen wir zu einer geometrischen Interpretation der stabilen Homotopiegruppen $\pi_k^s(X)$, dabei betrachten wir direkt den Kolimes.

3.95. DEFINITION. Es sei X ein (nicht notwendig punktierter) topologischer Raum.

- (1) Ein *gerahmter singulärer k -Zykel* in X besteht aus
 - (a) einer gerahmten k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit (M, τ) und
 - (b) einer Abbildung $F: M \rightarrow X$.
- (2) Zwei gerahmte singuläre Zykel (M_0, τ_0, F_0) und (M_1, τ_1, F_1) heißen *in X gerahmt bordant* oder auch *gerahmt homolog*, wenn es
 - (a) einen gerahmten Bordismus $(W, \bar{\tau})$ zwischen (M_0, τ_0) und (M_1, τ_1) und
 - (b) eine Abbildung $\bar{F}: W \rightarrow X$ mit $\bar{F}|_{\partial_i M} = F_i$ für $i \in \{0, 1\}$ gibt.
- (3) Die k -te *gerahmte Bordismusgruppe* $\Omega_k^{\text{fr}}(X)$ von X sei die Menge aller gerahmten singulären k -Zykel in X bis auf gerahmten Bordismus.

Wir nennen die obigen Zykel „singulär“, weil wir nicht erwarten, dass F eine Einbettung ist — im schlimmsten Fall kann F sogar konstant sein.

3.96. BEMERKUNG. Es sei X ein topologischer Raum.

- (1) Wie in Bemerkung 3.85 ist „gerahmt bordant“ in X eine Äquivalenzrelation.
- (2) Falls $X = \text{pt}$ der einpunktige Raum ist, kommt für F immer nur die konstante Abbildung in Frage, also gilt

$$\Omega_k^{\text{fr}}(\text{pt}) = \Omega_k^{\text{fr}}.$$

- (3) Durch disjunkte Vereinigung der gerahmten Mannigfaltigkeiten (M, τ) wird $\Omega_k^{\text{fr}}(X)$ wie in Bemerkung 3.89 zu einer abelschen Gruppe. Dabei müssen die Bilder der einzelnen gerahmten Untermannigfaltigkeiten in X aber nicht disjunkt sein.
- (4) Es sei $\varphi: X \rightarrow Y$ stetig. Dann induziert φ einen funktoriellen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi_*: \Omega_k^{\text{fr}}(X) \rightarrow \Omega_k^{\text{fr}}(Y)$$

durch $\varphi_*(M, \tau, F) = (M, \tau, \varphi \circ F)$. Sei η eine Homotopie zwischen φ und $\psi: X \rightarrow Y$, dann können wir $\eta \circ (F \times \text{id}_I): M \times I \rightarrow Y$ als gerahmten Bordismus zwischen $\varphi_*(M, \tau, F)$ und $\psi_*(M, \tau, F)$ auffassen. Also ist gerahmter Bordismus ein Funktor

$$\Omega_k^{\text{fr}, n}: \mathcal{HTop} \longrightarrow \mathcal{Ab}.$$

Es sei X ein topologischer Raum, dann erinnern wir uns an die Konstruktion

$$X_+ = X \sqcup \text{pt} ,$$

aus Abschnitt 3.a, wobei der zusätzliche Punkt $*$ $\in \text{pt} = \{*\}$ der Basispunkt sei.

3.97. SATZ (Pontryagin-Thom-Konstruktion). *Es gibt einen natürlichen Isomorphismus*

$$\pi_k^s(\cdot_+) \cong \Omega_k^{\text{fr}}: \mathcal{HTop} \longrightarrow \mathcal{Ab} .$$

BEWEIS. Es sei $f: S^n \rightarrow S^{n-k} \wedge X_+$ Repräsentant eines Elementes von $\pi_k^s(X_+)$. Als erstes überlegen wir uns, dass

$$S^{n-k} \wedge X_+ = (S^{n-k} \times X \sqcup S^{n-k})/(\{*\} \times X \sqcup S^{n-k}) \cong (S^{n-k} \times X)/(\{*\} \times X) .$$

Wir bezeichnen den Basispunkt von $S^{n-k} \wedge X_+$ wieder mit $\{*\}$ und betrachten

$$V = (S^{n-k} \wedge X_+) \setminus \{*\} \cong \mathbb{R}^{n-k} \times X \quad \text{und} \quad U = f^{-1}(V) \subset \mathbb{R}^n \cong S^n \setminus \{*\} .$$

Dann sind $V \subset S^{n-k} \wedge X_+$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die zusammengesetzte Abbildung

$$g: U \xrightarrow{f|_U} \mathbb{R}^{n-k} \times X \xrightarrow{\pi_{\mathbb{R}^{n-k}}} \mathbb{R}^{n-k}$$

ist *eigentlich*, das heißt, Urbilder kompakter Mengen sind kompakt. Denn sei $K \subset \mathbb{R}^{n-k}$ kompakt, dann sind $S^{n-k} \setminus K$ und $(S^{n-k} \setminus K) \wedge X_+$ offen und $g^{-1}(\mathbb{R}^{n-k} \setminus K) \cup (S^n \setminus U) = f^{-1}(S^{n-k} \setminus K)$ ist offene Umgebung des unendlichen Punktes $\{*\}$, also ist ihr Komplement $g^{-1}(K)$ in S^n kompakt.

Insbesondere ist $g^{-1}(0) \subset U$ kompakt, und wir können f auf einer kompakten Umgebung von $g^{-1}(0)$ in U homotop so deformieren, dass die erste Komponente g von f in einer kleineren Umgebung von $g^{-1}(0)$ glatt ist und $0 \in \mathbb{R}^{n-k}$ als regulären Wert besitzt. Wie im Beweis von Satz 3.88 erhalten wir eine gerahmte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n , nämlich

$$(M, \tau) = (g^{-1}(0), dg|_{\nu(g^{-1}(0))}) .$$

Außerdem erhalten wir eine zusammengesetzte Abbildung

$$F: M \hookrightarrow U \xrightarrow{f|_U} \mathbb{R}^{n-k} \times X \xrightarrow{\pi_X} X ,$$

und (M, τ, F) ist der gesuchte singuläre gerahmte k -Zykel.

Seien zwei Repräsentanten $f_i: S^{n_i} \rightarrow S^{n_i-k} \wedge X_+$, $i \in \{0, 1\}$ desselben Elementes von $\pi_k^s(X)$ gegeben, dann finden wir zunächst ein $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ und eine Homotopie h zwischen $S^{n-n_0}f_0$ und $S^{n-n_1}f_1$. Wie in Proposition 3.92 ersetzt Stabilisierung die gerahmte Mannigfaltigkeit (M, τ) durch (M', τ') , ändert jedoch nichts an der Abbildung $F: M' \cong M \rightarrow X$. Wir nehmen also an, dass $n = n_0 = n_1$. Außerdem nehmen wir wie im ersten Schritt an, dass für $V = \mathbb{R}^{n-k} \times X$ wie oben und $U = h^{-1}(V)$ die zusammengesetzte Abbildung

$$\ell: U \xrightarrow{h|_U} \mathbb{R}^{n-k} \times X \xrightarrow{\pi_{\mathbb{R}^{n-k}}} \mathbb{R}^{n-k}$$

in einer Umgebung der kompakten Menge $\ell^{-1}(0) \subset U$ glatt ist und 0 als regulären Wert besitzt. Wie im Beweis von Satz 3.88 ist $(W, \bar{\tau}) = (\ell^{-1}(0), d\ell|_{\ell^{-1}(0)})$ ein gerahmter Bordismus zwischen (M_0, τ_0) und (M_1, τ_1) , und wir erhalten eine zusammengesetzte Abbildung

$$H: W \hookrightarrow U \xrightarrow{h|_U} \mathbb{R}^{n-k} \times X \xrightarrow{\pi_X} X$$

mit $H|_{\partial_i W} = F_i$ für $i = 0, 1$. Mithin sind (M_0, τ_0, F_0) und (M_1, τ_1, F_1) gerahmt bordant in X . Also ist $\Phi_X: \pi_k^s(X_+) \rightarrow \Omega_k^{\text{fr}}(X)$ wohldefiniert.

Zur Natürlichkeit sei $\varphi: X \rightarrow Y$ gegeben. Zu zeigen ist die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \pi_k^s(X_+) & \longrightarrow & \Omega_k^{\text{fr}}(X) \\ \varphi_* = \downarrow \pi_k^s(\varphi_+) & & \varphi_* = \downarrow \Omega_k^{\text{fr}}(\varphi) \\ \pi_k^s(Y_+) & \longrightarrow & \Omega_k^{\text{fr}}(Y) . \end{array}$$

Wir setzen $V = \mathbb{R}^{n-k} \times X \subset S^{n-k} \wedge X_+$ wie oben und $W = \mathbb{R}^{n-k} \times Y \subset S^{n-k} \wedge Y_+$, dann folgt

$$V = (\text{id}_{\mathbb{R}^{n-k}} \times \varphi)^{-1}(W) .$$

Zu $f: S^n \rightarrow S^{n-k} \wedge X_+$ bestimmen wir $U \subset \mathbb{R}^n$, $g: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, (M, τ) und F wie oben. Da $U = f^{-1}(V) = (\varphi \circ f)^{-1}(W)$, liefert $\varphi \circ f: S^n \rightarrow S^{n-k} \wedge Y_+$ die gleiche Abbildung

$$\pi_{\mathbb{R}^{n-k}} \circ (\text{id}_{\mathbb{R}^{n-k}} \times \varphi) \circ f|_U = \pi_{\mathbb{R}^{n-k}} \circ f|_U = g ,$$

und daher die gleiche gerahmte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit (M, τ) . Jetzt folgt Natürlichkeit, denn $\varphi \circ f$ liefert den k -Zykel

$$(M, \tau, \pi_Y \circ (\text{id}_{\mathbb{R}^{n-k}} \times \varphi) \circ f|_M) = (M, \tau, \varphi \circ \pi_X \circ f|_M) = \varphi_*(M, \tau, F) .$$

Zum Beweis der Surjektivität sei ein singulärer gerahmter k -Zykel (M, τ, F) in X gegeben, dabei sei (M, τ) gerahmte Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n , und $a: \nu^{(r)}M \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei eine Einbettung. In Analogie zu (3.8) definieren wir $f: S^n \rightarrow S^{n-k} \wedge X$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tau_p(v)}{r} \wedge F(p) & \text{falls } x = a(p, v) \text{ für ein } p \in M \text{ und ein } v \in \nu_p M \text{ mit } |v| < r, \text{ und} \\ * & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man überprüft wieder leicht, dass f stetig ist, und den singulären gerahmten k -Zykel (M, τ, F) induziert. Zur Injektivität verfahren wir analog mit einem singulären gerahmten Bordismus zwischen zwei k -Zykeln. \square

3.98. BEMERKUNG. Die höheren Homotopiegruppen $\pi_k(X)$ finden „runde Löcher“ von X , die dadurch sichtbar werden, dass man Sphären nach X abbildet, die man anschließend nicht mehr zusammenziehen kann. Man findet jedoch keine Löcher, die dadurch zustande kommen, dass man andere kompakte Mannigfaltigkeiten nach X abbildet, die sich dann in X nicht durch einen Nullbordismus ausfüllen lassen. Beispielsweise sollte der Torus T^2 ein solches „torusförmiges Loch“ haben, aber es gilt $\pi_2(T^2) = 0$.

Mit der stabilen Homotopie und der Pontryagin-Thom-Konstruktion können wir nun immerhin Löcher in der Form gerahmter Untermannigfaltigkeiten aufspüren. Aber zum einen tragen die Rahmungen merkwürdige Zusatzinformation, siehe unten. Zum anderen gibt es in höheren Dimensionen Untermannigfaltigkeiten, die keine Rahmungen zulassen (ein Beispiel wäre $\mathbb{C}P^2 \subset \mathbb{R}^8$). Nach Bemerkung 3.96 (2) ist

$$\Omega_k^{\text{fr}}(\text{pt}) = \pi_k^s(S^0)$$

gerade die k -te stabile Homotopiegruppe der Sphären. Für viele $k > 0$ gilt $\pi_k^s(S^0) \neq 0$, obwohl ein Punkt eigentlich keine weitere Information tragen sollte. Aber immerhin sind alle $\pi_k^s(S^0)$ endliche Gruppen für $k > 0$.

Poincarés erste Idee, „Homologie“ zu definieren war daher, „orientierten“ Bordismus Ω_k^{SO} ohne Rahmungen zu betrachten. Aber auch diese Definition hat Probleme, so dass man einen etwas abstrakteren Zugang entwickelt hat. Würden wir Poincarés Ansatz folgen, so erhielten wir für $\Omega_k^{SO}(\text{pt})$ nämlich abzählbar unendliche Gruppen für alle $k \in 4\mathbb{N}$, also noch mehr „Lärm um Nichts.“

3.99. BEMERKUNG. Der Vollständigkeit halber skizzieren wir auch „gerahmten Kobordismus“ mit dem dazugehörigen Pontryagin-Thom Isomorphismus

$$\Omega_{\text{fr}}^k(X) \cong [X_+, S^k]^s = \varinjlim [S^{n-k} \wedge X_+, S^n] .$$

Diesmal erhalten wir kontravariante Funktoren, denn eine Abbildung $\varphi: X \rightarrow Y$ induziert durch Zurückziehen eine Abbildung

$$\varphi^*: \Omega_{\text{fr}}^k(Y) \cong [Y_+, S^k]^s \xrightarrow{\circ\varphi} [X_+, S^k]^s \cong \Omega_{\text{fr}}^k(X) .$$

Am besten lässt sich die linke Seite beschreiben, wenn X selbst eine kompakte Mannigfaltigkeit ist, denn in diesem Fall wird $\Omega_{\text{fr}}^k(X)$ von $(\dim X - k)$ -dimensionalen kompakten Untermannigfaltigkeiten $N \subset \mathbb{R}^{n-k} \times X$ mit Trivialisierungen τ des Normalenbündels $\nu_{N,X}$ von N in $\mathbb{R}^{n-k} \times X$ erzeugt. Das Paar (N, τ) heißt dann *singulärer gerahmter k -Kozykel*. Die Äquivalenzrelation wird diesmal über gerahmte Kobordismen, also $(\dim X + 1 - k)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten in $I \times \mathbb{R}^{n-k} \times X$ mit trivialisiertem Normalenbündel definiert.

Aufgrund der Pontryagin-Thom-Isomorphismen erhält man eine bilineare Abbildung

$$\Omega_{\text{fr}}^k(X) \times \Omega_{\text{fr}}^{\ell}(X) \cong [X_+, S^k]^s \times [S^{\ell}, X_+] \xrightarrow{\circ} \pi_{\ell}^s(S^k) = \pi_{\ell-k}^s(S^0) .$$

Im Fall $k = \ell$ ist der Wertebereich $\pi_0^s(S^0) \cong \mathbb{Z}$, man spricht von einer *Kronecker-Paarung*. Geometrisch lässt sie sich so beschreiben, dass man (M, τ) und das Bild von (N, τ') unter π_X in „allgemeine Lage“ bringt und Schnittpunkte zählt, wobei die Rahmungen das Vorzeichen festlegen.

Wir haben jetzt die zur stabilen Homotopietheorie assoziierte Homologie- und Kohomologietheorie kennengelernt. Viele Aspekte fehlen noch, zum Beispiel gibt es ein *Cup-Produkt*

$$\smile: \Omega_{\text{fr}}^k(X) \times \Omega_{\text{fr}}^{\ell}(X) \longrightarrow \Omega_{\text{fr}}^{k+\ell}(X) ,$$

bei dem man singuläre gerahmte Kozykeln miteinander „schneidet“, dabei addieren sich die Kodimensionen. So wird $\Omega_{\text{fr}}^{\bullet}(X)$ zu einem \mathbb{Z} -graduierten Ring, dem gerahmten Kobordismusring. Es gibt auch ein *Cap-Produkt*

$$\frown: \Omega_{\text{fr}}^k(X) \times \Omega_{\text{fr}}^{\ell}(X) \longrightarrow \Omega_{\text{fr}}^{\ell-k}(X) ,$$

das $\Omega_{\text{fr}}^{\bullet}(X)$ zu einem \mathbb{Z} -graduierten $\Omega_{\text{fr}}^{\bullet}(X)$ -Modul macht. Auch hier schneidet man einen Zykel mit einem Kozykel und erhält so einen Zykel kleinerer Dimension.

3.j. Die erste stabile Homotopiegruppe der Sphären

Wir wollen jetzt $\pi_1^s(S^0)$ bestimmen. Da wir dazu gerahmte Kreise betrachten müssen, und sich zwei Rahmungen von $S^1 \subset \mathbb{R}^n$ um eine Abbildung $S^1 \mapsto SO(n-1)$ unterscheiden, beweisen wir zur Vorbereitung das folgende Resultat.

3.100. SATZ. *Es sei $n \geq 3$. Dann gilt $\pi_1(SO(n), E_n) \cong \mathbb{Z}/2$, und das nicht triviale Element wird dargestellt durch die Schleife*

$$\gamma: I \ni t \mapsto \begin{pmatrix} \cos 2\pi t & -\sin 2\pi t & & 0 \\ \sin 2\pi t & \cos 2\pi t & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \in SO(n) .$$

Selbstverständlich können wir auch jede andere Ebene im \mathbb{R}^n „einmal herumdrehen“, um den Erzeuger von $\pi_1(SO(n))$ zu erhalten. Die Bedingung $n \geq 3$ ist nötig, denn es gilt $SO(1) \cong \text{pt}$ und $SO(2) \cong S^1$.

BEWEIS. Wir betrachten zunächst den Fall $n = 3$. Es sei \mathbb{H} die Algebra der Quaternionen, dann bildet die Menge $S^3 \subset \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ der Einheitsquaternionen eine Gruppe bezüglich der Quaternionen-Multiplikation. Diese Gruppe wirkt auf dem Raum $\mathbb{I} \cong \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{H}$ der imaginären Quaternionen durch

$$S^3 \times \mathbb{I} \ni (q, p) \longmapsto qp\bar{q} = qpq^{-1}.$$

Diese Wirkung erhält das Euklidische Skalarprodukt und die Orientierung, liefert also einen Homomorphismus $S^3 \rightarrow SO(3)$. Dabei wirken $\pm 1 \in S^3$ als $\text{id}_{\mathbb{I}}$. Da es zu jedem Quaternion $q \in S^3 \setminus \{\pm 1\} \subset \mathbb{H} \setminus \mathbb{R}$ ein $p \in \mathbb{I}$ gibt, mit dem q nicht kommutiert, wirken alle anderen Elemente der S^3 nicht-trivial. Schließlich kann man — zum Beispiel anhand der gleich folgenden geometrischen Darstellung — überprüfen, dass die obige Abbildung surjektiv ist. Es folgt

$$SO(3) \cong S^3/\{\pm 1\} \cong \mathbb{R}P^3.$$

Wir geben eine geometrische Beschreibung der obigen Gruppenwirkung ohne Quaternionen. Dazu seien e_0, \dots, e_3 die Standardbasis des \mathbb{R}^4 , und \mathbb{R}^3 sei das Erzeugnis von e_1, e_2, e_3 . Wir wissen bereits, dass $\pm 1 = \pm e_0$ als $\text{id}_{\mathbb{R}^3}$ wirkt. Jedes andere $q \in S^3 \setminus \{\pm e_0\}$ schreiben wir als in eindeutiger Weise als

$$q = e_0 \cos \varphi + u \sin \varphi \quad \text{mit } u \in S^2 \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{mit } \varphi \in (0, \pi).$$

Dann wirkt q als Drehung mit Winkel 2φ um die Achse $u\mathbb{R}$. Genauer ergänzen wir u zu einer orientierten Orthonormalbasis (u, v, w) des \mathbb{R}^3 , dann folgt

$$q(u) = u, \quad q(v) = v \cos 2\varphi - w \sin 2\varphi, \quad q(w) = v \sin 2\varphi + w \cos 2\varphi.$$

Wir erhalten die gleiche Abbildung, indem wir u durch $-u$ und φ durch $\pi - \varphi$ ersetzen. Der Winkel 2φ lässt sich auch dadurch erklären, dass wir in der obigen Darstellung für $\varphi = \pi$ den Punkt $q = -e_0 \in S^3$ erhalten, der als Identität wirkt.

Wir wissen jetzt also, dass $S^3 \rightarrow SO(3) \cong \mathbb{R}P^3$ die universelle Überlagerung ist. Aus Abschnitt 2.e wissen wir, dass dem nichttrivialen Element $1 \in \mathbb{Z}/2 \cong \pi_1(\mathbb{R}P^3)$ das Bild eines Weges $\tilde{\gamma}$ von e_0 nach $-e_0$ entspricht. Wir wählen $\tilde{\gamma}(t) = e_0 \cos \pi t + e_3 \sin \pi t$ und erhalten die im Satz genannte Schleife γ .

Damit ist der Fall $n = 3$ erledigt. Wir beweisen die Behauptung für größere n durch Induktion. Dazu betrachten wir die Abbildung $p: SO(n+1) \rightarrow S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit $p(g) = g e_{n+1}$. Diese Abbildung ist ein Faserbündel mit Faser

$$p^{-1}(e_{n+1}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(n+1) \mid A \in SO(n) \right\} \cong SO(n),$$

siehe Übung 3.124. Aus der langen exakten Sequenz 3.25 schließen wir mit $n \geq 3$, dass

$$\underbrace{\pi_1(S^n)}_{=0} \longleftarrow \pi_1(SO(n+1)) \xleftarrow{\cong} \pi_1(SO(n)) \longleftarrow \underbrace{\pi_2(S^n)}_{=0}.$$

Dabei geht die erzeugende Schleife γ in $SO(n)$ in die entsprechende Schleife in $SO(n+1)$ über. \square

3.101. SATZ (Pontryagin). *Es gilt $\pi_1^s(S^0) \cong \mathbb{Z}/2$.*

BEWEIS. Nach Satz 3.42 (4) und Satz 3.88 gilt $\pi_1^s(S^0) \cong \pi_n(S^{n-1}) \cong \Omega_1^{\text{fr}, n}$ für alle $n \geq 4$. Wir betrachten zunächst kompakte gerahmte 1-Mannigfaltigkeiten im \mathbb{R}^n . Jede kompakte 1-Mannigfaltigkeit ist eine disjunkte Vereinigung von Kreisen. Wir parametrisieren jede Zusammenhangskomponente M_i so durch eine Kurve γ , dass $\dot{\gamma}$ zusammen mit der Rahmung von νM_i eine positive Basis des umgebenden \mathbb{R}^n liefert. Da $n \geq 4$ ist, können wir diese Kreise gegebenenfalls „entknoten“, das heißt zu disjunkten Einheitskreisen in der Ebene $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^n$ mit Mittelpunkten auf der x -Achse deformieren, die im positiven Drehsinn durchlaufen werden — aus jeder solchen

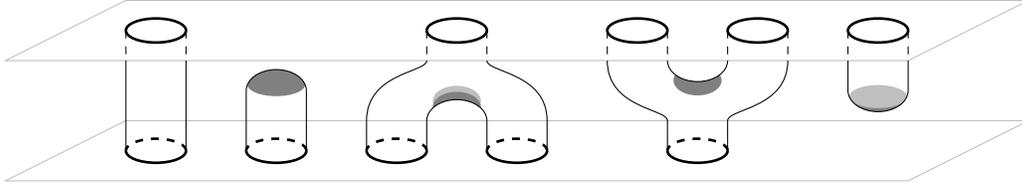


ABBILDUNG 3.9. Elementare Bordismen

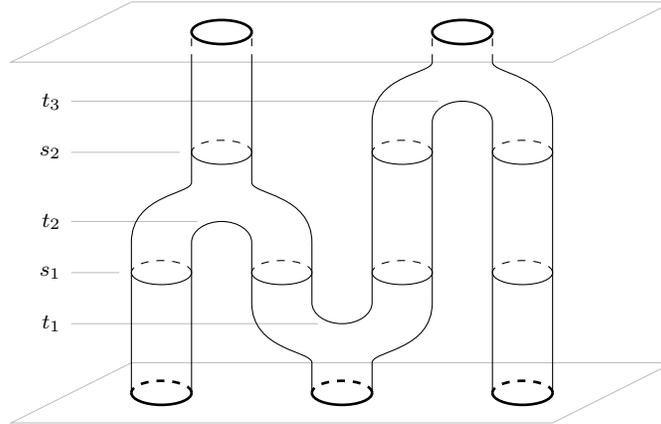


ABBILDUNG 3.10. Zusammengesetzter Bordismus

Deformation macht man leicht einen Bordismus, auf den sich auch die Rahmungen übertragen lassen.

Für einen einzelnen Kreis $S^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^n$ konstruieren wir eine Standardrahmung τ^0 , indem wir als v_1^0 den Ortsvektor in \mathbb{R}^2 wählen, und mit den Standardbasisvektoren $v_2^0 = e_3, \dots, v_{n-1}^0 = e_n$ zu einer Basis des Normalenbündels. Jede andere Rahmung unterscheidet sich um ein Element aus $\pi_1(SO(n-1)) \cong \mathbb{Z}/2$. Wenn wir mehrere gerahmte Kreise haben, addieren wir die zugehörigen Elemente von $\mathbb{Z}/2$. Wir behaupten, dass diese Summe eine gerahmte Bordismusinvariante ist.

Sei $W \subset I \times \mathbb{R}^n$ ein Bordismus. Zunächst erreichen wir durch eine kleine Deformation, dass die Koordinate $t \in I$ eine sogenannte *Morse-Funktion* auf W wird, das heißt, die Abbildung $W \ni (t, x) \mapsto t \in I$ hat nur endlich viele kritische Punkte $(t_1, p_1), \dots, (t_k, p_k)$, und nahe dieser Punkte $p_j = (x_{j,1}, \dots, x_{j,n})$ sieht W aus wie der Graph einer Funktion

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto t_k \pm (x_1 - x_{j,1})^2 \pm \dots \pm (x_n - x_{j,n})^2.$$

Wir dürfen dabei annehmen, dass $t_1 < \dots < t_k$ paarweise verschieden sind. Die Rahmungen deformieren wir wieder mit. Dann können wir den Bordismus durch Aufschneiden längs $\{s_i\} \times \mathbb{R}^n$ mit $t_1 < s_1 < t_2 < \dots < s_{k-1} < t_k$ in „elementare Bordismen“ wie in Abbildung 3.9 zerlegen. Diese können wir so anordnen, dass ganz W in $I \times \mathbb{R}^2 \subset I \times \mathbb{R}^n$ zu liegen kommt; dabei ordnen wir die Kreise in $\partial_0 W$ und $\partial_1 W$ gegebenenfalls um, siehe Abbildung 3.10.

Auf W konstruieren wir eine Standardrahmung τ^0 , indem wir auf den elementaren Bordismen in $I \times \mathbb{R}^2$ jeweils den nach außen weisenden Normalenvektor als v_1^0 wählen und dann mit den Standardbasisvektoren $v_2^0 = e_3, \dots, v_{n-1}^0 = e_n$ zu einer Basis des Normalenbündels ergänzen. Die Rahmungen τ und τ^0 unterscheiden sich um eine Abbildung $g: W \rightarrow SO(n-1)$. Für jedes $s \in I \setminus \{t_1, \dots, t_k\}$ liefert die Einschränkung auf $W \cap (\{s\} \times \mathbb{R}^n) \cong S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1$ nach Folgerung 3.8 ein Tupel von Elementen von $\pi_1(SO(n-1)) \cong \mathbb{Z}/2$. Es sei $a_s \in \mathbb{Z}/2$ die Summe dieser Elemente. Die obige Behauptung ist bewiesen, wenn wir zeigen, dass a_s nicht von s abhängt. Für alle $s \in (t_i, t_{i+1})$

mit $1 \leq i < k$ ist das klar, da die Abbildungen $g|_{W \cap (\{s\} \times \mathbb{R}^n)}$ homotop sind. Außerdem ist klar, dass sich der Beitrag eines zylindrischen elementaren Bordismus in einer Umgebung von t_i nicht ändert.

Da $SO(n-1)$ zusammenhängend ist, können wir die gegebene Rahmung τ im Innern der nicht zylindrischen elementaren Bordismen so deformieren, dass sie auf den in Abbildung 3.9 grau markierten, zusammenziehbaren Regionen jedes elementaren Bordismus mit τ^0 übereinstimmt. Dabei ändern sich die Elemente $a_s \in \mathbb{Z}/2$ nicht. Wenn der elementare Bordismus eine „Kappe“ ist (zweiter oder letzter elementarer Bordismus in der Abbildung), dann ist der Beitrag zu a_s auf beiden Seiten von t_i trivial. Wenn der elementare Bordismus eine „Hose“ ist (dritter oder vierter elementarer Bordismus in der Abbildung), dann ist der Beitrag zu a_s auf der Seite von t_i mit einer Randkomponente die Summe der Beiträge auf der Seite mit zwei Randkomponenten. Insgesamt ändert sich also a_s beim Überqueren eines kritischen Wertes t_i nicht.

Also ist unsere Behauptung bewiesen, und wir haben eine Abbildung

$$a: \pi_1^s(S^0) \cong \Omega_1^{\text{fr}} \longrightarrow \pi_1(SO(n-1)) \cong \mathbb{Z}/2$$

konstruiert. Nach unserer Vorüberlegung ist diese Abbildung surjektiv, da wir im Urbild jedes Elements einen gerahmten Kreis finden. Nach Konstruktion wird die leere gerahmte Mannigfaltigkeit auf 0 abgebildet. Wenn a bijektiv ist, ist a ein Isomorphismus, denn bis auf Isomorphie gibt es nur eine Gruppe mit zwei Elementen.

Zur Injektivität sei eine gerahmte Bordismusklass in \mathbb{R}^n gegeben, ohne Einschränkung repräsentiert durch eine disjunkte Vereinigung (M, τ) von gerahmten Einheitskreisen wie oben. Wir behaupten, dass (M, τ) zu einem einzigen gerahmten Kreis kobordant ist, und erhalten Injektivität, da es auf einem Kreis nur zwei Klassen von Rahmungen gibt. Falls M aus einem Kreis besteht, ist nichts zu tun. Falls $M = \emptyset$, betrachten wir den letzten elementaren Bordismus in Abbildung 3.9. Andernfalls benutzen wir die Hose in der Mitte der Abbildung, um die Anzahl der Kreise Schritt für Schritt bis auf einen zu reduzieren. Dabei überlegen wir uns, dass wir die gegebenen Rahmungen der „Hosenbeine“ bis zum „Gürtel“ fortsetzen können. \square

In der gleichen Arbeit, in der Pontryagin diesen Satz bewiesen hat, hat er auch $\pi_2^s(S^0) \cong \mathbb{Z}/2$ bestimmt. Die Berechnung der höheren stabilen Homotopiegruppen der S^0 mit Hilfe der Pontryagin-Thom-Konstruktion erweist sich als sehr aufwändig, so dass man sich stattdessen anderer Hilfsmittel bedient. Ohne Beweis geben wir das folgende wichtige Resultat an.

3.102. SATZ (Serre). *Mit Ausnahme von $\pi_n(S^n)$ und $\pi_{4k-1}(S^{2k})$ sind alle Homotopiegruppen von Sphären endlich. Insbesondere ist $\pi_k^s(S^0)$ endlich für alle $k > 0$.*

3.103. BEMERKUNG. Die Umkehrung der obigen Abbildung a ist der sogenannte stabile J -Homomorphismus

$$J_k: \pi_k(SO) = \varinjlim \pi_k(SO(n)) \rightarrow \pi_k^s(S^0),$$

den wir jetzt betrachten wollen. Der Kolimes bezieht sich auf die gleiche Folge von Einbettungen $\iota_n: SO(n) \hookrightarrow SO(n+1)$ wie im Beweis von Satz 3.100. Also ist SO die Gruppe der „orientierungserhaltenden orthogonalen Matrizen“ mit Indizes in \mathbb{N} , die bis auf endlich viele Einträge mit der „Einheitsmatrix“ $(\delta_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ übereinstimmen.

Die exakte Homotopiesequenz des Faserbündels $SO(n+1) \rightarrow S^n$ mit Faser $SO(n)$ aus dem Beweis des Satzes 3.100 liefert

$$\underbrace{\pi_k(S^n)}_{=0} \longleftarrow \pi_k(SO(n+1)) \xleftarrow{\cong} \pi_k(SO(n)) \xleftarrow{\partial} \underbrace{\pi_{k+1}(S^n)}_{=0}$$

für $n > k+1$, und π_k ist hier verträglich mit dem Kolimes, so dass

$$\pi_k(SO) = \varinjlim \pi_k(SO(n)) \cong \pi_k(SO(k+2)).$$

Die Gruppe $SO(n)$ wirkt durch Drehungen auf $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Es sei $a \in \pi_k(SO(n))$, dann erhalten wir eine Abbildung

$$S^k \times S^{n-1} \xrightarrow{a \times \text{id}_{S^{n-1}}} SO(n) \times S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}.$$

Wir konstruieren daraus eine Abbildung von $S^{k+n} \subset \mathbb{R}^{k+1} \oplus \mathbb{R}^n$ nach $S^n \subset \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \|q\|^2 - \|p\|^2 \\ 2\|p\|^2 a\left(\frac{p}{\|p\|^2}\right) \cdot q \end{pmatrix}$$

falls $p \neq 0$.

Es bezeichne $J_k^n([a]) \in \pi_{k+n}(S^n)$ die zugehörige Homotopieklasse. Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_k(SO(n)) & \xrightarrow{J_k^n} & \pi_{k+n}(S^n) \\ \downarrow & & \downarrow S \\ \pi_k(SO(n+1)) & \xrightarrow{J_k^{n+1}} & \pi_{k+n+1}(S^{n+1}). \end{array}$$

Also erhalten wir den stabilen J -Homomorphismus als Kolimes

$$J_k = \varinjlim J_k^n : \varinjlim \pi_k(SO(n)) \longrightarrow \varinjlim \pi_{k+n}(S^n) = \pi_k^s(S^0),$$

und wegen Satz 3.42 (4) und der obigen Überlegung und gilt sogar $J_k = J_k^{k+2}$.

Für $k > 0$ liefert Bott-Periodizität Isomorphismen $\pi_{k+8n}(SO) \cong \pi_k(SO)$. Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über J_k für kleine k .

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\pi_k(SO)$	0	$\mathbb{Z}/2$	0	\mathbb{Z}	0	0	0	\mathbb{Z}	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	0	\mathbb{Z}
im J_k	0	$\mathbb{Z}/2$	0	$\mathbb{Z}/24$	0	0	0	$\mathbb{Z}/240$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	0	$\mathbb{Z}/504$
$\pi_k^s(S^0)$	\mathbb{Z}	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/24$	0	0	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/240$	$(\mathbb{Z}/2)^2$	$(\mathbb{Z}/2)^3$	$\mathbb{Z}/6$	$\mathbb{Z}/504$

Die Gruppe im J_{4n-1} hängt zusammen mit den Bernoulli-Zahlen: der Nenner von $B_{2n}/4n$ ist gerade # im J_{4n-1} .

3.k. Übungen zu Kapitel 3

Übungen zu Abschnitt 3.a.

3.104. ÜBUNG. Konstruieren Sie Homöomorphismen

- (1) $f: I^k/\partial I^k \rightarrow S^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$,
- (2) $g: (I^k/\partial I^k, \partial I^k/\partial I^k) \rightarrow (D^k, S^{k-1})$.

3.105. ÜBUNG. Es seien (X_i, x_i) für $i \in J$ punktierte Räume. Zeigen Sie:

- (1) der punktierte Raum

$$(X, x_0) = \left(\prod_{i \in J} X_i, (x_i)_{i \in J} \right)$$

mit den Projektionen $p_i: (X, x_0) \rightarrow (X_i, x_i)$ erfüllt die universelle Eigenschaft eines Produktes (aus Satz 1.53 (3)) in der Kategorie Top_+ ;

- (2) es gilt $\pi_k(X, x_0) \cong \prod_{i \in J} \pi_k(X_i, x_i)$, wobei die Abbildung $p_{i*} = \pi_k p_i$ der Projektion auf den Faktor $\pi_k(X_i, x_i)$ entspricht.
- (3) Sei $j \in J$, und sei $\iota_j: X_j \rightarrow X$ die Inklusion, die $y \in X_j$ auf $(y_i)_{i \in J}$ mit $y_j = y$ und $y_i = x_i$ für $i \neq j$ abbildet. Beschreiben Sie die Abbildung $\iota_{j*}: \pi_k(X_j, x_j) \rightarrow \pi_k(X, x_0)$.

3.106. ÜBUNG. Beweisen Sie Bemerkung 3.10.

Übungen zu Abschnitt 3.b.

3.107. ÜBUNG. Beweisen Sie Bemerkung 3.16.

3.108. ÜBUNG. Es sei (X, A) ein punktiertes Paar. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

- (1) Verkettung von Wegen definiert eine Abbildung $\rho: \pi_1(X, A) \times \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(X, A)$.
- (2) Für die konstante Abbildung c auf x_0 und $[\gamma] \in \pi_1(X)$ gilt $\rho([c], [\gamma]) = j_*[\gamma]$.
- (3) Die Abbildung ρ ist eine Gruppenwirkung (von rechts) und setzt die Wirkung von $\pi_1(A)$ aus Satz 3.19 fort.
- (4) Es gibt eine natürliche Bijektion $\pi_1(X, A)/\pi_1(X) \rightarrow \text{im } \partial \subset \pi_0(A)$.

3.109. ÜBUNG. Zeigen Sie für exakte Sequenzen von Gruppen:

- (1) Die Sequenz $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ ist genau dann bei A und B exakt, wenn f einen Isomorphismus $A \cong \ker g$ induziert.
- (2) Die Sequenz $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ ist genau dann bei B und C exakt, wenn g einen Isomorphismus $\text{coker } f \cong C$ induziert.

Was folgt für A und f in den exakten Sequenzen $0 \rightarrow A \rightarrow 0$ beziehungsweise $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$?

3.110. ÜBUNG. Beweisen Sie die Exaktheit der Sequenz aus Satz 3.19 an den fehlenden Stellen.

3.111. ÜBUNG. Beweisen Sie Lemma 3.20. Achten Sie darauf, keine zusätzlichen Voraussetzungen einzuführen.

3.112. ÜBUNG. Es seien $Z \subset Y \subset X$ Räume mit Basispunkt in Z . Wir betrachten

$$\partial: \pi_k(X, Y) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(Y) \rightarrow \pi_{k-1}(Y, Z)$$

als Verbindungshomomorphismus in der Sequenz

$$\cdots \leftarrow \pi_{k-1}(Y, Z) \xleftarrow{\partial} \pi_k(X, Y) \leftarrow \pi_k(X, Z) \leftarrow \pi_k(Y, Z) \xleftarrow{\partial} \pi_{k+1}(X, Y) \leftarrow \cdots,$$

wobei die unmarkierten Pfeile von Inklusion induziert werden.

- (1) Zeichnen Sie die obige Sequenz zusammen mit den exakten Sequenzen der Paare (X, Y) , (X, Z) und (Y, Z) so in ein kommutatives Diagramm, dass keine Homotopiegruppe zweimal erscheint.
- (2) Beweisen Sie Exaktheit der Sequenz, indem Sie nach Möglichkeit vom Diagramm aus (1) Gebrauch machen.

Übungen zu Abschnitt 3.c.

3.113. ÜBUNG. Konstruieren Sie den Homöomorphismus aus Bemerkung 3.23.

3.114. ÜBUNG. Im Folgenden bedeute Faserung entweder Serre- oder Hurewicz-Faserung. Zeigen Sie:

- (1) Sei $p: E \rightarrow B$ eine Faserung, und sei $f: A \rightarrow B$ stetig. Seien die Abbildungen $f^*p: f^*E \rightarrow A$ und $\bar{f}: f^*E \rightarrow E$ durch

$$f^*E = \{ (e, a) \in E \times A \mid p(e) = f(a) \in B \}, \quad (f^*p)(e, a) = a, \quad \bar{f}(e, a) = e$$

gegeben, dann ist f^*p wieder eine Faserung.

- (2) Die konstante Abbildung $F \rightarrow \text{pt}$ ist eine Faserung für alle F . Die Projektion $B \times F \rightarrow B$ ist eine Faserung für alle F und alle B .

(3) Seien $p: E \rightarrow B$ und $q: Y \rightarrow E$ Faserungen. Dann ist auch $p \circ q: Y \rightarrow B$ eine Faserung.

3.115. ÜBUNG. Es sei $p: E \rightarrow B$ eine stetige Abbildung. Wir definieren

$$Pp = \{ (e, \gamma) \in E \times C(I, B) \mid p(e) = \gamma(0) \},$$

dabei trage $C(I, B)$ die kompakt-offene Topologie und Pp die Unterraumtopologie. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

- (1) Die Abbildung p ist eine Hurewicz-Faserung.
- (2) Die Abbildung p hat die Homotopieliftungseigenschaft bezüglich des Raumes Pp und den Abbildungen

$$f = \pi_E: Pp \rightarrow E \quad \text{und} \quad h = \text{ev} \circ (\pi_{C(I, B)} \times \text{id}_I): Pp \times I \rightarrow B.$$

- (3) Die Abbildung $r: C(I, E) \rightarrow Pp$ mit $g \mapsto (g(0), p \circ g)$ hat ein stetiges Rechtsinverses s .

3.116. ÜBUNG. Es sei $p: E \rightarrow B$ eine punktierte Serre-Faserung mit Faser F . Zu jedem Punkt $f \in F$ und jeder Schleife γ in B am Basispunkt finden wir mit der Homotopieliftungseigenschaft 3.22 einen Weg $\bar{\gamma}_f: I \rightarrow E$ mit $\bar{\gamma}_f(0) = f$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

- (1) Wir erhalten eine wohldefinierte Abbildung $\rho: \pi_0(F) \times \pi_1(B) \rightarrow \pi_0(F)$ mit $\rho([f], [\gamma]) = [\bar{\gamma}_f(1)]$.
- (2) Für alle $[\gamma] \in \pi_1(B)$ gilt $\rho([e_0], [\gamma]) = \partial[\gamma]$.
- (3) Die Abbildung ρ ist eine Gruppenwirkung von rechts.
- (4) Es gibt eine natürliche Bijektion $\pi_0(F)/\pi_1(B) \rightarrow \text{im } i_* \subset \pi_0(E)$.

3.117. ÜBUNG. Eine *Retraktion* von einer Abbildung $p: E \rightarrow B$ zu einer Abbildung $q: D \rightarrow A$ ist ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccccc} D & \xrightarrow{I} & E & \xrightarrow{R} & D \\ q \downarrow & & p \downarrow & & q \downarrow \\ A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{r} & A, \end{array}$$

so dass $r \circ i = \text{id}_A$ und $R \circ I = \text{id}_E$. Man sagt auch, $q: D \rightarrow A$ ist ein *Retrakt* von $p: E \rightarrow B$.

Zeigen Sie: wenn p die Homotopieliftungseigenschaft für einen Raum X besitzt, dann gilt das auch für q . Insbesondere sind Retrakte von Serre- beziehungsweise Hurewicz-Faserungen wieder von diesem Typ.

Übungen zu Abschnitt 3.d.

3.118. ÜBUNG. Es seien X, Y topologische Räume. Definiere den *Verbund* von X und Y als Quotienten

$$X * Y = (X \times Y \times I) / \sim,$$

wobei „ \sim “ erzeugt wird durch

$$(x, y, 0) \sim (x, y', 0) \quad \text{und} \quad (x, y, 1) \sim (x', y, 1) \quad \text{für alle } x, x' \in X \text{ und alle } y, y' \in Y.$$

Geben Sie Homöomorphismen $S^k * \text{pt} \cong D^{k+1}$ und $S^k * S^\ell \cong S^{k+\ell+1}$ für alle k, ℓ an.

3.119. ÜBUNG. Es seien $(X, x_0), (Y, y_0)$ punktierte Räume, und es sei $X * Y$ wie oben definiert. Wir identifizieren X, Y mit Unterräumen von $X * Y$ durch $x \mapsto [(x, y_0, 0)]$, $y \mapsto [(x_0, y, 1)]$ für alle $x \in X, y \in Y$, wählen als Basispunkt $[(x_0, y_0, \frac{1}{2})]$ und setzen $U = X * Y \setminus Y$ und $V = X * Y \setminus X$.

- (1) Zeigen Sie, dass $U, V, U \cap V$ jeweils zu X, Y und $X \times Y$ homotopieäquivalent sind.

(2) Bestimmen Sie die von den Inklusionen induzierten Abbildungen

$$\pi_k(U \cap V) \rightarrow \pi_k(U), \quad \pi_k(V) \rightarrow \pi_k(X * Y)$$

und die Gruppen $\pi_k(U, U \cap V)$.

(3) Die Räume X und Y seien p - beziehungsweise q -zusammenhängend. Wie hoch zusammenhängend ist dann $X * Y$?

Hinweis: Betrachten Sie die natürliche Abbildung zwischen den langen exakten Sequenz der Paare $(U, U \cap V) \rightarrow (X * Y, V)$ und benutzen Sie den Ausschneidungssatz.

Übungen zu Abschnitt 3.e.

3.120. ÜBUNG. Zeigen Sie: die Hintereinanderausführung von punktierten Abbildungen von S^n nach S^n macht die Gruppe $\pi_n(S^n)$ zu einem Ring isomorph zu \mathbb{Z} .

3.121. ÜBUNG. Beweisen Sie die folgenden Aussagen für alle $n \geq 1$.

(1) Betrachte $D^n \subset \mathbb{R}^n$. Es sei $f: D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $S^{n-1} \subset f^{-1}(S^{n-1})$ und $\deg f|_{\partial D^n} \neq 0$ gegeben, dann gilt $D^n \subset \text{im}(f)$.

(2) Es seien $f_1, \dots, f_n: I^n \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, so dass $f_i(x) < 0$ falls $x_i = 0$ und $f_i(x) > 0$ falls $x_i = 1$ für alle $i = 1, \dots, n$ und alle $x \in I^n$. Dann existiert ein $x_0 \in I^n$ mit $f_1(x_0) = \dots = f_n(x_0) = 0$.

3.122. ÜBUNG. Beweisen Sie Bemerkung 3.53.

3.123. ÜBUNG. Zeigen Sie: Die Abbildung $U(n) \rightarrow S^{2n-1}$ mit $g \mapsto ge_n \in S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ ist ein Faserbündel mit Faser $U(n-1)$.

Folgern Sie, dass $\pi_k(U(n)) \cong \pi_k(U(n-1))$ für $k < 2n-2$.

3.124. ÜBUNG. Zeigen Sie: Die Abbildung $O(n) \rightarrow S^{n-1}$ mit $g \mapsto ge_n \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Faserbündel mit Faser $O(n-1)$.

Folgern Sie, dass $\pi_k(O(n)) \cong \pi_k(O(n-1))$ und $\pi_k(SO(n)) \cong \pi_k(SO(n-1))$ für $k < n-2$.

Übungen zu Abschnitt 3.f.

3.125. ÜBUNG. Für topologische Räume $X, B, A \subset X$, und $f: A \rightarrow B$ stetig betrachten wir den *Pushout*

$$X \cup_f B = (X \sqcup B) / \sim,$$

wobei „ \sim “ erzeugt wird von $X \ni a \sim f(a) \in B$ für alle $a \in A$. Er erfüllt die universelle Eigenschaft aus Folgerung 1.86.

Es bezeichne \mathcal{Top}^A die Kategorie der „Räume unter A “ mit Objekten (C, g) mit $g: A \rightarrow C$ und Morphismen

$$\text{Hom}_{\mathcal{Top}^A}((B, f), (C, g)) = \{ h: B \rightarrow C \mid h \text{ stetig mit } h \circ f = g \}.$$

Es sei (X, A) fest. Zeigen Sie, dass $(B, f) \mapsto (X \cup_f B, B)$ einen Funktor von der Kategorie \mathcal{Top}^A in die Kategorie \mathcal{Pair} definiert.

3.126. ÜBUNG. Es sei $X = \{a, b\}$ versehen mit der Klumpentopologie und es sei

$$Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (S^n + e_1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

versehen mit der Unterraumtopologie, dabei bezeichne e_1 den ersten Einheitsvektor. Handelt es sich bei den Paaren $(X, \{a\})$ und $(Y, \{0\})$ jeweils um Kofaserungen?

3.127. ÜBUNG. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

- (1) Wenn (B, A) und (X, B) Kofaserungen sind, dann ist auch (X, A) Kofaserung.
- (2) Es sei (X, A) Kofaserung und Y beliebig, dann ist auch $(X \times Y, A \times Y)$ Kofaserung.
- (3) Ein Paar (X, A) sei Retrakt von (Y, B) , siehe Übung 3.116. Das heißt, es gebe Abbildungen $i: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ und $r: (Y, B) \rightarrow (X, A)$ mit $r \circ i = \text{id}_X$. Wenn (Y, B) eine Kofaserung ist, dann ist auch (X, A) eine Kofaserung.

3.128. ÜBUNG. Zeigen Sie: jede Kofaserung $i: A \rightarrow X$ ist eine Einbettung, siehe Definition 1.51. Zeigen Sie dazu, dass

$$\iota_1: A \cong A \times \{1\} \hookrightarrow Zi \quad \text{und} \quad \bar{\iota}_1: X \cong X \times \{1\} \hookrightarrow X \times I.$$

Einbettungen sind, und betrachten Sie das folgende Diagramm zu Bemerkung 3.58.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\iota_1} & Zi \\ i \downarrow & & \uparrow \bar{r} \\ X & \xrightarrow{\bar{\iota}_1} & X \times I \end{array}$$

3.129. ÜBUNG. Zeigen Sie: wenn X ein Hausdorff-Raum und (X, A) eine Kofaserung ist, dann ist $A \subset X$ abgeschlossen. Betrachten Sie dazu die stetigen Abbildungen

$$f: X \cong X \times \{1\} \hookrightarrow X \times I \quad \text{und} \quad g: X \cong X \times \{1\} \xrightarrow{r} Zi \hookrightarrow X \times I,$$

und zeigen Sie zunächst

$$A = \{x \in X \mid f(x) = (x, 1) = r(x, 1) = g(x) \in X \times I\}.$$

3.130. ÜBUNG. Es sei (X, A) eine abgeschlossene Kofaserung und $f: A \rightarrow B$ stetig.

- (1) Konstruieren Sie mit Hilfe der universellen Eigenschaften eine natürliche, stetige, bijektive Abbildung

$$(X \times I) \cup_{f \times \text{id}_I} (B \times I) \longrightarrow (X \cup_f B) \times I.$$

- (2) Zeigen Sie die Stetigkeit der Umkehrabbildung. *Hinweis:* Sie können dazu das Exponentengesetz 1.101 benutzen.
- (3) Zeigen Sie, dass $(X \cup_f B, B)$ wieder eine abgeschlossene Kofaserung ist.

3.131. ÜBUNG. Es sei $i: A \rightarrow X$ eine Kofaserung und eine Homotopieäquivalenz. Zeigen Sie:

- (1) Im Sinne von Definition 2.9 ist A ein starker Deformationsretrakt von X .
- (2) Es sei $p: E \rightarrow B$ eine Hurewicz-Faserung, und es seien $f: A \rightarrow E$ und $g: X \rightarrow B$ Abbildungen mit $p \circ f = g \circ i$:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & E \\ i \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

Dann gibt es eine Abbildung $h: X \rightarrow E$ mit $f = h \circ i$ und $g = p \circ h$.

3.132. ÜBUNG. Formulieren und beweisen Sie die Eckmann-Hilton-dualen Aussagen zur vorigen Aufgabe.

3.133. ÜBUNG. Betrachten Sie $A = \{a\} \subset X = \{a, b\}$ mit der Topologie $\mathcal{O}_X = \{\emptyset, A, X\}$, und zeigen Sie:

- (1) Das Paar (X, A) ist eine Kofaserung, $(X^2, A \times X \cup X \times A)$ jedoch nicht.
- (2) Geben Sie Abbildungen $u: X \rightarrow I$ und $h: X \times I \rightarrow X$ wie in Proposition 3.59 (1) an.

3.134. ÜBUNG. Beweisen Sie Bemerkung 3.67.

Übungen zu Abschnitt 3.g.

3.135. ÜBUNG. Es seien $(X_j)_{j \in J}$ und Y punktierte Räume. Konstruieren Sie eine natürliche bijektive, stetige Abbildung

$$\bigvee_{j \in J} (X_j \wedge Y) \longrightarrow \left(\bigvee_{j \in J} X_j \right) \wedge Y .$$

Zeigen Sie, dass diese Abbildung ein Homöomorphismus ist, wenn J endlich ist.

3.136. ÜBUNG. Es seien (X, A) , (Y, B) , $(A, \{x_0\})$ und $(B, \{y_0\})$ abgeschlossene Kofaserungen. Zeigen Sie, dass $(X, A) \wedge (Y, B)$ wieder eine gut punktierte, abgeschlossene Kofaserung ist.

3.137. ÜBUNG. Es sei (X, A) ein gutes Paar und $f: A \rightarrow B$ stetig. Konstruieren Sie mit Hilfe der universellen Eigenschaften eine natürliche, stetige, bijektive Abbildung

$$SX \cup_{Sf} SB \longrightarrow S(X \cup_f B) ,$$

und beweisen Sie die Stetigkeit der Umkehrabbildung.

Übungen zu Abschnitt 3.h.

3.138. ÜBUNG. Bestimmen Sie für die folgenden Sequenzen von Gruppen jeweils den Kolimes G und geben Sie auch die Abbildungen $g_k: G_k \rightarrow G$ an.

- (1) $\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 4} \dots$
- (2) $\mathbb{R} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot 4} \dots$
- (3) $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 4} \dots$

3.139. ÜBUNG. Zeigen Sie:

- (1) Die stabile Homotopiegruppe $\pi_3^s(S^2) \cong \pi_1^s(S^0)$ wird von der Hopf-Faserung $p: S^3 \rightarrow S^2$ erzeugt.
- (2) Es bezeichne $\iota: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^2$ die Inklusion mit $(z_0 : z_1) \mapsto (z_0 : z_1 : 0)$. Dann ist $\iota_*[p] = 0 \in \pi_3(\mathbb{C}P^2)$.
- (3) Es gilt dann auch $\iota_*[p] = 0 \in \pi_3^s(\mathbb{C}P^2)$.

3.140. ÜBUNG. (1) Zeigen Sie mit der stabilen Homotopiesequenz 3.82 für $(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^{n-1})$, dass $\pi_k^s(\mathbb{C}P^n) \cong \pi_k^s(\mathbb{C}P^{n-1})$ für alle $k < 2n - 1$.
(2) Bestimmen Sie $\pi_2^s(\mathbb{C}P^n)$ für alle $n \geq 2$.
(3) Bestimmen Sie $\pi_3^s(\mathbb{C}P^n)$ für alle $n \geq 2$.

Elementare Homotopietheorie

In diesem Abschnitt fassen wir einige Konstruktionen und Sätze zusammen, die uns später helfen, Homologie- und Kohomologietheorien homotopietheoretisch zu betrachten. Hierzu gehören zum einen abstrakte Konstruktionen aus der Kategorientheorie, sowie Kategorien mit Zusatzstrukturen, denen wir später in verschiedenen Zusammenhängen wieder begegnen.

Zum anderen betrachten wir die Unterkategorien $\mathcal{CW} \subset \mathit{kw}\mathcal{H} \subset \mathit{Top}$. Während CW-Komplexe vor allem homotopietheoretisch schöne Eigenschaften haben, zeichnen sich die kompakt erzeugten schwach-Hausdorff-Räume dadurch aus, dass mit Ihnen viele elementare topologische Konstruktionen möglich sind, und dabei nur sehr selten pathologisches Verhalten auftritt.

Schließlich führen wir Modellkategorien ein, um einen abstrakten Rahmen für Homotopietheorie zu haben, der sich beispielsweise auch in der algebraischen Geometrie einsetzen lässt. Im letzten Abschnitt lernen wir zwei Typen topologischer Sequenzen kennen, aus denen wir viele exakte Sequenzen ableiten können.

4.a. Adjungierte Funktoren, Limiten und Kolimiten

Wir lernen einige Grundbegriffe aus der abstrakten Kategorientheorie kennen. Hierzu zählen adjungierte Funktoren, Limiten und Kolimiten, siehe Folgerung 1.87. Im nächsten Abschnitt helfen uns diese Überlegungen, einige Eigenschaften der Kategorie der kompakt erzeugten schwachen Hausdorff-Räume leichter zu verstehen. Außerdem brauchen wir Limiten und Kolimiten auch im Zusammenhang mit Modellkategorien.

4.1. DEFINITION. Es seien \mathcal{C} und \mathcal{D} Kategorien und $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $\mathcal{G}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ Funktoren. Dann heißt \mathcal{F} *linkadjungiert* zu \mathcal{G} , \mathcal{G} *rechtsadjungiert* zu \mathcal{F} oder einfach \mathcal{F} und \mathcal{G} zueinander *adjungiert*, wenn es für alle Objekte X von \mathcal{C} und Y von \mathcal{D} einen natürlichen Isomorphismus

$$\Phi_{X,Y}: \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{G}Y)$$

gibt. Man spricht auch von einer *Adjunktion* und schreibt kurz $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : \mathcal{G}$ oder $\mathcal{F} \dashv \mathcal{G}$.

Man beachte, dass es auf die Reihenfolge der Funktoren ankommt. Wenn \mathcal{F} und \mathcal{G} zueinander adjungiert sind, bedeutet das nicht, dass auch \mathcal{G} und \mathcal{F} zueinander adjungiert sind.

4.2. BEMERKUNG. Natürlichkeit bedeutet hier, dass für alle $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', X)$ und alle $g \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Y')$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}X, Y) & \xrightarrow{\Phi_{X,Y}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{G}Y) \\ g \circ \circ \mathcal{F}f \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}g \circ \circ f \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}X', Y') & \xrightarrow{\Phi_{X',Y'}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', \mathcal{G}Y') . \end{array}$$

Die Funktoren \mathcal{F} und \mathcal{G} sind im Allgemeinen nicht invers zueinander. Aber es gibt immerhin zwei wichtige natürliche Transformationen, die *Einheit* $\varepsilon: \mathcal{F} \circ \mathcal{G} \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$ und die *Koeinheit* $\eta: \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$, gegeben durch

$$\varepsilon_Y = \Phi_{\mathcal{G}Y, Y}^{-1}(\text{id}_{\mathcal{G}Y}) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}\mathcal{G}Y, Y) \quad \text{und} \quad \eta_X = \Phi_{X, \mathcal{F}X}(\text{id}_{\mathcal{F}X}) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{G}\mathcal{F}X) .$$

Die Existenz der natürlichen Bijektionen $\Phi_{X,Y}$ oben ist äquivalent dazu, dass für alle Objekte X von \mathcal{C} und Y von \mathcal{D} gilt:

$$\text{id}_{\mathcal{F}X} = \varepsilon_{\mathcal{F}X} \circ \mathcal{F}\eta_X \quad \text{und} \quad \text{id}_{\mathcal{G}Y} = \mathcal{G}\varepsilon_Y \circ \eta_{\mathcal{G}Y} ,$$

siehe Übung 4.74 und Bemerkung 4.28.

4.3. BEISPIEL. Um zu zeigen, wie häufig adjungierte Funktoren sind, geben wir zwei möglichst unterschiedliche Beispiele.

(1) In der Kategorie Set gilt das *Exponentialgesetz*.

$$\text{Hom}_{\text{Set}}(X \times Y, Z) \cong \text{Hom}_{\text{Set}}(X, \text{Hom}_{\text{Set}}(Y, Z))$$

für alle Mengen X, Y, Z , somit $\cdot \times Y \dashv \text{Hom}_{\text{Set}}(Y, \cdot)$. In Top gilt es nach Satz 1.101 (2), falls Y lokalkompakt ist. Als Spezialfall erhalten wir die Adjunktion $S \dashv \Omega$ auf Top_+ .

(2) Es sei B eine Menge und V ein \mathbb{k} -Vektorraum. Bezeichne $\langle B \rangle_{\mathbb{k}}$ den von B frei erzeugten Vektorraum und $|V|$ die Menge der Vektoren von V , dann gilt

$$\text{Hom}_{\text{Vec}_{\mathbb{k}}}(\langle B \rangle_{\mathbb{k}}, V) \cong \text{Hom}_{\text{Set}}(B, |V|) .$$

Hierbei wird eine Abbildung f abgebildet auf die lineare Abbildung

$$\sum_{b \in B} a_b b \longmapsto \sum_{b \in B} a_b f(b) .$$

Hier ist das „freie Erzeugnis“ linkadjungiert zu einem „vergesslichen Funktor“. Ähnliche Adjunktionen gibt es zwischen Set und $\mathcal{G}rp$ sowie zwischen Set und $\mathcal{A}b$.

Als nächstes werden wir den Begriff des Kolimes (direkten Limes) aus Folgerung 1.87 stark verallgemeinern und den dazu dualen Begriff des (inversen) Limes kennenlernen.

4.4. DEFINITION. Ein *Diagramm* ist eine kleine Kategorie, das heißt, eine Kategorie, deren Objekte eine Menge bilden. Eine Kategorie mit endlich vielen Objekten, deren Morphismen von endlich vielen erzeugt werden, heißt entsprechend *endliches Diagramm*.

Sei \mathcal{I} ein Diagramm und \mathcal{C} eine Kategorie, dann ist ein Diagramm vom Typ \mathcal{I} in \mathcal{C} ein Funktor $\mathcal{X}: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$.

Sei C ein Objekt von \mathcal{C} , dann ist das diagonale Diagramm Δ_C vom Typ \mathcal{I} in \mathcal{C} der konstante Funktor, der alle Objekte von \mathcal{I} auf C und alle Morphismen in \mathcal{I} auf id_C abbildet.

4.5. BEISPIEL. Es sei \mathcal{N} eine Kategorie mit einem Objekt $*$ und einem Morphismen $f: * \rightarrow *$, so dass $f^n \neq f^m$ für alle $n > m \geq 0$. Dann gibt es unendlich viele Morphismen; dennoch sprechen wir von einem endlichen Diagramm, da $F = \{f\}$ alle Morphismen erzeugt.

4.6. BEMERKUNG. Die Diagramme vom Typ \mathcal{I} in \mathcal{C} bilden selbst eine Kategorie $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$, dabei ist ein Morphismus in $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ gerade eine natürliche Transformation $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$.

Wir können die Zuordnung $C \mapsto \Delta_C$ als Funktor $\Delta: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ auffassen, denn ein Morphismus $f: C \rightarrow D$ liefert eine natürliche Transformation $\Delta_f: \Delta_C \rightarrow \Delta_D$. Wir nennen ihn den *Diagonalfunktor*.

4.7. DEFINITION. Es sei \mathcal{I} ein Diagramm und $\mathcal{X}: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor. Dann hat \mathcal{X} einen *Limes*, wenn es ein Objekt $\lim \mathcal{X}$ von \mathcal{C} und eine in \mathcal{C} natürliche Bijektion

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{I}}}(\Delta_C, \mathcal{X}) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \lim \mathcal{X})$$

für alle Objekte C von \mathcal{C} gibt. Eine Kategorie \mathcal{C} hat *alle \mathcal{I} -Limiten*, wenn der Diagonalfunktor linksadjungiert zu einem Funktor $\lim: \mathcal{C}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{C}$ ist. Sie hat *alle Limiten*, wenn sie \mathcal{I} -Limiten für alle Diagramme besitzt, und *alle endlichen Limiten*, wenn sie \mathcal{I} -Limiten nur für alle endlichen Diagramme besitzt.

Der Funktor $\mathcal{X}: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ hat einen *Kolimes*, wenn es ein Objekt $\text{colim } \mathcal{X}$ von \mathcal{C} und eine natürliche Bijektion

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{I}}}(\mathcal{X}, \Delta_C) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{colim } \mathcal{X}, C)$$

für alle Objekte C von \mathcal{C} gibt. Die Kategorie \mathcal{C} hat *alle \mathcal{I} -Kolimiten*, wenn der Diagonalfunktor rechtsadjungiert zu einem Funktor $\text{colim}: \mathcal{C}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{C}$ ist. Analog definieren wir, wann \mathcal{C} *alle Kolimiten* oder *alle endlichen Kolimiten* hat.

Eine Kategorie heißt *vollständig*, wenn sie alle Limiten hat, *kovollständig*, wenn sie alle Kolimiten hat, und *bivollständig*, wenn beides gilt.

Tatsächlich haben die meisten Kategorien, für die wir uns interessieren, alle Limiten und Kolimiten. In diesem Fall können wir \lim und colim als rechts- beziehungsweise linksadjungierten Funktor zum Diagonalfunktor definieren. Wir wollen uns aber die Möglichkeit offenhalten, auch dann über einzelne \mathcal{I} -Limiten oder \mathcal{I} -Kolimiten zu sprechen, wenn nicht alle existieren; daher jeweils die etwas explizitere Definition am Anfang.

4.8. BEMERKUNG. Limiten und Kolimiten erfüllen universelle Eigenschaften, falls sie existieren. Dadurch sind sie wie immer bis auf eindeutige Isomorphismen eindeutig bestimmt, und wir dürfen salopp von „dem“ Limes und „dem“ Kolimes reden. Tatsächlich sind viele der kategoriellen Konstruktionen, die wir anhand von universellen Eigenschaften definiert haben, Beispiele von Limiten oder Kolimiten; mehr dazu gleich.

Wir wollen anhand eines konkreten Beispiels verstehen, was die obige Definition bedeutet. Dazu betrachten wir die endliche Kategorie \mathcal{I} mit drei Objekten und zwei nichttrivialen Morphismen der Form

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet . \quad (\text{a})$$

Ein Diagramm \mathcal{X} vom Typ \mathcal{I} in \mathcal{C} ist nichts anderes als ein Diagramm der obigen Form aus Objekten und Morphismen in \mathcal{C} . Eine natürliche Transformation vom Diagonalfunktor Δ_D für ein Objekt D von \mathcal{C} nach \mathcal{X} ist somit ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccc} D & & \\ & \searrow^b & \\ & & B \\ & \searrow^a & \downarrow g \\ & & A \longrightarrow C \end{array} . \quad (\text{b})$$

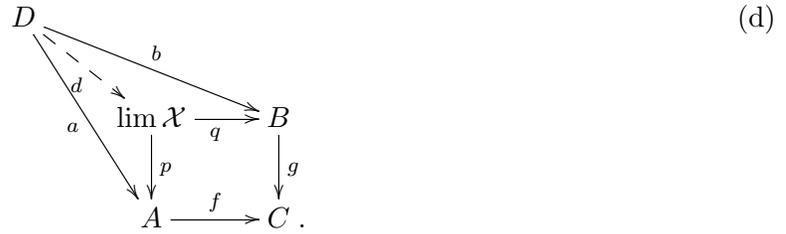
Den offensichtlichen Morphismus $f \circ a = g \circ b: D \rightarrow C$ haben wir der Übersicht halber weggelassen.

Der Identität $\text{id}_{\lim \mathcal{X}}$ entspricht insbesondere ein Morphismus $\Delta_{\lim \mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$, also erhalten wir ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccc} \lim \mathcal{X} & \xrightarrow{q} & B \\ \downarrow p & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array} . \quad (\text{c})$$

Da sich \lim zu Δ für ein festes \mathcal{X} wie ein rechtsadjungiert Funktor verhält, gibt es zu jedem Diagramm \mathcal{X} vom Typ \mathcal{I} wie in (a) und für alle D und a, b wie in (b) genau eine Abbildung $d: D \rightarrow$

$\lim \mathcal{X}$ wie im Diagramm



Das Diagramm kommutiert, falls wir zeigen können, dass $a = p \circ d$ und $b = q \circ d$. Aber das folgt aus der Natürlichkeit der Bijektionen $\Phi_{\cdot, \mathcal{X}}$ in der Definition. Dazu betrachte

$$\begin{array}{ccc} (p, q) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^I}(\Delta_{\lim \mathcal{X}}, \mathcal{X}) & \xrightarrow{\Phi_{\lim \mathcal{X}, \mathcal{X}}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\lim \mathcal{X}, \lim \mathcal{X}) \ni \text{id}_{\lim \mathcal{X}} \\ \cdot \circ \Delta_d \downarrow & & \cdot \circ d \downarrow \\ (a, b) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^I}(\Delta_D, \mathcal{X}) & \xrightarrow{\Phi_{D, \mathcal{X}}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(D, \lim \mathcal{X}) \ni d. \end{array}$$

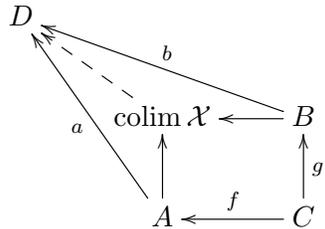
Die obere Zeile entspricht dem Diagramm (c), die untere (d), und rechts gilt offensichtlich $\text{id}_{\lim \mathcal{X}} \circ d = d$. Aufgrund der Natürlichkeit erhalten wir auf der linken Seite die gesuchte Gleichheit. Die Abbildung d ist auch eindeutig: gäbe es links eine andere Abbildung e mit $p \circ e = a$ und $q \circ e = b$, dann wäre rechts $\text{id}_{\lim \mathcal{X}} \circ e = d$, was natürlich nicht sein kann.

Also erfüllt $\lim \mathcal{X}$ genau die universelle Eigenschaft des Pullback. Das heißt, der Pullback ist ein Spezialfall eines endlichen Limes. Wenn alle Pullbacks in \mathcal{C} existieren, ist der Pullback zu Δ rechtsadjungiert.

Indem wir alle Pfeile umdrehen, erhalten wir völlig analog, dass der Kolimes zum Diagramm



die universelle Eigenschaft eines Pushouts erfüllt.



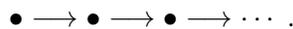
Alle anderen Limiten und Kolimiten erfüllen analoge universelle Eigenschaften, die genauso bewiesen werden.

4.9. BEISPIEL. Wir geben einige bekannte Beispiele für diese Konstruktionen.

- (1) Sei \mathcal{I} eine Menge I von Objekten, und die einzigen Morphismen seien die Identitäten dieser Objekte. Ein Funktor $\mathcal{X}: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ist also eine durch I indizierte Familie, und ihr Limes in \mathcal{C} ist ihr Produkt, falls er existiert. Falls $I = \emptyset$, erhalten wir das terminale Objekt von \mathcal{C} .
- (2) Analog ist der Kolimes von \mathcal{X} das Koproduct der obigen Familie, falls er existiert. Falls $I = \emptyset$, erhalten wir das initiale Objekt von \mathcal{C} .
- (3) Bisher haben wir den Begriff des (inversen) Limes für den Spezialfall zum folgenden Diagramm verwendet:



- (4) Analog haben wir den Begriff des Kolimes oder direkten Limes für folgenden Spezialfall verwendet:



Wir werden auch in Zukunft die Konstruktionen aus (3) und (4) mit Limes und Kolimes bezeichnen, solange keine Verwechslungsgefahr besteht.

4.10. PROPOSITION. *Jeder (endliche) Limes ist ein Pullback von (endlichen) Produkten. Jeder (endliche) Kolimes ist ein Pushout von (endlichen) Koproducten.*

Insbesondere hat eine Kategorie \mathcal{C} genau dann alle (endlichen) Limiten, wenn alle (endlichen) Produkte und alle Pullbacks existieren. Sie hat genau dann alle (endlichen) Kolimiten, wenn alle (endlichen) Koproducte und alle Pushouts existieren.

BEWEIS. Für die erste Aussage schreiben wir $f: D_f \rightarrow Z_f$ für alle f aus einer Menge F von Morphismen, die alle Morphismen von \mathcal{I} erzeugt. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \lim \mathcal{X} & \xrightarrow{(p_I)_{I \in \mathcal{I}}} & \prod_I \mathcal{X}(I) \\ (p_{Z_f})_{f \in F} \downarrow & & \downarrow (\mathcal{X}(f) \circ \pi_{D_f}, \pi_{Z_f})_{f \in F} \\ \prod_f \mathcal{X}(Z_f) & \xrightarrow{\Delta} & \prod_f \mathcal{X}(Z_f) \times \prod_f \mathcal{X}(Z_f) . \end{array}$$

Hierbei geht das Produkt in der oberen Zeile über alle Objekte I von \mathcal{I} , und die Produkte in der unteren Reihe jeweils über alle $f \in F$. Ist \mathcal{I} endlich, so sind es auch alle obigen Produkte. Für jeden Morphismus $f \in F$ ist die f -Komponente des rechten Pfeils das Paar aus der Verkettung $\mathcal{X}(f) \circ \pi_{D_f}$ und der Projektion π_{Z_f} . Der untere Pfeil besteht aus den Diagonalabbildungen $Z_f \rightarrow Z_f \times Z_f$.

Der obige Pullback ist genau der Limes. Denn sei $(p_I)_{I \in \mathcal{I}}$ der obere Pfeil, dann kommutiert das Diagramm genau dann, wenn $\mathcal{X}(f) \circ p_{D_f} = p_{Z_f}$ für alle $f \in F$ gilt, und diese Abbildung ist dann die f -Komponente des linken Pfeils. Und analog entspricht jede Abbildung $C \rightarrow \lim \mathcal{X}$ genau einer Familie von Abbildungen $C \rightarrow \mathcal{X}(I)$ für alle $I \in \mathcal{I}$, die mit den $f \in F$ verträglich sind.

Völlig analog lässt sich jeder Kolimes als Pushout von Koproducten darstellen. \square

4.11. BEISPIEL. Die folgenden Kategorien sind somit bivollständig:

$$\text{Set}, \quad \text{Set}_+, \quad \text{Grp}, \quad \text{Ab}, \quad \text{Vec}_{\mathbb{k}}, \quad \text{Top}, \quad \text{Top}_+ .$$

Das Koproduct und den Pushout von Gruppen haben wir in Abschnitt 2.d kennengelernt.

4.12. DEFINITION. Ein Funktor $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ heißt *stetig*, wenn für alle Diagramme $\mathcal{X}: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$, die einen Limes in \mathcal{C} besitzen, auch $\mathcal{F} \circ \mathcal{X}$ einen Limes besitzt, nämlich $\lim(\mathcal{F} \circ \mathcal{X}) = \mathcal{F}(\lim \mathcal{X})$.

Ein Funktor $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ heißt *kostetig*, wenn für alle Diagramme $\mathcal{X}: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$, die einen Kolimes in \mathcal{C} besitzen, auch $\mathcal{F} \circ \mathcal{X}$ einen Kolimes besitzt, nämlich $\text{colim}(\mathcal{F} \circ \mathcal{X}) = \mathcal{F}(\text{colim} \mathcal{X})$.

Die Begriffe „(ko-) vollständig“ und „(ko-)stetig“ sind in einer recht oberflächlichen Analogie zur Topologie metrischer Räume gewählt. Aufgrund von Proposition 4.10 reicht es, für Stetigkeit nur Produkte und Pullbacks, und für Kostetigkeit nur Koproducte und Pushouts zu betrachten.

4.13. BEISPIEL. Die Fundamentalgruppe ist verträglich mit dem Produkt punktierter Räume. Nach dem Satz 2.39 von Seifert-van Kampen ist sie unter gewissen Voraussetzungen verträglich mit Koproducten und Pushouts, jedoch keinesfalls immer, siehe Beispiel 2.41.

4.14. LEMMA. *Es seien \mathcal{C} und \mathcal{D} Kategorien, und $\mathcal{F}: \mathcal{D} \rightleftarrows \mathcal{C}: \mathcal{G}$ zueinander adjungierte Funktoren. Dann ist \mathcal{G} stetig und \mathcal{F} kostetig.*

Unter gewissen Zusatzvoraussetzungen gibt es umgekehrt zu einem stetigen Funktor einen linksadjungierten Funktor, und zu einem kostetigen Funktor einen rechtsadjungierten Funktor. Also ist das obige Lemma oft die Methode der Wahl, um Stetigkeit oder Kostetigkeit zu zeigen.

BEWEIS. Der Beweis ist rein formal. Zunächst überlegt man sich, dass

$$\Delta_{\mathcal{G}C} = \mathcal{G} \circ \Delta_C \quad \text{und} \quad \Delta_{\mathcal{F}D} = \mathcal{F} \circ \Delta_D .$$

Außerdem induzieren \mathcal{F} und \mathcal{G} aufgrund der Natürlichkeit der Adjunktion auch adjungierte Funktoren $\mathcal{F}: \mathcal{D}^{\mathcal{I}} \rightleftarrows \mathcal{C}^{\mathcal{I}}: \mathcal{G}$. Für $\mathcal{X}: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ schreibt man

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(D, \mathcal{G}(\lim \mathcal{X})) &= \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}D, \lim \mathcal{X}) = \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{I}}}(\Delta_{\mathcal{F}D}, \mathcal{X}) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{I}}}(\mathcal{F} \circ \Delta_D, \mathcal{X}) = \text{Hom}_{\mathcal{D}^{\mathcal{I}}}(\Delta_D, \mathcal{G} \circ \mathcal{X}) . \end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{G}(\lim \mathcal{X})$ der Limes von $\mathcal{G} \circ \mathcal{X}$.

Analog gilt für $\mathcal{X}: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}$, dass

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(\text{colim } \mathcal{X}), C) &= \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{colim } \mathcal{X}, \mathcal{G}C) = \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{I}}}(\mathcal{X}, \Delta_{\mathcal{G}C}) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{I}}}(\mathcal{X}, \mathcal{G} \circ \Delta_C) = \text{Hom}_{\mathcal{D}^{\mathcal{I}}}(\mathcal{F} \circ \mathcal{X}, \Delta_C) . \quad \square \end{aligned}$$

4.15. BEISPIEL. Wir betrachten das adjungierte Paar $\langle \cdot \rangle_{\mathbb{k}}: \text{Set} \rightleftarrows \text{Vec}_{\mathbb{k}}: |\cdot|$ aus Beispiel 4.3 (2).

(1) Das freie Erzeugnis verträgt sich mit Kolimiten, beispielsweise gilt

$$\left\langle \coprod_{i \in I} M_i \right\rangle_{\mathbb{k}} \cong \bigoplus_{i \in I} \langle M_i \rangle_{\mathbb{k}} .$$

Mit allgemeinen Limiten ist $\langle \cdot \rangle_{\mathbb{k}}$ jedoch nicht verträglich, zum Beispiel gilt

$$\langle M_1 \times M_2 \rangle_{\mathbb{k}} \cong \langle M_1 \rangle_{\mathbb{k}} \otimes \langle M_2 \rangle_{\mathbb{k}} ,$$

und das Tensorprodukt ist nicht das kategorielle Produkt. Auf der anderen Seite lässt sich für ein unendliches Produkt von Vektorräumen nicht so einfach eine Basis angeben.

(2) Der vergessliche Funktor $|\cdot|$ vertauscht mit Limiten. Das erklärt, warum das kategorielle Produkt von beliebig vielen Vektorräumen durch das kartesische Produkt realisiert wird. Andererseits liegt dem Koprodukt nicht das Koprodukt der zugrundeliegenden Mengen zugrunde.

Analoge Überlegungen gelten selbstverständlich auch für die Kategorien Grp , Ab und Mod_R . Man beachte beispielsweise, dass das Produkt freier Gruppen im Allgemeinen nicht wieder frei ist.

4.b. Eine angenehme Kategorie topologischer Räume

In der Kategorie Top aller topologischer Räume gibt es einige „Pathologien“. Beispielsweise ist nicht jede Kofaserung abgeschlossen, das Exponentialgesetz 1.101 (3) gilt nur unter Zusatzvoraussetzungen, und Produkte von CW-Komplexen sind nicht automatisch selbst CW-Komplexe. Wir betrachten hier die Kategorie $\text{kw}\mathcal{H}$ der kompakt erzeugten schwach-Hausdorff-Räume, die diese Probleme nicht hat; mehr zu dieser Kategorie findet sich in [St]. Um das Exponentialgesetz zu beweisen und besser zu verstehen, führen wir in Abschnitt 4.c den Begriff einer abgeschlossenen monoidalen Kategorie ein.

Wir betrachten eine sogenannte *volle Unterkategorie* $\text{kw}\mathcal{H}$ der Kategorie Top , das heißt, unsere Kategorie enthält eine gewisse Auswahl der Objekte von Top , aber für je zwei Objekten X, Y von $\text{kw}\mathcal{H}$ gilt

$$\text{Hom}_{\text{kw}\mathcal{H}}(X, Y) = \text{Hom}_{\text{Top}}(X, Y) ,$$

es sind also nach wie vor genau die stetigen Abbildungen als Morphismen erlaubt. Die Definition von $\text{kw}\mathcal{H}$ erfolgt, indem wir mit stetigen Abbildungen $f: K \rightarrow X$ von Kompakta nach X gewisse Eigenschaften „testen“. Dabei erinnern wir uns, dass bei uns alle kompakten Räume gemäß Definition 1.58 als Hausdorff vorausgesetzt sind.

4.16. DEFINITION. Es sei X ein topologischer Raum.

- (1) Wir nennen X *kompakt erzeugt*, wenn eine Teilmenge $U \subset X$ offen ist, falls $f^{-1}(U) \subset K$ für alle kompakten Räume K und alle stetigen $f: K \rightarrow X$ offen ist.
- (2) Wir nennen X *schwach Hausdorff*, wenn $f \subset X$ abgeschlossen ist für alle Kompakta K und alle stetigen Abbildungen $f: K \rightarrow X$.
- (3) Es bezeichne $kw\mathcal{H} \subset \mathcal{Top}$ die volle Unterkategorie der kompakt erzeugten schwach-Hausdorff-Räume.

Nach Bemerkung 1.59 (2) und (5) ist jeder Hausdorff-Raum schwach Hausdorff, und da pt kompakt ist, erfüllt jeder schwache Hausdorff-Raum das erste Trennungsaxiom (T1). Ohne Beweis geben wir einige Klassen von Beispielen an.

4.17. PROPOSITION. *Die Kategorie $kw\mathcal{H}$ enthält*

- (1) *alle Hausdorff-Räume, die das Abzählbarkeitsaxiom (A1) erfüllen,*
- (2) *alle metrischen oder metrisierbaren Räume,*
- (3) *alle topologischen Mannigfaltigkeiten, und*
- (4) *alle CW-Komplexe.*

Es sei X ein beliebiger topologischer Raum, dann bezeichne kX die gleiche Menge mit der *kompakt erzeugten Topologie*

$$\{U \subset X \mid f^{-1}(U) \subset K \text{ offen für alle Kompakta } K \text{ und alle stetigen } f: K \rightarrow X\}.$$

Wir nennen offene Mengen in kX auch *k-offen*. Jede offene Menge ist also auch *k-offen*: $\mathcal{O}_X \subset \mathcal{O}_{kX}$.

4.18. PROPOSITION. *Die Zuordnung k ist ein Funktor von der Kategorie \mathcal{Top} in die Kategorie $k\mathcal{Top}$ der kompakt erzeugten Räume. Er ist rechtsadjungiert zur Inklusion $k\mathcal{Top} \hookrightarrow \mathcal{Top}$.*

Wir verschieben den Beweis in die Übungen 4.80 und 4.81.

4.19. FOLGERUNG. *Sei $\mathcal{F}: \mathcal{I} \rightarrow k\mathcal{Top}$ ein Diagramm. Dann gilt*

$$\lim^{k\mathcal{Top}} \mathcal{F} = k \lim^{\mathcal{Top}} \mathcal{F} \tag{1}$$

$$\operatorname{colim}^{k\mathcal{Top}} \mathcal{F} = \operatorname{colim}^{\mathcal{Top}} \mathcal{F}. \tag{2}$$

Inbesondere ist die Kategorie $k\mathcal{Top}$ bivollständig, und der Funktor k ist stetig.

BEWEIS. Die erste Aussage folgt aus den Lemma 4.14 und 4.18. Für die zweite Aussage reicht es zu zeigen, dass $\operatorname{colim}^{\mathcal{Top}} \mathcal{F}$ kompakt erzeugt ist, denn universelle Eigenschaften lassen sich immer in volle Unterkategorien übertragen. Nach Proposition 4.10 reicht es, Koprodukte und Pushouts, also Quotienten von Koprodukten, zu betrachten.

Die Topologie auf $X = \coprod_{i \in I} X_i$ ist die feinste Topologie, für die alle Inklusionen $X_j \rightarrow X$ stetig sind. Aber dann sind auch die Abbildungen $X_j = kX_j \rightarrow kX$ stetig, und da die kompakte erzeugte Topologie feiner ist, folgt, dass X bereits kompakt erzeugt ist. Analog geht der Beweis für Quotienten. \square

Aus Lemma 4.14 folgt übrigens auch, dass der Kolimes in $k\mathcal{Top}$, falls es ihn gibt, der gleiche sein muss wie in \mathcal{Top} . Aber im Gegensatz zum Limes mussten wir zeigen, dass er existiert.

Die Hausdorff-Eigenschaft lässt sich wie folgt umformulieren: Ein Raum X ist genau dann Hausdorff, wenn $\Delta X \subset X \times X$ abgeschlossen ist, siehe Übung 1.136. Diese Idee übertragen wir auf kompakt erzeugte Räume.

4.20. PROPOSITION. *Es sei X kompakt erzeugt. Dann ist X schwach Hausdorff genau dann, wenn $\Delta X \subset k(X \times X)$ abgeschlossen ist.*

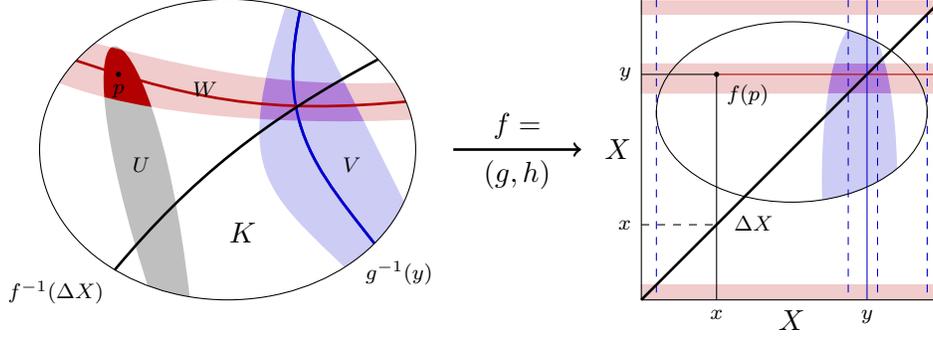


ABBILDUNG 4.1. Für X in $kw\mathcal{H}$ ist $\Delta X \subset k(X \times X)$ abgeschlossen.

BEWEIS. Sei zunächst X kompakt erzeugt und $\Delta X \subset k(X \times X)$ abgeschlossen. Sei K kompakt und $f: K \rightarrow X$ beliebig. Zu zeigen ist für alle kompakten L und alle $g: L \rightarrow X$, dass $g^{-1}(\text{im } f) \subset L$ abgeschlossen ist. Nach Voraussetzung ist die Menge

$$\{ (p, q) \in K \times L \mid f(p) = g(q) \} = (f \times g)^{-1}(\Delta X) \subset K \times L$$

abgeschlossen, also auch kompakt. Ihr Bild unter der Projektion auf L ist dann ebenfalls abgeschlossen. Aber dieses Bild ist gerade $g^{-1}(\text{im } f)$. Also ist X schwach Hausdorff.

Sei jetzt X kompakt erzeugt und schwach Hausdorff. Zu zeigen ist für jedes Kompaktum K und jede Abbildung $f = (g, h): K \rightarrow X \times X$, dass das Urbild von ΔX abgeschlossen ist. Sei $p \in K \setminus f^{-1}(\Delta X)$, so dass $x = g(p) \neq y = h(p)$. Als einpunktige Menge ist $\{y\} \subset X$ kompakt, also abgeschlossen. Also haben wir disjunkte abgeschlossene Teilmengen $\{p\}$ und $g^{-1}(y) \subset K$.

Da K normal ist, finden wir offene, disjunkte Umgebungen U von p und $V \subset K$ von $g^{-1}(y)$. Dann ist $K \setminus V$ kompakt, somit ist $g(K \setminus V)$ abgeschlossen in X und $W = K \setminus h^{-1}(g(K \setminus V))$ offen in K . Es gilt $p \in W$, da $y = h(p) \in g(V)$. Außerdem gilt $U \cap W \cap f^{-1}(\Delta X) = \emptyset$, dazu sei $q \in U \cap W$. Aus $q \in U$ folgt $q \in K \setminus V$ und somit $g(q) \in g(K \setminus V)$. Aus $q \in W$ folgt andererseits $h(q) \notin g(K \setminus V)$, somit $f(q) = (g(q), h(q)) \notin \Delta X$. Also finden wir für $p \notin f^{-1}(\Delta X)$ eine Umgebung $U \cap W$ in $K \setminus f^{-1}(\Delta X)$, somit ist ΔX eine k -abgeschlossene Menge in $X \times X$. \square

Wir können eine Äquivalenzrelation „ \sim “ auf einem Raum X als eine Teilmenge

$$R_{\sim} = \{ (x, y) \mid x \sim y \} \subset X \times X$$

mit $\Delta_X \subset R_{\sim}$ schreiben, dann gilt zum Beispiel $R_{=} = \Delta_X$.

4.21. PROPOSITION. *Es sei X ein kompakt erzeugter Raum und „ \sim “ eine Äquivalenzrelation auf X . Dann ist X/\sim genau dann ein kompakt erzeugter schwach-Hausdorff-Raum, wenn $R_{\sim} \subset k(X \times X)$ abgeschlossen ist.*

Wir verschieben diesen Beweis auf später. Die Schwierigkeit besteht darin, zu zeigen, dass das Bild $\Delta_{X/\sim}$ von R_{\sim} in $k((X/\sim) \times (X/\sim))$ wieder abgeschlossen ist.

Wir betrachten jetzt alle Äquivalenzrelationen, die durch k -abgeschlossene Teilmengen dargestellt werden. Da der Durchschnitt über eine Menge solcher Teilmengen wieder eine Äquivalenzrelation darstellt, gibt es eine minimale k -abgeschlossene Äquivalenzrelation „ \approx “. Wir betrachten den Raum $hX = X/\approx$ mit der Quotiententopologie.

4.22. PROPOSITION. *Die Zuordnung $X \mapsto hX$ ist ein Funktor $k\text{Top} \rightarrow kw\mathcal{H}$. Er ist linksadjungiert zur Inklusion $kw\mathcal{H} \hookrightarrow k\text{Top}$.*

BEWEIS. Nach Proposition 4.21 ist X/\approx ein kompakt erzeugter schwach-Hausdorff-Raum.

Sei jetzt Y ein kompakt erzeugter schwach-Hausdorff-Raum und $f: X \rightarrow Y$ stetig, dann ist auch $f \times f: k(X \times X) \rightarrow k(Y \times Y)$ stetig, somit ist das Urbild von Δ_Y in $k(X \times X)$ abgeschlossen und damit gröber als R_{\approx_X} . Das heißt, f induziert eine Abbildung $hX \rightarrow Y$, die nach der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie auch stetig ist. Hieraus folgt sowohl, dass h ein Funktor ist, als auch, dass er linksadjungiert zur Inklusion $kw\mathcal{H} \hookrightarrow k\mathcal{Top}$ ist. \square

4.23. FOLGERUNG. Sei $\mathcal{F}: \mathcal{I} \rightarrow kw\mathcal{H}$ ein Diagramm. Dann gilt

$$\lim^{kw\mathcal{H}} \mathcal{F} = \lim^{k\mathcal{Top}} \mathcal{F} \quad (1)$$

$$\operatorname{colim}^{kw\mathcal{H}} \mathcal{F} = h \operatorname{colim}^{k\mathcal{Top}} \mathcal{F} . \quad (2)$$

Inbesondere ist die Kategorie $kw\mathcal{H}$ bivollständig, und der Funktor h ist kostetig.

BEWEIS. Die zweite Aussage folgt aus Lemma 4.14. Für die erste Aussage reicht es zu zeigen, dass jeder Limes von kompakt erzeugten schwach Hausdorff-Räumen in $k\mathcal{Top}$ bereits schwach Hausdorff ist. Wegen Proposition 4.10 reicht es, Produkte in $k\mathcal{Top}$ und Pullbacks, also Unterräume von Produkten in $k\mathcal{Top}$ zu betrachten.

Es sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie kompakt erzeugter schwach-Hausdorff-Räume, und es sei $X = k \prod_{i \in I} X_i$ ihr Produkt in $k\mathcal{Top}$. Für alle $j \in I$ ist die Projektionsabbildung

$$\pi_j: k(X \times X) \cong k \prod_{i \in I} k(X_i \times X_i) \longrightarrow k(X_j \times X_j)$$

stetig, somit ist $\pi_j^{-1} \Delta_{X_j}$ abgeschlossen in $k(X \times X)$. Aber dann ist auch $\Delta_X = \bigcap_{j \in I} \pi_j^{-1} \Delta_{X_j}$ abgeschlossen in $k(X \times X)$, und somit ist X schwach Hausdorff.

Wir können einen Pullback in \mathcal{Top} als Unterraum A eines Produktraums X auffassen. Nach Folgerung 4.19 müssen wir jeweils den Funktor k anwenden, um den Pullback in $k\mathcal{Top}$ zu erhalten. Sei also $A \subset kX$ ein Unterraum. Dann ist kA ebenfalls kompakt erzeugt, und die Inklusion $\iota: kA \rightarrow A \hookrightarrow kX$ ist stetig. Sei Y ebenfalls kompakt erzeugt, dann ist nach Proposition 4.18 eine Abbildung $F: Y \rightarrow kA$ genau dann stetig, wenn $F: Y \rightarrow A$ stetig ist, nach Satz 1.62 (2) also genau dann, wenn $\iota \circ F: Y \rightarrow kX$ stetig ist. Sei jetzt K kompakt und $f: K \rightarrow kA$ stetig. Dann ist $\iota \circ f: K \rightarrow kX$ stetig, also ist $\operatorname{im}(\iota \circ f)$ abgeschlossen. Aber dann ist auch $\operatorname{im}(f) = \iota^{-1} \operatorname{im}(\iota \circ f)$ abgeschlossen. Also ist kA schwach Hausdorff, und somit ist jeder Limes von kompakt erzeugten schwach-Hausdorff-Räumen in $k\mathcal{Top}$ selbst wieder schwach Hausdorff. \square

4.24. BEMERKUNG. Zusammenfassend erhalten wir für Diagramme $\mathcal{F}: \mathcal{I} \rightarrow kw\mathcal{H}$ also

$$\lim^{kw\mathcal{H}} \mathcal{F} = k \lim^{\mathcal{Top}} \mathcal{F} \quad \text{und} \quad \operatorname{colim}^{kw\mathcal{H}} \mathcal{F} = h \operatorname{colim}^{\mathcal{Top}} \mathcal{F} .$$

Im Beweis von Folgerung 4.19 haben wir außerdem gesehen, dass wir den Funktor k auf Produkte und Unterräume anwenden müssen, um in der Kategorie $kw\mathcal{H}$ die charakteristische Eigenschaft aus Satz 1.62 zu erhalten. Analog haben wir in Folgerung 4.23 den Funktor h auf Koprodukte und Quotienten angewandt, um die charakteristische Eigenschaft aus Satz 1.83 zu gewährleisten. Wir werden in Zukunft meistens in $kw\mathcal{H}$ arbeiten. Dann verstehen mit Unterräume, Quotienten, Produkte, Koprodukte, sowie allgemeine Limiten und Kolimiten ebenfalls in $kw\mathcal{H}$. Insbesondere schreiben wir „ k “ und „ h “ in der Regel nicht mit, es sei denn, um Verwechslungen zu vermeiden.

4.25. BEMERKUNG. Der Funktor h vereinfacht topologische Räume, indem er Punkte, die sich nicht gut genug trennen lassen, miteinander identifiziert. Wir wollen uns vergewissern, dass er uns gewisse Konstruktionen nicht kaputt macht.

- (1) Es sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie kompakt erzeugter schwach-Hausdorff-Räume, dann ist auch ihre disjunkte Vereinigung $\coprod_{i \in I} X_i$ wieder kompakt erzeugt und schwach Hausdorff (Übung).

- (2) Es sei $X_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow \dots$ eine Familie kompakt erzeugter schwach-Hausdorff-Räume, so dass X_i für alle i ein abgeschlossener Unterraum von X_{i+1} ist. Dann ist auch ihre aufsteigende Vereinigung $\text{colim } X_i$ wieder kompakt erzeugt und schwach Hausdorff (Übung).
- (3) Es sei $A \subset X$ abgeschlossen und $f: kA \rightarrow Y$ stetig. Dann ist auch der Pushout $X \cup_f Y$ in $k\text{Top}$ wieder schwach-Hausdorff. Die Teilmengen $A \times Y$ und $A \times A$ sind in $X \times Y$ beziehungsweise $X \times X$, also erst recht in $k(X \times Y)$ beziehungsweise $k(X \times X)$ abgeschlossen. Da f stetig ist, sind auch die Teilmengen

$$(f \times \text{id}_Y)^{-1}(\Delta Y) \subset k(kA \times Y) \subset k(X \times Y)$$

$$(f \times f)^{-1}(\Delta Y) \subset k(kA \times kA) \subset k(X \times X)$$

abgeschlossen, also auch

$$R_\sim = (\Delta X \cup (f \times f)^{-1}(\Delta Y)) \sqcup (f \times \text{id}_Y)^{-1}(\Delta Y) \sqcup (\text{id}_Y \times f)^{-1}(\Delta Y) \sqcup \Delta Y$$

$$\subset k(X \times X) \sqcup k(X \times Y) \sqcup k(Y \times X) \sqcup k(Y \times Y) = k((X \sqcup Y) \times (X \sqcup Y)) .$$

Also ist $X \cup_f Y = (X \sqcup Y)/\sim$ schwach Hausdorff.

- (4) Das reduzierte Produkt $X \wedge Y$ in $k\text{Top}$ ist wieder schwach Hausdorff. Denn die einpunktigen Teilmengen $\{x_0\} \subset X$ und $\{y_0\} \subset Y$ sind kompakt und daher abgeschlossen. Die Diagonalen $\Delta X \subset k(X \times X)$ und $\Delta Y \subset k(Y \times Y)$ sind ebenfalls abgeschlossen, also auch $\Delta(X \times Y) = \Delta X \times \Delta Y \subset k(X \times X) \times k(Y \times Y)$, und die Topologie auf $k(X \times X \times Y \times Y) \cong k(k(X \times Y) \times k(X \times Y))$ ist noch feiner. Also ist auch die Menge

$$R_\sim = \Delta(X \times Y) \cup ((X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y) \times (X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y))$$

$$\subset k(k(X \times Y) \times k(X \times Y))$$

abgeschlossen, und $X \wedge Y = k(X \times Y)/\sim$ ist schwach Hausdorff.

Wenn $A \subset X$ nicht abgeschlossen ist, stimmt Aussage (3) nicht mehr, beispielsweise sei $f: \mathbb{Q} \rightarrow \text{pt}$ die konstante Abbildung, dann ist $h(\mathbb{R} \cup_f \text{pt}) \cong \text{pt}$. Und aus (1)–(3) folgt, wie anfangs behauptet, dass CW-Komplexe schwach Hausdorff sind, siehe Folgerung 4.39.

4.c. Das Exponentialgesetz

Wir kommen jetzt zum Raum der stetigen Abbildungen, siehe auch Abschnitt 1.g. Die folgenden Konstruktionen werden uns helfen, weitere schöne Eigenschaften der Kategorie $k\mathcal{WH}$ zu beweisen. Um den topologischen Aufwand gering zu halten, führen wir den Begriff der abgeschlossenen monoidalen Kategorie ein. Um den abstrakten Aufwand in Grenzen zu halten, begnügen wir uns mit einer relativ einfachen Version, die für den Anfang ausreicht.

4.26. DEFINITION. Eine *monoidale Kategorie* $(\mathcal{C}, \otimes, E)$ ist eine Kategorie \mathcal{C} mit

- einem Funktor $\otimes: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, dem *Tensorprodukt*,
- einem *Einheitsobjekt* E , und
- natürlichen Isomorphismen

$$\alpha_{X,Y,Z}: (X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\cong} X \otimes (Y \otimes Z) ,$$

$$\lambda_X: E \otimes X \xrightarrow{\cong} X \quad \text{und} \quad \rho_X: X \otimes E \xrightarrow{\cong} X ,$$

so dass für alle Objekte X, Y, Z, W die folgenden Axiome gelten:

$$\alpha_{X,Y,Z \otimes W} \circ \alpha_{X \otimes Y, Z, W} = (\text{id}_X \otimes \alpha_{Y,Z,W}) \circ \alpha_{X,Y \otimes Z, W} \circ (\alpha_{X,Y,Z} \otimes \text{id}_W) , \quad (1)$$

$$\rho_X \otimes \text{id}_Y = (\text{id}_X \otimes \lambda_Y) \circ \alpha_{X,E,Y} . \quad (2)$$

Sie heißt (*rechts-*) *abgeschlossen*, falls zu jedem Objekt Y ein zu $\cdot \otimes Y$ rechtsadjungierter Funktor $\text{hom}(Y, \cdot)$ existiert. Sie heißt *kartesisch abgeschlossen*, wenn darüberhinaus das Tensorprodukt ein Produkt im Sinne von Bemerkung 1.54 ist und das Einheitsobjekt ein terminales Objekt.

Zu den Eigenschaften (1)–(2) gehören die kommutativen Diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) & \\
 \alpha_{X \otimes Y, Z, W} \nearrow & & \searrow \alpha_{X, Y, Z \otimes W} \\
 ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W & & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W)) \\
 \alpha_{X, Y, Z} \otimes \text{id}_W \downarrow & & \uparrow \text{id}_X \otimes \alpha_{Y, Z, W} \\
 (X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W & \xrightarrow{\alpha_{X, Y \otimes Z, W}} & X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W),
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 (X \otimes E) \otimes Y & \xrightarrow{\alpha_{X, E, Y}} & X \otimes (E \otimes Y) \\
 \rho_X \otimes \text{id}_Y \searrow & & \swarrow \text{id}_X \otimes \lambda_Y \\
 \text{und} & & X \otimes Y.
 \end{array}$$

Sie besagen, dass die Objekte von \mathcal{C} eine „große“ Halbgruppe oder auch Monoid bilden („groß“ bedeutet, dass der Träger eine echte Klasse sein kann), wobei die üblichen Rechenregeln aber stets nur bis auf eindeutige natürliche Isomorphismen gelten. Man nennt eine Kategorie *streng monoidal*, wenn $(X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z)$ und $E \otimes X = X = X \otimes E$ für alle Objekte X , Y und Z gelten, und $\alpha_{X, Y, Z}$, λ_X und ρ_X jeweils die Identitäten dieser Objekte sind. Die meisten monoidalen Kategorien sind nicht streng monoidal, aber mit einer Art Auswahlaxiom lässt sich zu jeder monoidalen Kategorie eine äquivalente streng monoidale Kategorie konstruieren.

Der Funktor hom heißt *interner hom-Funktor*. Er ist im ersten Argument kontravariant und im zweiten Argument kovariant, siehe Übung 4.90. „Intern“ bedeutet hier, dass $\text{hom}(Y, Z)$ im Gegensatz zur Menge $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ ein Objekt der Kategorie \mathcal{C} ist. Wir können umgekehrt auch *abgeschlossene Kategorien* $(\mathcal{C}, \text{hom}, E)$ als Kategorien mit Einheitsobjekt E , internem hom -Funktor hom und gewissen natürlichen Transformationen definieren.

4.27. BEISPIEL. Wir geben in Abbildung 4.2 eine Liste uns bekannter Kategorien mit verschiedenen monoidalen Strukturen an. Jede der Kategorien ist jeweils monoidal

- mit Koprodukt und initialem Objekt,
- mit Produkt und terminalem Objekt, beziehungsweise
- mit Tensorprodukt und Einheitsobjekt (falls definiert),

wir erhalten also pro Zeile bis zu drei verschiedene monoidale Kategorien, und nur bei einem Typ von Kategorien ist das abstrakte Tensorprodukt aus Definition 4.26 tatsächlich ein Tensorprodukt.

All diese Beispiele sind sogar *symmetrische monoidale Kategorien*, das heißt, es gibt natürliche Isomorphismen $\tau_{X, Y}: X \otimes Y \rightarrow Y \otimes X$, die gewisse Zusatzaxiome erfüllen, auf die wir hier noch nicht eingehen wollen. In Satz ?? sind sie anhand eines Beispiels aufgeführt.

- (1) Die Kategorie $(\text{Set}, \times, \text{pt})$ ist kartesisch abgeschlossen. Das haben wir im Beweis von Satz 1.101 bereits ausgenutzt. Für die Kategorie $(\text{Set}_+, \wedge, S^0)$ der punktierten Mengen verwenden wir die gleiche Notation wie für Top_+ . Sie ist abgeschlossen monoidal, aber das kartesische Produkt „ \times “ ist nicht das Tensorprodukt „ \wedge “.

Kategorie	Koprodukt	Initiales Objekt	Produkt	Terminales Objekt	Tensorprodukt	Einheitsobjekt
$\mathcal{G}r p$	$*$	$\{e\}$	\times	$\{e\}$	$—$	$—$
$\mathcal{M}od_R, \mathcal{A}b, \mathcal{V}ec_{\mathbb{k}}$	\oplus	0	\oplus	0	\otimes	$R, \mathbb{Z}, \mathbb{k}$
$\mathcal{S}et, (\mathcal{T}op),$ $k\mathcal{T}op, kw\mathcal{H}$	\sqcup	\emptyset	\times	pt	\times	pt
$\mathcal{S}et_+, (\mathcal{T}op_+),$ $k\mathcal{T}op_+, kw\mathcal{H}_+$	\vee	pt	\times	pt	\wedge	S^0

ABBILDUNG 4.2. Beispiele monoidaler Kategorien

- (2) Die Kategorie $\mathcal{M}od_R$ für einen kommutativen Ring R mit 1 ist abgeschlossen monoidal, denn die linearen Abbildungen zwischen zwei R -Moduln bilden selbst wieder einen R -Modul. Spezialfälle sind $\mathcal{A}b = \mathcal{M}od_{\mathbb{Z}}$ und $\mathcal{V}ec_{\mathbb{k}} = \mathcal{M}od_{\mathbb{k}}$. Das Tensorprodukt von Moduln ist Namensgeber für unser Tensorprodukt in Definition 4.26.
- (3) In der Unterkategorie $fd\mathcal{V}ec_{\mathbb{k}} \subset \mathcal{V}ec_{\mathbb{k}}$ der endlich-dimensionalen Vektorräume gibt es einen Dualitätsfunktork $X \mapsto X^* = \text{hom}(X, \mathbb{k})$, so dass $\text{hom}(X, Y) \cong X^* \otimes Y$. In den anderen obigen Beispielen gibt es so etwas jedoch nicht. In Abschnitt ?? führen wir eine Art „stabiler“ topologischer Dualität ein.
- (4) Die Kategorien $(\mathcal{T}op, \times, \text{pt})$ und $(\mathcal{T}op_+, \wedge, S^0)$ sind monoidal. Für $\mathcal{T}op_+$ haben wir das in Bemerkung 3.70 angedeutet. Beide Kategorien sind nicht abgeschlossen, da einzelne Punkte im Exponentialgesetz 1.101 nicht ohne Voraussetzungen gelten.
- (5) Die Kategorien $k\mathcal{T}op$ und $k\mathcal{T}op_+$ sowie $kw\mathcal{H}$ und $kw\mathcal{H}_+$ sind nach Satz 4.31 und Folgerung 4.34 abgeschlossen und monoidal. Zur Bedeutung der Symbole „ \times “ und „ \wedge “ siehe Bemerkungen 4.35 und 4.25 (4).

4.28. BEMERKUNG. Es seien X, Y und Z Objekte einer abgeschlossenen monoidalen Kategorie \mathcal{C} . Wir bezeichnen die Einheit der Adjunktion $\cdot \otimes Y \dashv \text{hom}(Y, \cdot)$ mit $\text{ev}_{Y,Z} = \varepsilon_Z: \text{hom}(Y, Z) \otimes Y \rightarrow Z$ und die Koeinheit mit $\text{in}_{X,Y} = \eta_X: X \rightarrow \text{hom}(Y, X \otimes Y)$. Aus der Natürlichkeit der Adjunktion in Bemerkung 4.2 erhalten wir zwei universelle Eigenschaften, siehe Übung 4.91.

- (1) *Universelle Eigenschaft des internen hom-Funktors.* Es existiert eine natürliche Transformation $\text{ev}_{Y,Z}: \text{hom}(Y, Z) \otimes Y \rightarrow Z$, so dass zu jedem Morphismus $f: X \otimes Y \rightarrow Z$ ein eindeutiger Morphismus $g: X \rightarrow \text{hom}(Y, Z)$ mit $f = \text{ev}_{Y,Z} \circ (g \otimes \text{id}_Y)$ existiert.
- (2) *Universelle Eigenschaft des Tensorproduktes.* Es existiert eine natürliche Transformation $\text{in}_{X,Y}: X \rightarrow \text{hom}(Y, X \otimes Y)$, so dass zu jedem Morphismus $g: X \rightarrow \text{hom}(Y, Z)$ ein eindeutiger Morphismus $f: X \otimes Y \rightarrow Z$ mit $g = \text{hom}(Y, f) \circ \text{in}_{X,Y}$ existiert.

Die Abbildung g in (2) repräsentiert dabei so etwas wie eine „bilineare Abbildung“ $X \times Y \rightarrow Z$.

$$\begin{array}{ccc}
 X \otimes Y & \xrightarrow{g \otimes \text{id}_Y} & \text{hom}(Y, Z) \otimes Y \\
 \searrow f & & \swarrow \text{ev}_{Y,Z} \\
 & & Z
 \end{array}
 \quad \text{und} \quad
 \begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\text{in}_{X,Y}} & \text{hom}(Y, X \otimes Y) \\
 \searrow g & & \swarrow \text{hom}(Y, f) \\
 & & \text{hom}(Y, Z)
 \end{array}$$

Insbesondere sehen wir, dass sich die Bijektion $\Phi_{X,Z}$ aus Definition 4.1 und ihr Inverses mit Hilfe der Koeinheit beziehungsweise der Einheit beschreiben lassen; das gilt analog für alle Adjunktionen.

4.29. BEMERKUNG. In einer Kategorie sind Objekte üblicherweise abstrakt, keine Mengen, deren Elemente man (mit der Sprache der Kategorien) erkennen könnte. Man kann also auch Morphismen nicht als Zuordnungsvorschriften interpretieren. In abgeschlossenen monoidalen Kategorien geht all das jedoch.

Sei \mathcal{C} zunächst nur monoidal. Jedem Objekt X können wir die Menge $|X| = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(E, X)$ zuordnen. Wenn E das initiale Objekt (und \otimes das Koprodukt) ist, hat diese Menge stets nur ein Element. In $(\text{Set}, \times, \text{pt})$ (und genauso in Top , $k\text{Top}$ und $kw\mathcal{H}$) hingegen entsprechen die Bildpunkte von Morphismen $\text{pt} \rightarrow X$ genau den Elementen von X . In $(\text{Mod}_R, \otimes, R)$ identifizieren wir einen Morphismus $E = R \rightarrow X$ mit dem Bild von $1 \in R$. In $(\text{Set}_+, \wedge, S^0)$ (und genauso in Top_+ , $k\text{Top}_+$ und $kw\mathcal{H}_+$) betrachten wir das Bild desjenigen Punktes in S^0 , der nicht Basispunkt ist. In diesen Fällen ist $|X|$ stets die dem Objekt X zugrundeliegende Menge.

Ab jetzt sei \mathcal{C} abgeschlossen. Für $X = E$ erhalten wir mit der Adjunktion $\cdot \otimes Y \dashv \text{hom}(Y, \cdot)$ eine bijektive Abbildung

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \xrightarrow{\circ \lambda_Y} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(E \otimes Y, Z) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(E, \text{hom}(Y, Z)) = |\text{hom}(Y, Z)| ,$$

da λ_Y ein Isomorphismus ist. Also entspricht $\text{hom}(Y, Z)$ der Menge $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$. Um Morphismen auf Elementen auszuwerten, benutzen wir die Komposition \circ von Morphismen in \mathcal{C} :

$$|\text{hom}(Y, Z)| \times |Y| \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(E, Y) \xrightarrow{\circ} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(E, Z) = |Z| .$$

Wir erhalten also eine Abbildung $|\text{hom}(Y, Z)| \rightarrow \text{Hom}_{\text{Set}}(|Y|, |Z|)$, und man kann überprüfen, dass das einen „vergesslichen“ Funktor $|\cdot| : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ liefert.

Sei schließlich \mathcal{C} zusätzlich punktiert, das heißt, es gibt ein Nullobjekt 0 , also eines, das gleichzeitig initial und terminal ist. Dann erhalten wir einen vergesslichen Funktor $|\cdot| : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}_+$, dabei repräsentiert der Nullmorphismus $E \rightarrow 0 \rightarrow X$ den Basispunkt von $|X|$.

4.30. SATZ (Abstraktes Exponentialgesetz). *In jeder abgeschlossenen monoidalen Kategorie existiert ein natürlicher Isomorphismus*

$$\text{hom}(X \otimes Y, Z) \cong \text{hom}(X, \text{hom}(Y, Z)) .$$

Der Unterschied zur in Definition 4.26 geforderten Adjunktion $\cdot \otimes Y \dashv \text{hom}(Y, \cdot)$ besteht darin, dass hier die internen Hom-Objekte verglichen werden, und nicht die Morphismenmengen.

BEWEIS. Es sei W ein weiteres Objekt, dann erhalten wir eine Verkettung natürlicher Bijektionen

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, \underbrace{\text{hom}(X \otimes Y, Z)}_A) &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W \otimes X \otimes Y, Z) \xrightarrow{\cong} \\ &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W \otimes X, \text{hom}(Y, Z)) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, \underbrace{\text{hom}(X, \text{hom}(Y, Z))}_B) . \end{aligned}$$

Es bezeichne f das Urbild von id_B und g das Bild von id_A für $W = B$ beziehungsweise $W = A$. Wegen der Natürlichkeit der Adjunktionen aus Bemerkung 4.2 kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A) & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, B) \ni \text{id}_B \\ \cdot \circ g \downarrow & & \downarrow \cdot \circ g \\ \text{id}_A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A) & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \ni g . \end{array}$$

Also folgt $f \circ g = \text{id}_A$. Analog sieht man $g \circ f = \text{id}_B$, mithin sind die beiden Objekte A und B im Satz isomorph. \square

4.31. SATZ. *Die Kategorie $k\text{Top}$ ist kartesisch abgeschlossen.*

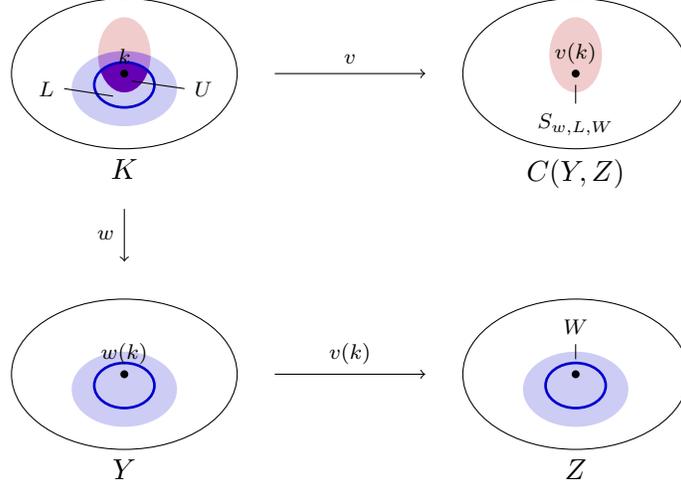


ABBILDUNG 4.3. Stetigkeit der Einheit $\text{ev}_{Y,Z}$

Insbesondere gilt in $k\text{Top}$ das Exponentialgesetz wie in Satz 1.101, aber ohne zusätzliche Voraussetzungen an die beteiligten Räume. Wir werden das später auch für $kw\mathcal{H}$ zeigen. Zum Beweis von Proposition 4.21 benötigen wir aber zunächst einmal das Exponentialgesetz in $k\text{Top}$.

BEWEIS. Aufgrund der universellen Eigenschaft ist das Produkt auf $k\text{Top}$ aus Bemerkung 4.24 assoziativ mit Einheitsobjekt pt , somit ist $(k\text{Top}, k(\cdot \times \cdot), \text{pt})$ eine monoidale Kategorie.

Als internes hom-Objekt zu $Y, Z \in k\text{Top}$ definieren wir

$$\text{hom}(Y, Z) = kC(Y, Z) ,$$

wobei $C(Y, Z)$ wie immer die kompakt-offene Topologie aus Definition 1.97 trage. Nach Proposition 1.98 induziert die kompakt-offene Topologie einen Funktor $C(X, \cdot) : \text{Top} \rightarrow \text{Top}$. Wir wenden Proposition 4.18 an und erhalten für beliebige $X, Y, Z \in k\text{Top}$ und $f : Y \rightarrow Z$, dass

$$\begin{aligned} f : Y \rightarrow Z \text{ stetig} &\implies f \circ \cdot : C(X, Y) \rightarrow C(X, Z) \text{ stetig} \\ &\implies f \circ \cdot : kC(X, Y) \rightarrow kC(X, Z) \text{ stetig.} \end{aligned}$$

Also erhalten wir einen Funktor $kC(X, \cdot) : k\text{Top} \rightarrow k\text{Top}$.

Zu zeigen bleibt, dass $\cdot \times Y$ linksadjungiert zu $kC(Y, \cdot)$ ist. Wir verfahren dazu wie in Abschnitt 1.k und betrachten Einheit und Koeinheit

$$\varepsilon_Z = \text{ev}_{Y,Z} : k(kC(Y, Z) \times Y) \longrightarrow Z \quad \text{und} \quad \eta_X = \text{in}_{X,Y} : X \longrightarrow kC(Y, k(X \times Y))$$

aus den Propositionen 1.99 (2) und 1.100.

Zur Stetigkeit von $\text{ev}_{Y,Z}$ sei zunächst K kompakt,

$$u = (v, w) : K \rightarrow k(kC(Y, Z) \times Y)$$

eine Testfunktion und $W \subset Z$ offen. Dann reicht es zu zeigen, dass auch die Menge

$$u^{-1}(\text{ev}_{Y,Z}^{-1}(W)) = \{ k \in K \mid v(k)(w(k)) \in W \}$$

offen ist. Da $v(k) \circ w$ stetig ist, ist $(v(k) \circ w)^{-1}(W) \subset K$ offen. Da K normal ist, finden wir eine kompakte Umgebung $L \subset (v(k) \circ w)^{-1}(W)$ von k in K . Dann liegt $v(k)$ in der Subbasismenge $S_{w,L,W}$ von $C(Y, Z)$. Wegen Stetigkeit von v ist $U = L \cap v^{-1}(S_{w,L,W})$ eine Umgebung von k in K , und für alle $\ell \in U$ folgt

$$\text{ev}_{Y,Z}(u(\ell)) = v(\ell)(w(\ell)) \in W .$$

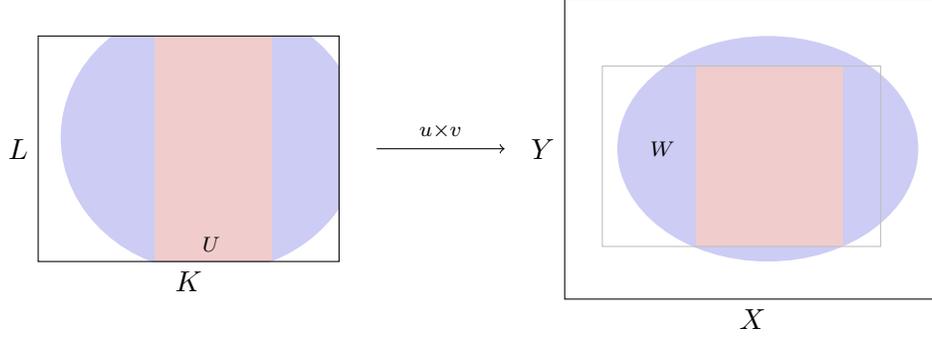


ABBILDUNG 4.4. Stetigkeit der Koinheit $\text{in}_{X,Y}$

Damit ist die Stetigkeit von $\text{ev}_{Y,Z} \circ u$ und somit auch von $\text{ev}_{Y,Z}$ gezeigt.

Für die Stetigkeit von $\text{in}_{X,Y}$ betrachten wir Kompakta K, L , Testfunktionen $u: K \rightarrow X$ und $v: L \rightarrow Y$, sowie eine k -offene Menge $W \subset X \times Y$. Dann ist die Menge

$$\begin{aligned} U &= u^{-1}(\text{in}_{X,Y}^{-1}(S_{v,L,W})) = \{k \in K \mid \text{für alle } \ell \in L \text{ gilt } (u(k), v(\ell)) \in W\} \\ &= K \setminus \{k \in K \mid \text{es gibt } \ell \in L \text{ mit } (u(k), v(\ell)) \notin W\} \\ &= K \setminus \pi_K((u \times v)^{-1}(X \times Y \setminus W)) \end{aligned}$$

offen, denn $X \times Y \setminus W$ ist k -abgeschlossen, und das Urbild in $K \times L$ somit abgeschlossen und sogar kompakt, da $K \times L$ kompakt ist. Also ist das Bild unter $\pi_K: K \times L \rightarrow K$ ebenfalls kompakt, sein Komplement also offen. Es folgt die Stetigkeit von $\text{in}_{X,Y}$.

Sei jetzt $f: k(X \times Y) \rightarrow Z$ stetig, dann ist auch $g = kC(Y, f) \circ \text{in}_{X,Y}: X \rightarrow kC(Y, Z)$ stetig. Und ist $g: X \rightarrow kC(Y, Z)$ stetig, dann umgekehrt auch $f = \text{ev}_{Y,Z} \circ (g \times \text{id}_Y): k(X \times Y) \rightarrow Z$. \square

An dieser Stelle können wir endlich den Beweis von Proposition 4.21 nachholen. Dazu bedarf es einiger Vorarbeit. Wir nennen eine Abbildung $q: X \rightarrow Y$ eine *Quotientenabbildung*, wenn q stetig und surjektiv ist und Y die Quotiententopologie aus Definition 1.82 trägt. Äquivalent dazu erfüllt f die charakteristische Eigenschaft aus Satz 1.83.

4.32. PROPOSITION. *Es sei $q: X \rightarrow Y$ eine Quotientenabbildung in $k\text{Top}$ und Z kompakt erzeugt. Dann ist auch $q \times \text{id}_Z: k(X \times Z) \rightarrow k(Y \times Z)$ eine Quotientenabbildung.*

BEWEIS. Die Abbildung $q \times \text{id}_Z$ ist stetig. Sei jetzt W kompakt erzeugt und $g: k(Y \times Z) \rightarrow W$ eine beliebige Abbildung. Zu zeigen ist, dass g stetig ist, falls $g \circ (q \times \text{id}_Z)$ stetig ist. Zu g und $g \circ (q \times \text{id}_Z)$ erhalten wir adjungierte Abbildungen $h: Y \rightarrow kC(Z, W)$ und $h \circ q: X \rightarrow kC(Z, W)$ von Mengen wie im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} g \in \text{Hom}(k(Y \times Z), W) & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}(Y, kC(Z, W)) \ni h \\ \cdot \circ (q \otimes \text{id}_Z) \downarrow & & \downarrow \cdot \circ q \\ g \circ (q \otimes \text{id}_Z) \in \text{Hom}(k(X \times Z), W) & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}(X, kC(Z, W)) \ni h \circ q \end{array}$$

Wenn $g \circ (q \times \text{id}_Z)$ stetig ist, ist auch $h \circ q$ stetig, da $k\text{Top}$ abgeschlossen ist. Da q eine Quotientenabbildung ist, ist h stetig. Aber dann ist auch g stetig. \square

BEWEIS von Proposition 4.21. Es sei \sim eine Äquivalenzrelation auf dem kompakt erzeugten Raum X und $q: X \rightarrow Y = X/\sim$ die Quotientenabbildung. Wie im Beweis der Folgerung 4.19 schließen wir, dass Y ebenfalls kompakt erzeugt ist.

Nach Proposition 4.32 erhalten wir eine Quotientenabbildung

$$q \times q: k(X \times X) \xrightarrow{q \times \text{id}_X} k(X/\sim \times X) \xrightarrow{\text{id}_{X/\sim} \times q} k(X/\sim \times X/\sim).$$

Nach Proposition 4.20 ist X/\sim genau dann schwach Hausdorff, wenn $\Delta(X/\sim) \subset k(X/\sim \times X/\sim)$ abgeschlossen ist. Aber das gilt genau dann, wenn $R_\sim = (q \times q)^{-1}(\Delta(X/\sim)) \subset k(X \times X)$ abgeschlossen ist. \square

Somit sind jetzt alle Aussagen in Abschnitt 4.b vollständig bewiesen. Es bleibt zu zeigen, dass auch $kw\mathcal{H}$ und $kw\mathcal{H}_+$ abgeschlossen sind.

4.33. PROPOSITION. *Es seien Y, Z kompakt erzeugt und Z sei schwach Hausdorff. Dann ist auch $kC(Y, Z)$ schwach Hausdorff.*

BEWEIS. Zu zeigen ist die Abgeschlossenheit von $\text{im } F \subset kC(Y, Z)$ für alle Kompakta K und alle $F: K \rightarrow kC(Y, Z)$. Für alle Kompakta L und alle Testabbildungen $G: L \rightarrow C(Y, Z)$ muss also $G^{-1}(\text{im } F) \subset L$ abgeschlossen sein. Betrachte jetzt die zugehörigen Abbildungen $f: k(K \times Y) \rightarrow Z$ und $g: k(L \times Y) \rightarrow Z$ sowie $\iota_y: k(K \times L) \rightarrow k(K \times Y \times L \times Y)$ mit $\iota_y(k, \ell) = (k, y, \ell, y)$, dann gilt

$$\begin{aligned} G^{-1}(\text{im } F) &= \{ \ell \in L \mid \text{es gibt } k \in K \text{ mit } f(k, y) = g(\ell, y) \in Z \text{ für alle } y \in Y \} \\ &= \pi_L \bigcap_{y \in Y} \iota_y^{-1}(f \times g)^{-1}(\Delta Z). \end{aligned}$$

Da Z schwach Hausdorff ist, ist $\Delta Z \subset k(Z \times Z)$ abgeschlossen, also auch $\iota_y^{-1}(f \times g)^{-1}(\Delta Z) \subset k(K \times L) = K \times L$. Somit ist $G^{-1}(\text{im } F)$ das Bild einer abgeschlossenen, mithin kompakten Teilmenge von $K \times L$, und somit selbst kompakt, also auch abgeschlossen in L , was zu zeigen war. \square

Wir vervollständigen jetzt die letzten zwei Zeilen der Tabelle in Beispiel 4.27.

4.34. FOLGERUNG. *Die Kategorien $(kw\mathcal{H}, k(\cdot \times \cdot), \text{pt})$ und $(kw\mathcal{H}_+, k(\cdot \wedge \cdot), S^0)$ der unpunktieren und der punktierten kompakt erzeugten schwach-Hausdorff-Räume sind abgeschlossen und monoidal.* \square

4.35. BEMERKUNG. Wie schon in Bemerkung 4.24 gesagt, werden wir im Folgenden oft — meist stillschweigend — in $kw\mathcal{H}$ arbeiten. Beispielsweise schreiben wir $X \times Y$ und $X \wedge Y$ anstelle von $k(X \times Y)$ und $k(X \wedge Y)$. Unter einer Einbettung verstehen wir eine injektive Abbildung, die ein Homöomorphismus auf das mit der kompakt erzeugten Unterraum-Topologie versehene Bild ist.

Für gut punktierte Räume X, Y in $kw\mathcal{H}_+$ schreiben wir

$$Y^X = k\{ f \in kC(X, Y) \mid f(x_0) = y_0 \} \subset kC(X, Y).$$

Im nicht punktierten Fall sei $Y^{X+} = kC(X, Y)$ auch dann, wenn Y keinen Basispunkt besitzt. Wenn $Y = (Y, y_0)$ punktiert ist, haben Y^X und Y^{X+} die konstante Abbildung auf y_0 als Basispunkt. Nach Definition bezeichnet $[X, Y]$ die Menge der punktierten Homotopieklassen von Abbildungen, also die Wegzusammenhangskomponenten von Y^X . Daher erhalten wir die punktierte Menge

$$[X, Y] = \pi_0(Y^X).$$

Anstelle von punktierten Räumen, Paaren und punktierten Paaren würden wir vielleicht lieber nur gut punktierte Räume und Kofaserungen betrachten. Dabei meinen wir mit Kofaserungen nach wie vor Hurewicz-Kofaserungen, wobei wir Definition 3.55 im Sinne von Bemerkung 4.35 in $kw\mathcal{H}$ verstehen. Die Kategorie der gut punktierten Räume ist allerdings nicht abgeschlossen, da Y^X im Allgemeinen nicht wieder gut punktiert ist. In der Tat gibt es auch andere Gründe, nicht nur gut punktierte Räume zu betrachten. Im Abschnitt 4.e über Modellkategorien kommen wir auf diese Frage noch einmal zurück.

Für den Begriff des Umgebungsdeformationsretraktes verweisen wir auf Proposition 3.59.

4.36. PROPOSITION. Sei $A \rightarrow X$ Kofaserung in $kw\mathcal{H}$, dann ist $A \subset X$ abgeschlossen und $A \rightarrow X$ ist eine Einbettung. Für ein Paar (X, A) in $kw\mathcal{H}$ sind folgende Aussagen äquivalent.

- (1) (X, A) ist ein Umgebungsdeformationsretrakt;
- (2) $X \times \{0\} \cup A \times I$ ist starker Deformationsretrakt von $X \times I$;
- (3) $X \times \{0\} \cup A \times I$ ist Retrakt von $X \times I$;
- (4) (X, A) ist eine Kofaserung.

BEWEIS. Man zeigt wie in Bemerkung 3.58, dass $i: A \rightarrow X$ genau dann eine Kofaserung ist, wenn $Zi \subset X \times I$ ein Retrakt ist. Wie in Übung 3.128 folgt, dass i eine Einbettung ist, und mit einem ähnlichen Trick wie in Übung 3.129 sehen wir in Übung 4.84, dass $\text{im}(i) \subset X$ abgeschlossen ist. Die Äquivalenz der Punkte (1)–(4) folgt wie im Beweis von Proposition 3.59. \square

4.d. CW-Komplexe und der Satz von Whitehead

Wir erinnern uns an die Konstruktion von CW-Komplexen in Abschnitt 1.1 vor Definition 1.106. Wir modifizieren diese Konstruktion wie folgt. Wie immer sei $S^{n-1} = \partial D^n$ und $B^n = \mathring{D}^n$.

4.37. DEFINITION. Ein Paar (X, A) in \mathcal{Top} heißt *CW-Paar*, wenn es Mengen J^n , Räume X^{n-1} und Verklebeabbildungen $\varphi_j^n: S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $j \in J^n$ gibt, so dass

$$X^{-1} = A, \tag{1}$$

$$X^n = \left(\coprod_{j \in J^n} D^n \right) \cup_{\varphi^n} X^{n-1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

wobei $\varphi^n: \coprod_{j \in J^n} S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ von den φ_j^n induziert wird, und

$$X = \text{colim } X^n \quad \text{in } \mathcal{Top}. \tag{3}$$

Ein *punktierter CW-Komplex* (X, x_0) ist ein CW-Paar der Form $(X, \{x_0\})$.

Die Räume X^n heißen *n-Gerüste* oder *n-Skelette*, die induzierten Abbildungen

$$\Phi_j^n: D^n \rightarrow X^n \hookrightarrow X \quad \text{mit} \quad \Phi_j^n|_{S^{n-1}} = \varphi_j^n$$

heißen *charakteristische Abbildungen*. Man nennt $e_j^n = \Phi_j^n(B^n)$ eine *offene* und $\bar{e}_j^n = \Phi_j^n(D^n)$ eine *abgeschlossene n-Zelle* von X .

Kolimiten sind Quotienten disjunkter Vereinigungen. Somit ist eine Menge $U \subset X$ wie in Definition 1.106 genau dann offen, wenn $U \cap A$ und $(\Phi_j^n)^{-1}(U) \subset D^n$ für alle $n \geq 0$ und alle $j \in J^n$ offen sind. Für einen beliebigen Raum Y ist eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ wegen der universellen Eigenschaften des Pushouts und des Kolimes genau dann stetig, wenn $f|_A$ und alle $f \circ \Phi_j^n: D^n \rightarrow Y$ stetig sind.

4.38. PROPOSITION. Es sei (X, A) ein CW-Paar und K kompakt. Dann trifft für jede stetige Abbildung $f: K \rightarrow X$ das Bild $\text{im } f$ nur endlich viele Zellen.

Insbesondere ist jede Zelle e_j^n an nur endlich viele Zellen in X^{n-1} angeklebt, da S^{n-1} kompakt ist. Außerdem ist jede kompakte Teilmenge von X in einem der Gerüste X^n enthalten.

BEWEIS. Wir gehen vor wie im Beweis von Satz 1.112. Für alle n sei

$$J^n = \{ j \in J^n \mid e_j^n \cap \text{im } f \neq \emptyset \},$$

und für alle $j \in J^n$ wählen wir $x_j^n \in e_j^n \cap \text{im } f$. Per Induktion über n ist die Menge

$$P = \{ x_j^n \mid j \in J^n \} \subset \text{im } f \cap X^n$$

in X^n abgeschlossen und diskret. Dazu konstruieren wir induktiv disjunkte Umgebungen $U_{j,n}^m$ der x_j^m in X^n für alle $m \leq n$. Für $m < n$ reicht es dazu,

$$(\Phi_i^n)^{-1}(U_{j,n}^m) = \left\{ p \in D^n \mid |p| > \frac{2}{3} \text{ und } \frac{p}{|p|} \in (\varphi_i^n)^{-1}(U_{j,n-1}^m) \right\}$$

anzugeben, sowie $(\Phi_i^n)^{-1}(U_{j,n}^n) = B_{\frac{1}{3}}(0)$ falls $i = j$ und \emptyset sonst.

Dann ist die obige Menge P als abgeschlossene Teilmenge der quasi-kompakten Menge im f wieder quasi-kompakt, und da sie diskret ist, endlich. Also trifft im f nur Zellen bis zu einer endlichen Dimension n_0 , und in jeder Dimension nur endlich viele. \square

4.39. FOLGERUNG. Sei (X, A) ein CW-Paar mit A aus $kw\mathcal{H}$, dann ist (X, A) ein Paar in $kw\mathcal{H}$.

Insbesondere stimmt der Kolimes in Definition 4.37 (3) nach Folgerung 4.23 mit dem Kolimes in $kw\mathcal{H}$ überein.

BEWEIS. Es sei $A = X^{-1}$ in $kw\mathcal{H}$. Da $S^{n-1} \subset D^n$ abgeschlossen und $\varphi_j^n: S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ stetig ist, ist nach Proposition 3.64 und Bemerkung 4.25 induktiv auch X^n in $kw\mathcal{H}$ für alle n .

Nach Folgerung 4.19 ist der Kolimes X der X^n zumindest kompakt erzeugt. Um zu zeigen, dass X auch schwach Hausdorff ist, sei K kompakt und $f: K \rightarrow X$ stetig. Da im $f \subset X^n$ für ein n , ist im f in X^n und damit auch in X abgeschlossen. Also ist X auch schwach Hausdorff. \square

Da A nicht normal sein muss, können wir nicht erwarten, dass X wie in Satz 1.110 normal ist. Als Ersatz dafür reicht für manche Zwecke das folgende Resultat.

4.40. PROPOSITION. Es sei (X, A) ein CW-Paar, dann sind für alle $m \leq n$ die Paare (X, X^n) , (X^n, X^m) und (X^m, A) abgeschlossene Kofaserungen.

BEWEIS. Da (D^n, S^{n-1}) eine abgeschlossene Kofaserung ist, ist auch $(\coprod_{j \in J^n} D^n, \coprod_{j \in J^n} S^{n-1})$ eine abgeschlossene Kofaserung. Aufgrund von Proposition 3.64 und Definition 4.37 (2) ist dann auch

$$(X^n, X^{n-1}) = \left(\left(\prod_{j \in J^n} D^n \right) \cup_{\varphi^n} X^{n-1}, X^{n-1} \right)$$

eine abgeschlossene Kofaserung. Da $X^{-1} = A$, sind wegen Übung 3.127 (1) alle Paare (X^n, X^m) und (X^m, A) abgeschlossene Kofaserungen.

Sei jetzt $n \geq -1$, sei Y ein weiterer Raum, und seien $f: X \rightarrow Y$ und $h_n: X^n \times I \rightarrow Y$ mit $f|_{X^n} = h_n|_{X^n \times \{0\}}$ wie in Definition 3.55 gegeben. Konstruiere induktiv $h_k: X^k \rightarrow Y^{I^+}$ mit der Homotopieausdehnungseigenschaft, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & C(I, Y) & \\ & & & & & \nearrow & \\ & & & & & \downarrow \text{ev}_0 & \\ X^n & \xrightarrow{\quad} & X^{n+1} & \xrightarrow{\quad} & \dots & \xrightarrow{\quad} & X & \xrightarrow{\quad} & Y & \\ & & & & & \nearrow h & \nearrow h_{n+1} & \nearrow h_n & & \end{array} \quad (4.1)$$

kommutiert. Aufgrund der Kolimes-Eigenschaft in \mathcal{Top} existiert auch h . Da I lokalkompakt ist, entspricht h nach Satz 1.101 (2) der gesuchten Homotopie $X \times I \rightarrow Y$. Da X ein $kw\mathcal{H}$ -Raum ist, ist $X^n \subset X$ wie in den Übungen 3.129 und 4.84 abgeschlossen. \square

Wir erinnern uns an Unterkomplexe von CW-Komplexen aus Definition 1.111. Analog definieren wir einen relativen Unterkomplex Y von (X, A) als einen abgeschlossenen Unterraum $Y \subset X$ mit $A \subset Y$, der sich als Vereinigung von A und offenen Zellen von X schreiben lässt. Das nächste Resultat ist Übung 4.94.

4.41. FOLGERUNG. Es sei Y ein Unterkomplex von (X, A) , dann ist (X, Y) eine Kofaserung.

Wir betrachten eine naheliegende Klasse von Abbildungen zwischen CW-Paaren.

4.42. DEFINITION. Es seien (X, A) und (Y, B) CW-Paare. Eine Abbildung $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ von Paaren heißt *zellulär*, wenn $\text{im}(f|_{X^n}) \subset Y^n$ für alle $n \geq -1$ gilt. Die CW-Paare mit den zellulären Abbildungen bilden eine Kategorie $CW\text{Pair}$. Analog definieren wir Kategorien CW und CW_+ der nicht-punktiierten und der punktiierten CW-Komplexe mit zellulären Abbildungen.

4.43. SATZ (Zelluläre Approximation). *Jede Abbildung $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ von CW-Paaren ist homotop zu einer zellulären Abbildung. Wenn f auf einem Unterkomplex Z von (X, A) bereits zellulär ist, können zelluläre Abbildung und Homotopie relativ zu Z gewählt werden.*

BEWEIS. Wir konstruieren induktiv Homotopien $h^n: X^n \times I \rightarrow Y$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} h^{-1}(\cdot, t) &= f|_A && \text{für alle } t \in I, \\ h^n(\cdot, 0) &= f|_{X^n} && \text{für alle } n, \\ h^n|_{X^{n-1} \times I} &= h^{n-1} && \text{für alle } n, \\ \text{und } h^n(\cdot, 1) &: X^n \rightarrow Y^n && \text{für alle } n. \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Exponentialgesetzes fassen wir die h^n als Abbildungen $X^n \rightarrow Y^I$ auf und erhalten mit der universellen Eigenschaft des Kolimes die gesuchte Abbildung $h: X \rightarrow Y^I$, oder äquivalent $h: X \times I \rightarrow Y$.

Es sei also $n \geq 0$, und die Homotopie h^{n-1} sei bereits konstruiert. Dann setzen wir sie n -Zelle für n -Zelle von X auf $X^n \times I$ fort. Sei e_j^n mit $j \in J^n$ eine n -Zelle von X . Um h^{n-1} auf $e_j^n \times I$ wie gewünscht fortzusetzen, reicht es, eine Abbildung $g_j^n: D^n \times I \rightarrow Y$ anzugeben, so dass

$$\begin{aligned} g_j^n|_{D^n \times \{0\}} &= f \circ \Phi_j^n, \\ g_j^n|_{S^{n-1} \times I} &= h^{n-1} \circ (\varphi_j^n \times \text{id}_I), \\ \text{und } g_j^n|_{D^n \times \{1\}} &: D^n \times I \rightarrow Y^n. \end{aligned}$$

Da

$$(D^n \times I, (D^n \times \{0\}) \cup (S^{n-1} \times I)) \cong (D^n \times I, D^n \times \{0\}),$$

reicht es zu zeigen, dass jede Abbildung $(D^n, S^{n-1}) \rightarrow (Y, Y^{n-1})$ als Abbildung von Paaren homotop ist zu einer Abbildung nach (Y^n, Y^{n-1}) .

Sei also eine Abbildung $g: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (Y, Y^{n-1})$ gegeben. Da D^n kompakt ist, trifft g nach Proposition 4.38 nur endlich viele offene Zellen von Y . Sei m die maximale Dimension einer Zelle in Y , die getroffen wird; ohne Einschränkung gelte $m > n$. Es seien also $c_1^m, \dots, c_k^m \subset Y^m$ die m -Zellen von Y , die noch getroffen werden, und ψ_k^m sei die Verklebeabbildung von c_k^m . Betrachte $Y' = Y^{m-1} \cup c_1^m \cup \dots \cup c_{k-1}^m$ und schreibe

$$Y' \cup c_k^m = ((D^m \setminus \{0\}) \cup_{\psi_k^m} Y') \cup_{B^m \setminus \{0\}} B^m.$$

Da D^n zusammenhängend ist, trifft g nur diejenigen Wegzusammenhangskomponenten von Y , die Punkte im Bild von ψ_k^m enthalten (falls $m \geq 2$, ist das nur eine). Wir dürfen daher annehmen, dass Y' keine weiteren Wegzusammenhangskomponenten enthält. Dann ist $((D^m \setminus \{0\}) \cup_{\psi_k^m} Y', B^m \setminus \{0\})$ ein 0-zusammenhängendes und $(B^m, B^m \setminus \{0\})$ ein $(m-1)$ -zusammenhängendes Paar. Nach dem Ausschneidungssatz 3.38 und Homotopieinvarianz ist die Abbildung

$$0 = \pi_n(B^m, B^m \setminus \{0\}) \longrightarrow \pi_n(Y' \cup c_k^m, (D^m \setminus \{0\}) \cup_{\psi_k^m} Y') \cong \pi_n(Y' \cup c_k^m, Y')$$

surjektiv, da $n \leq m-1$. Wir können also g relativ zu S^{n-1} zu einer Abbildung homotopieren, die c_k^m nicht trifft. Genauso verfahren wir mit den Zellen c_{k-1}^m, \dots, c_1^m und erhalten eine Abbildung mit Bild in Y^{m-1} . Diesen Prozess setzen wir fort, bis wir eine Homotopie von g zu einer Abbildung mit Bild in (Y^n, Y^{n-1}) gefunden haben. \square

Später können wir den letzten Schritt im Beweis leicht mit der nächsten Folgerung begründen. Aber da die Folgerung zelluläre Approximation benutzt, brauchten wir oben einen anderen Beweis.

4.44. FOLGERUNG. *Es sei (X, A) ein CW-Paar mit $X = \operatorname{colim} X^n$ wie oben.*

- (1) *Dann sind die Inklusionen $\iota: X^n \rightarrow X$ und $\iota: (X^n, A) \rightarrow (X, A)$ jeweils n -zusammenhängende Abbildungen.*
- (2) *Wenn $J^{m+1} = \dots = J^n = \emptyset$, ist (X, X^m) ein n -zusammenhängendes Paar.*

BEWEIS. Wir schreiben S^k als CW-Komplex $* \cup_{S^{k-1}} D^k$ und wenden zelluläre Approximation an. □

4.45. DEFINITION. Eine Abbildung $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ zwischen Paaren heißt *schwache Homotopieäquivalenz*, wenn $\pi_k f: \pi_k(X, A, x_0) \rightarrow \pi_k(Y, B, f(x_0))$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $x_0 \in A$ ein Isomorphismus ist.

Zwei Paare (X, A) und (Y, B) heißen *schwach homotopieäquivalent*, wenn es $n \geq 0$, Paare (X_i, A_i) für $i = 0, \dots, n$ mit $X = X_0$ und $Y = X_n$ und (Z_i, C_i) für $i = 0, \dots, n-1$ und schwache Homotopieäquivalenzen $f_i: (X_i, A_i) \rightarrow (Z_i, C_i)$ und $g_i: (X_{i+1}, A_{i+1}) \rightarrow (Z_i, C_i)$ für $0 \leq i < n$ gibt.

Analog definieren wir schwache Homotopieäquivalenz für Räume.

Somit bedeutet „schwache Homotopieäquivalenz“ das gleiche wie „ n -zusammenhängende Abbildung“ für alle $n \geq 0$.

Offensichtlich ist jede Homotopieäquivalenz eine schwache Homotopieäquivalenz, die Umkehrung muss jedoch nicht gelten, siehe Beispiel 4.52. Um tatsächlich eine Äquivalenzrelation zu erhalten, haben wir Symmetrie und Transitivität durch die Einführung von Zwischenschritten wie im folgenden Diagramm sichergestellt:

$$(X, A) = (X_0, A_0) \xrightarrow{f_0} (Z_0, C_0) \xleftarrow{g_0} (X_1, A_1) \longrightarrow \dots \longrightarrow (Z_{n-1}, C_{n-1}) \xleftarrow{g_{n-1}} (X_n, A_n) = (Y, B).$$

In Übung 4.95 sehen wir, wie man diese Situation mit Hilfe von Satz 4.51 unten etwas vereinfachen kann.

4.46. SATZ (Whitehead). *Jede schwache Homotopieäquivalenz $f: (Y, A) \rightarrow (X, A)$ von CW-Paaren relativ zu A ist eine Homotopieäquivalenz. Wenn die Inklusion $\iota: Y \rightarrow X$ eines relativen Unterkomplexes (Y, A) von (X, A) eine schwache Homotopieäquivalenz ist, dann ist Y ein Deformationsretrakt von X .*

In der ersten Aussage dürfen wir nicht von Abbildungen $(Y, B) \rightarrow (X, A)$ sprechen, denn bereits für Abbildungen $f: (B, B) \rightarrow (A, A)$ kann sie falsch sein. Um zu zeigen, dass schwach homotopieäquivalente CW-Komplexe homotopieäquivalent sind, müssen wir später noch sicherstellen, dass die Räume X_i und Z_i in Definition 4.45 alle als CW-Komplexe gewählt werden können.

BEWEIS. Es sei $f: (Y, A) \rightarrow (X, A)$ eine stetige Abbildung relativ zu A , die wir nach Satz 4.43 als zellulär voraussetzen dürfen. Es sei Zf der Abbildungszylinder aus Definition 3.57. Da $f|_A = \operatorname{id}_A$, enthält Zf den Abbildungszylinder $A \times I$ von id_A als Unterraum. Wir definieren den *relativen Abbildungszylinder* $Z_A f$ als Pushout

$$\begin{array}{ccc} Zf & \longrightarrow & Z_A f \\ \uparrow & & \uparrow \\ A \times I & \longrightarrow & A, \end{array}$$

induziert von der Projektion $A \times I \rightarrow A$. Wir betrachten $(Z_A f, A)$ als CW-Paar mit Unterraum (X, A) , so dass $(Z_A f, X)$ zu jeder m -Zelle c_k^m von Y eine m -Zelle $c_k^m \times \{0\}$ und eine $(m+1)$ -Zelle $c_k^m \times (0, 1) \subset Z_A f$ enthält. Man beachte, dass der Rand der letzteren im m -Gerüst von $Z_A f$

liegt. Die Inklusion $\iota: Y \rightarrow Z_A f$ mit $\iota(y) = (y, 0)$ und die Projektion $p: Z_A f \rightarrow X$ mit $[(y, t)] \mapsto [f(y)]$ sind dann ebenfalls zellulär.

Wir erhalten f als zusammengesetzte Abbildung

$$Y \xrightarrow{\iota} Z_A f \xrightarrow{p} X.$$

Da p eine Deformationsretraktion ist, ist mit f auch ι eine schwache Homotopieäquivalenz. Aus der zweiten Behauptung folgt dann, dass Y ein Deformationsretrakt von $Z_A f$ ist, insbesondere ist f dann auch eine Homotopieäquivalenz.

Zur zweiten Behauptung konstruieren wir induktiv Homotopien $h^n: (X^n \cup Y) \times I \rightarrow X$ relativ zu Y ähnlich wie im Beweis der zellulären Approximation 4.43, so dass $h^n(\cdot, 0) = \text{id}$, $\text{im}(h^n(\cdot, 1)) \subset Y$, und $h^n|_{(X^{n-1} \cup Y) \times I} = h^{n-1}$, wobei $h^{-1} = \pi_Y$. Wie oben ergibt sich als Vereinigung die gesuchte Deformation $h: X \times I \rightarrow X$.

Im Falle $n = 0$ besagt unsere Voraussetzung, dass jede Zusammenhangskomponente von X einen Punkt aus Y enthält, und wir wählen $h^0(x, \cdot)$ als Pfad in X von x nach Y^0 für alle $x \in X^0 \setminus Y^0$.

Wir nehmen jetzt an, dass $n \geq 1$, und dass die Homotopie $h^{n-1} = h|_{(X^{n-1} \cup Y) \times I}$ bereits konstruiert ist. Dann setzen wir sie n -Zelle für n -Zelle von $X \setminus Y$ zu h^n fort. Ähnlich wie im obigen Beweis reicht es dafür, eine Abbildung $g: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, X^{n-1} \cup Y)$ als Abbildungen von Paaren zu einer Abbildung $(D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X^n \cup Y, X^{n-1} \cup Y)$ zu homotopieren.

Da die Inklusion eine schwache Homotopieäquivalenz ist, schließen wir aus der langen exakten Homotopiesequenz

$$\cdots \longleftarrow \pi_{n-1}(X, A) \xleftarrow{\cong} \pi_{n-1}(Y, A) \xleftarrow{\partial} \pi_n(X, Y) \longleftarrow \pi_n(X, A) \xleftarrow{\cong} \pi_n(Y, A) \longleftarrow \cdots$$

des Tripels (X, Y, A) aus Übung 3.112, dass $\pi_n(X, Y) = 0$, und die gesuchte Homotopie existiert. \square

4.47. BEMERKUNG. Für zwei schwach homotopieäquivalente Räume X und Y gibt es nach Definition 4.45 Isomorphismen $\pi_k(X) \cong \pi_k(Y)$ für alle $k \geq 0$; diese werden induziert von den Abbildungen f_i und g_i . Die Umkehrung dieser Aussage ist im Allgemeinen nicht richtig. Dazu betrachten wir beispielsweise die Räume

$$X = S^2 \times \mathbb{R}P^3 \quad \text{und} \quad Y = \mathbb{R}P^2 \times S^3.$$

Beide Räume haben als universelle Überlagerung $S^2 \times S^3$, und die isomorphen Fundamentalgruppen $\mathbb{Z}/2$. Dennoch werden wir später sehen, dass sie nicht homotopieäquivalent sind.

Als nächstes versuchen wir, einen beliebigen topologischen Raum durch einen CW-Komplex zu ersetzen. Bis auf schwache Homotopieäquivalenz ist das möglich. Für spätere Anwendungen formulieren wir den entsprechenden Begriff noch etwas allgemeiner.

4.48. DEFINITION. Ein n -zusammenhängendes CW-Modell für ein Paar (Y, A) ist ein n -zusammenhängendes CW-Paar (X, A) zusammen mit einer Abbildung $f: (X, A) \rightarrow (Y, A)$ relativ zu A , so dass $f_*: \pi_n(X, a) \rightarrow \pi_n(Y, a)$ injektiv ist und $f_*: \pi_k(X, a) \rightarrow \pi_k(Y, a)$ ein Isomorphismus für alle $k > n$ und alle $a \in A$.

Eine CW-Approximation eines Paares (Y, A) besteht aus einem CW-Paar (X, A) und einer Abbildung $f: (X, A) \rightarrow (Y, A)$ relativ zu A , so dass $f_*: \pi_k(X, x_0) \rightarrow \pi_k(Y, f(x_0))$ für alle $k \geq 0$ und alle $x_0 \in X$ ein Isomorphismus ist.

Eine CW-Approximation ist so etwas wie ein „ (-1) -zusammenhängendes CW-Modell“. Wenn A je einen Punkt pro Wegzusammenhangskomponente von Y enthält, ist eine CW-Approximation ein „ 0 -zusammenhängendes CW-Modell“ von (Y, A) .

Sei n beliebig. Für $k < n$ gilt $\pi_k(X) \cong \pi_k(A)$, da das Paar (X, A) n -zusammenhängend sein soll. Für $k > n$ hingegen hatten wir $\pi_k(X) \cong \pi_k(Y)$ gefordert. Im Fall $k = n$ faktorisiert die

Abbildung $\iota_*: \pi_n(A, a) \rightarrow \pi_n(Y, a)$ nach Voraussetzung als

$$\iota_*: \pi_n(A, a) \longrightarrow \pi_n(X, a) \xrightarrow{f_*} \pi_n(Y, a).$$

Aus dem Homomorphiesatz folgt, dass $\pi_n(X, a)$ in natürlicher Weise isomorph ist zu $\text{im } \iota_*$. Also suchen wir einen CW-Komplex X , der im obigen Sinne zwischen A und Y interpoliert. Das werden wir erreichen, indem wir an A Zellen der Dimension $k > n$ ankleben.

4.49. BEMERKUNG. Wir betrachten einen punktierten CW-Komplex (X, x_0) , somit ist $A = \{x_0\}$.

- (1) Ein 0-zusammenhängendes CW-Modell von X ist beispielsweise die Zusammenhangskomponente X_0 von X , die x_0 enthält.
- (2) Ein 1-zusammenhängendes CW-Modell von X ist beispielsweise die universelle Überlagerung $p: \tilde{X}_0 \rightarrow X_0$, denn $\pi_1(\tilde{X}_0, \tilde{x}_0) = \pi_0(\tilde{X}_0, \tilde{x}_0) = 0$ und $p_*: \pi_k(\tilde{X}_0, \tilde{x}_0) \cong \pi_k(X_0, x_0) \cong \pi_k(X, x_0)$ nach Folgerung 3.26. Wir überlegen uns dazu, dass die universelle Überlagerung eines CW-Komplexes wieder eine natürliche CW-Struktur trägt.

Daher nennt man in diesem Spezialfall ein n -zusammenhängendes CW-Modell eines punktierten CW-Komplexes auch eine „ n -zusammenhängende Überlagerung“.

4.50. BEISPIEL. Es folgen einige konkrete Beispiele.

- (1) Da $\pi_k(S^1) = 0$ für alle $k \geq 2$ nach Beispiel 3.27, ist $\{*\} \rightarrow S^1$ ein n -zusammenhängendes CW-Modell für alle $n \geq 1$.
- (2) Nach Beispiel 3.33 liefert die Hopf-Faserung $p: S^3 \rightarrow S^2$ Isomorphismen $p_*: \pi_k(S^3) \rightarrow \pi_k(S^2)$ für alle $k \geq 3$. Also ist die Hopf-Faserung ein 2-zusammenhängendes CW-Modell für S^2 .

Weitere Beispiele betrachten wir in Übung 4.96.

4.51. SATZ (CW-Approximation). *Zu jedem Paar (Y, A) und jedem $n \geq 0$ existiert ein n -zusammenhängendes CW-Modell. Zu jedem Paar (Y, A) existiert eine CW-Approximation.*

Sei $f_1: (X, A) \rightarrow (Y, A)$ ein n -zusammenhängendes und $f_2: (Z, B) \rightarrow (W, B)$ ein m -zusammenhängendes CW-Modell mit $n \geq m$, wobei wir CW-Approximationen wie (-1) -zusammenhängende CW-Modelle behandeln. Sei $g: (Y, A) \rightarrow (W, B)$ eine Abbildung, dann existiert eine zelluläre Abbildung $\ell: (X, A) \rightarrow (Z, B)$, so dass $f_2 \circ \ell$ relativ A zu $g \circ f_1$ homotop ist. Je zwei solche Abbildungen sind relativ A homotop.

BEWEIS. Für die erste Behauptung behandeln wir jede Wegzusammenhangskomponente von Y einzeln und nehmen daher ab jetzt an, dass Y wegzusammenhängend ist. Falls $A = \emptyset$, ist $X = \emptyset$ das eindeutige n -zusammenhängende CW-Modell. Anderfalls fixieren wir einen Basispunkt in $x_0 \in A$.

Dann konstruieren wir ein CW-Paar (X, A) und eine Abbildung $f: (X, A) \rightarrow (Y, A)$ relativ zu A . Für alle k konstruieren wir induktiv ein k -Skelett X^k mit einer Abbildung $f^k: X^k \rightarrow Y$, so dass $f^k|_{X^{k-1}} = f^{k-1}$ und

$$\begin{aligned} f_*^k: \pi_n(X^k) &\hookrightarrow \pi_n(Y) && \text{injektiv, falls } n \geq 0, \\ f_*^k: \pi_m(X^k) &\xrightarrow{\cong} \pi_m(Y) && \text{ein Isomorphismus für alle } m \text{ mit } n < m < k, \\ \text{und } f_*^k: \pi_k(X^k) &\twoheadrightarrow \pi_k(Y) && \text{surjektiv ist.} \end{aligned}$$

Wir starten mit $X^n = A$ und $f^n = f|_{X^n} = f|_A$. Dann folgt mit Folgerung 4.44 (2) bereits, dass (X, A) ein n -zusammenhängendes Paar ist.

Wenn alle $f^k: X^k \rightarrow Y$ konstruiert sind, setzen wir schließlich

$$X = \text{colim } X^k \quad \text{und} \quad f = \text{colim } f^k: X \longrightarrow Y.$$

Nach zellulärer Approximation gilt $\pi_k(X) \cong \pi_k(X^{k+1})$, also erhalten wir eine n -zusammenhängende CW-Approximation.

Sei also $k > n$, und seien X^{k-1} und $f^{k-1}: X^{k-1} \rightarrow Y$ bereits konstruiert, so dass die obigen Bedingungen erfüllt sind. Da die Inklusion $X^{k-1} \hookrightarrow X^k$ nach Folgerung 4.44 (1) eine $(k-1)$ -zusammenhängende Abbildung ist und f_*^{k-1} über f_*^k faktorisiert, erfüllt f_*^k die obigen Eigenschaften für alle $m < k-1$, und $f_*^k: \pi_{k-1}(X^k) \rightarrow \pi_{k-1}(Y)$ ist automatisch surjektiv.

Die Konstruktion von X^k und f^k erfolgt in zwei Schritten. Falls $k = 1$, sei J_1^1 die Menge der Wegzusammenhangskomponenten von X^0 , die den Basispunkt x_0 nicht enthalten. Falls $k \geq 2$, wählen wir eine Erzeugermenge J_1^k des Kernes von $f_*^{k-1}: \pi_{k-1}(X^{k-1}) \rightarrow \pi_{k-1}(Y)$. Für jedes $j \in J_1^k$ sei $\varphi_j^k: S^{k-1} \rightarrow X^{k-1}$ eine punktierte Abbildung, die das entsprechende Element von $\pi_{k-1}(X^{k-1})$ darstellt. Da $[f^{k-1} \circ \varphi_j^k] = 0 \in \pi_{k-1}(Y)$, existiert eine Abbildung $g_j^k: D^k \rightarrow Y$ mit $g_j^k|_{S^{k-1}} = f^{k-1} \circ \varphi_j^k$. Wir kleben eine Zelle e_j^k mit φ_j^k an X^{k-1} an und setzen f^{k-1} durch f_j^k auf e_j^k fort, so dass

$$\begin{array}{ccc} D^k & \xrightarrow{\Phi_j^k} & X^{k-1} \cup e_j^k \xrightarrow{f_j^k} Y \\ \uparrow & & \uparrow \\ S^{k-1} & \xrightarrow{\varphi_j^k} & X^{k-1} \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{g_j^k} \\ \nearrow f^{k-1} \end{array}$$

Sei $\psi^k: \coprod_{j \in J_1^k} S^{k-1} \rightarrow X^{k-1}$ durch die φ_j^k für $j \in J_1^k$ induziert, dann setzen wir

$$X_1^k = \left(\coprod_{j \in J_1^k} D^k \right) \cup_{\psi^k} X^{k-1} \quad \text{und} \quad f_1^k = f^{k-1} \cup \bigcup_{j \in J_1^k} f_j^k: X_1^k \rightarrow Y.$$

Nach Konstruktion ist $f_{1*}^k: \pi_{k-1}(X_1^k) \rightarrow \pi_{k-1}(Y)$ jetzt injektiv und somit ein Isomorphismus,

$$\begin{array}{ccc} \pi_{k-1}(X^{k-1}) & \xrightarrow{f_*^{k-1}} & \pi_{k-1}(X_1^k) \\ \downarrow f_*^{k-1} & \nearrow f_{1*}^k & \downarrow \\ \pi_{k-1}(Y) & \xleftarrow{f_*^k} & \pi_{k-1}(X^k) \end{array}$$

Daran ändert sich nichts mehr, wenn wir weitere k -Zellen hinzufügen.

Im zweiten Schritt wählen wir eine Erzeugermenge J_2^k von $\pi_k(Y)$ und Abbildungen $f_j^k: S^k \rightarrow (Y, y_0)$, die die entsprechenden Elemente von $\pi_k(Y)$ repräsentieren. Als Verklebeabbildung für die neuen k -Zellen wählen wir die konstante Abbildung $S^{k-1} \rightarrow \{x_0\} \rightarrow X^{k-1}$. Jetzt sei $J^k = J_1^k \sqcup J_2^k$, und wir erhalten

$$X^k = X_1^k \vee \bigvee_{j \in J_2^k} S^k \quad \text{und} \quad f^k = f_1^k \vee \bigvee_{j \in J_2^k} f_j^k: X^k \rightarrow Y.$$

Dann ist $f_*^k: \pi_k(X) \rightarrow \pi_k(Y)$ surjektiv, und die erste Behauptung somit vollständig bewiesen.

Für die zweite Behauptung erhalten wir X^0 und $f^0: X^0 \rightarrow Y$, indem wir aus jeder Wegzusammenhangskomponente Y_0 von Y , die keinen Punkt aus A enthält, einen Punkt $y_0 \in Y_0$ zu A hinzunehmen. Anschließend verfahren wir weiter wie oben für $n = 0$, beginnend bei $k = 1$. Da $\pi_0(A) \rightarrow \pi_0(Y)$ bereits surjektiv ist, liefert die Konstruktion am Ende auch einen Isomorphismus $\pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$.

Zur letzten Behauptung nehmen wir an, dass $X^n = A$ falls $n \geq 0$. Andernfalls bilden wir wie oben ein n -zusammenhängendes CW-Modell (X', A) von (X, A) mit $X'^n = A$. Nach dem Satz 4.46 von Whitehead sind (X', A) und (X, A) homotopieäquivalent relativ zu A , so dass wir (X, A) durch (X', A) ersetzen dürfen. Außerdem nehmen wir an, dass $Z \rightarrow W$ eine Inklusionsabbildung ist,

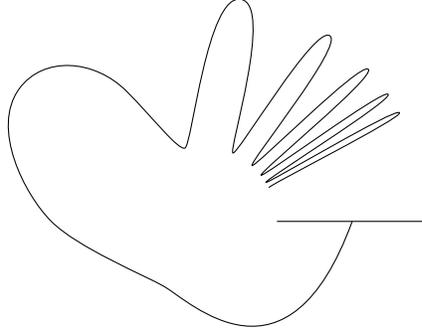


ABBILDUNG 4.5. Das Topologische Huhn

die wir ι nennen. Andernfalls ersetzen wir (W, B) durch den relativen Abbildungszylinder $(Z_B f_2, B)$, der (W, B) als Deformationsretrakt enthält, und g durch die entsprechende Abbildung im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 (X', A) & \xrightarrow{\sim} & (X, A) & \xrightarrow{f_1} & (Y, A) \\
 \downarrow \ell & \swarrow & \downarrow & \searrow g & \downarrow \\
 (Z, B) & \xleftarrow{\iota} & (Z_B f_2, B) & \xrightarrow{\sim} & (W, B) .
 \end{array}$$

f_2

Jetzt können wir ähnlich wie im Beweis der zellulären Approximation 4.43 induktiv Zelle für Zelle Homotopien $h^k: X^k \times I \rightarrow W$ konstruieren, so dass $h^k(\cdot, 0) = (g \circ f_1)|_{X^k}$, $h^k(\cdot, 1): X^k \rightarrow Z \subset W$ und $h^k|_{X^{k-1} \times I} = h^{k-1}$, wobei $h^n = (g \circ f_1 \circ p_X)|_{A \times I}: A \times I \rightarrow B \subset Z$ stationär sei. Wie oben ergibt sich als Vereinigung eine Homotopie $h: X \times I \rightarrow X$ von $g \circ f_1$ zu einer Abbildung nach Z . Nach Satz 4.43 macht eine weitere Homotopie diese Abbildung zellulär.

Sei jetzt $h^{k-1}: X^{k-1} \times I \rightarrow W$ bereits konstruiert, und sei e_j^k eine k -Zelle von X . Da $h^{k-1}(\cdot, 1) \circ \varphi_j^k$ nach Induktionsvoraussetzung S^{k-1} nach Z abbildet, reicht es ähnlich wie im Beweis des Satzes 4.46 von Whitehead, eine Abbildung $(D^k, S^{k-1}) \rightarrow (W, Z)$ als Abbildung von Paaren zu einer Abbildung $D^k \rightarrow Z$ zu homotopieren, um h^{k-1} auf $e_j^k \times I$ fortzusetzen. Das ist möglich, denn aus der langen exakten Sequenz 3.19 des Paares (W, Z) erhalten wir

$$\cdots \longleftarrow \pi_{k-1}(W) \longleftarrow \pi_{k-1}(Z) \longleftarrow \underbrace{\pi_k(W, Z)}_{=0} \longleftarrow \pi_k(W) \xleftarrow{\cong} \pi_k(Z) \longleftarrow \cdots .$$

Um die Eindeutigkeit zu zeigen, seien $\ell_0, \ell_1: X \rightarrow Z$ wie oben gegeben. Die zugehörigen Homotopien $h_0, h_1: X \times I \rightarrow W$ liefern eine Homotopie relativ zu A von ℓ_0 und ℓ_1 als Abbildungen nach W . Mit dem gleichen Trick wie oben können wir diese Homotopie relativ zu $A \times I \cup X \times \{0, 1\}$ Zelle für Zelle zu einer Homotopie zwischen ℓ_0 und ℓ_1 mit Werten in Z deformieren, was noch zu zeigen war. \square

4.52. BEISPIEL. Wir betrachten das *topologische Huhn*

$$Y = \left\{ \left(2 + \sin \frac{2\pi^2}{\varphi} \right) e^{i\varphi} \mid \varphi \in (0, 2\pi] \right\} \cup [1, 3] \subset \mathbb{C} ,$$

siehe Abbildung 4.5, auch bekannt als *polnischer Kreis*. Die starken Oszillationen machen den Übergang von Punkten mit positivem Argument zur positiven reellen Achse zu einem unüberwindbaren Hindernis für Abbildungen $S^k \rightarrow Y$, somit ist $\pi_k(Y) = 0$ für alle k . Eine CW-Approximation wäre

demnach ein einzelner Punkt $X = \{x_0\}$, den wir auf y_0 abbilden. Dass $X \rightarrow Y$ keine Homotopieäquivalenz ist, sehen wir daran, dass es eine nicht-zusammenziehbare Abbildung $Y \rightarrow S^1$ gibt, gegeben durch $z \mapsto \frac{z}{|z|}$. Da alle CW-Approximationen nach Satz 4.51 homotopieäquivalent sind, sagen wir, dass Y nicht den *Homotopietyp eines CW-Komplexes* hat. Wir haben jetzt also auch ein Beispiel von schwach homotopieäquivalenten, aber nicht homotopieäquivalenten Räumen.

In Übung 4.95 können wir jetzt zeigen, dass je zwei schwach homotopieäquivalente CW-Komplexe homotopieäquivalent sind, und dass schwach homotopieäquivalente topologische Räume homotopieäquivalente CW-Approximationen besitzen.

4.53. BEMERKUNG. Die Sätze 4.43, 4.46 und 4.51 zusammen erklären die Rolle der Homotopiegruppen und der CW-Komplexe in der Homotopietheorie.

- (1) Zu jedem topologischen Raum Y gibt es eine CW-Approximation $f_1: X \rightarrow Y$, und zu jedem Morphismus $g: Y \rightarrow W$ und jeder CW-Approximation $f_2: Z \rightarrow W$ gibt es bis auf Homotopie einen entsprechenden Morphismus $\ell: X \rightarrow Z$. Da all dies nur bis auf Homotopie wohldefiniert ist, erhalten wir Funktoren $\mathcal{HkTop} \rightarrow \mathcal{HCW}$ und $\mathcal{HkwH} \rightarrow \mathcal{HCW}$, die mit schwacher Homotopieäquivalenz verträglich sind.
- (2) Diese Funktoren bilden keine Äquivalenzen von Kategorien, da die Abbildung $[Y, W] \rightarrow [X, Z]$ im Allgemeinen nicht bijektiv ist, wie wir anhand der Abbildung $Y \rightarrow S^1$ im obigen Beispiel gesehen haben. Im nächsten Abschnitt werden wir den Begriff der Homotopie und der Homotopiekategorie etwas allgemeiner formulieren, um dieses Problem zu lösen.

Letztlich sollte es nicht allzusehr verwundern, dass CW-Komplexe und Homotopiegruppen so gut zusammenarbeiten: sowohl Homotopiegruppen als auch Abbildungen von CW-Komplexen in andere Räume basieren auf dem Verhalten von Abbildungen der Paare (D^k, S^{k-1}) in andere Räume, was wir in den vorangegangenen Beweisen auch immer wieder benutzt haben.

Als letztes in diesem Abschnitt wollen wir uns überlegen, welche der Standardkonstruktionen aus CW-Komplexen wieder CW-Komplexe machen.

4.54. PROPOSITION. *Die folgenden Konstruktionen mit CW-Konstruktion liefern in den Kategorien $k\text{Top}$ und $kw\mathcal{H}$ wieder CW-Komplexe:*

- (1) beliebige Koproducte,
- (2) Pushouts entlang zellulärer Abbildungen von einem Unterkomplex in einen anderen CW-Komplex,
- (3) Kolimiten von Inklusionen von Unterkomplexen,
- (4) Produkte und reduzierte Produkte endlich vieler CW-Komplexe.

In (4) dürfen wir nicht mit dem gewöhnlichen topologischen Produkt arbeiten, da das Produkt zweier unendlich großer CW-Komplexe im Allgemeinen eine gröbere als die CW-Topologie trägt. Die Kategorie \mathcal{CW} ist nach Proposition 4.10 kovollständig. Sie ist jedoch nicht bivollständig, da bereits die einfachsten Pullbacks, nämlich Urbilder von Punkten aus Y^0 unter zellulären Abbildungen $X \rightarrow Y$ im Allgemeinen keine CW-Komplexe mehr sind.

BEWEIS. In jedem der Punkte (1)–(4) findet sich eine natürliche CW-Struktur auf dem neu konstruierten Raum. In (1)–(3) liefern die universellen Eigenschaften, dass diese CW-Struktur die gleiche Topologie induziert wie die universelle Konstruktion. Die Details sind Übung 4.97. In (4) reduzieren wir den Beweis für Produkte zunächst auf kompakte, das heißt, endliche CW-Komplexe, siehe Übung 4.98. Hieraus leitet man mit (2) das analoge Resultat für $X \wedge Y$ ab. \square

Für kompliziertere Konstruktionen sind CW-Komplexe leider nicht mächtig genug. Immerhin gilt aber folgendes Resultat, das wir ohne Beweis angeben.

4.55. SATZ (Milnor). *Es seien X, Y homotopieäquivalent zu CW-Komplexen, dann ist auch der Abbildungsraum $C(X, Y)$ homotopieäquivalent zu einem CW-Komplex.*

4.e. Modellkategorien

Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass der Begriff der „schwachen Homotopieäquivalenz“ es uns ermöglicht, anstelle beliebiger topologischer Räume nur CW-Komplexe zu betrachten, die wir weit besser verstehen. Wir haben in Bemerkung 4.53 (2) aber auch gesehen, dass unser Begriff einer naiven Homotopiekategorie $\mathcal{H}k\mathcal{W}\mathcal{H}$ nicht gut zur Methode der CW-Approximation passt. Daher werden wir in diesem Abschnitt einen etwas anderen Begriff einer Homotopiekategorie entwickeln. Mehr Details dazu finden Sie in [Ho, Qui].

Bisher haben wir die Begriffe Faserung, Kofaserung und schwache Äquivalenz recht wahllos benutzt. In diesem Kapitel führen wir den Begriff einer Modellkategorie ein, der all diese Begriffe umfasst. Laut Quillen ist „Modellkategorie“ eine Abkürzung für „Kategorie von Modellen für eine Homotopietheorie“. Die Kategorie der kompakt erzeugten schwach-Hausdorff-Räume ohne Basispunkte trägt mehrere solcher Modellstrukturen. Für Retrakte von Abbildungen verweisen wir auf Übung 3.117.

4.56. DEFINITION. Eine *Modellstruktur* $(w\mathcal{M}, f\mathcal{M}, c\mathcal{M})$ auf einer Kategorie \mathcal{M} besteht aus drei Unterkategorien, den *Faserungen* $f\mathcal{M}$, den *Kofaserungen* $c\mathcal{M}$, und den *schwachen Äquivalenzen* $w\mathcal{M}$, sowie zwei funktoriellen Faktorisierungen $f = p \circ i = q \circ j$ für alle Morphismen f in \mathcal{M} , so dass die folgenden Axiome gelten.

- (M1) *Retrakte*. Ein Retrakt einer Faserung, Kofaserung oder schwachen Äquivalenz ist wieder vom gleichen Typ.
- (M2) *Zwei-von-drei-Eigenschaft*. Seien $f: Y \rightarrow Z$ und $g: X \rightarrow Y$ Morphismen. Wenn zwei der drei Morphismen f , g und $f \circ g$ schwache Äquivalenzen sind, dann auch der dritte.
- (M3) *Liftungseigenschaft*. Wenn im äußeren kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & E \\ i \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

der Morphismus i eine Kofaserung, p eine Faserung und i oder p eine schwache Äquivalenz ist, dann existiert eine Abbildung $h: X \rightarrow E$, so dass das gesamte Diagramm kommutiert.

- (M4) *Funktorielle Faktorisierungen*. In den Faktorisierungen $f = p \circ i = q \circ j$ sind i, j Kofaserungen, p, q Faserungen und p und j schwache Äquivalenzen.

Eine *Modellkategorie* $(\mathcal{M}, w\mathcal{M}, f\mathcal{M}, c\mathcal{M})$ ist eine bivollständige Kategorie mit einer Modellstruktur.

Die Unterkategorien $c\mathcal{M}$, $f\mathcal{M}$ und $w\mathcal{M}$ sind im Allgemeinen nicht voll. Stattdessen folgt aus den Axiomen, dass sie jeweils alle Objekte enthalten. Wir nennen eine Faserung oder Kofaserung *trivial* oder *azyklisch*, wenn sie außerdem eine schwache Äquivalenz ist.

4.57. BEMERKUNG. Wir beginnen mit einigen einfachen Schlussfolgerungen.

- (1) *Eckmann-Hilton-Dualität*. Wenn man in einer Kategorie mit Modellstruktur alle Pfeile umdreht, erhält man wieder eine Modellstruktur; allerdings tauschen Faserungen und Kofaserungen ihre Rollen. Das bedeutet: wenn ein bestimmter Sachverhalt in allen Modellstrukturen (oder in allen Modellkategorien) gilt, dann gilt die Eckmann-Hilton-duale Aussage ebenfalls in allen Modellstrukturen (Modellkategorien).

- (2) In einer Modellstruktur $(w\mathcal{M}, f\mathcal{M}, c\mathcal{M})$ legen $w\mathcal{M}$ und $c\mathcal{M}$ gemeinsam $f\mathcal{M}$ fest, siehe Übung 4.99. Das heißt aber nicht, dass zur jeder Wahl von $w\mathcal{M}$ und $c\mathcal{M}$ bereits eine Modellstruktur existiert.
- (3) Es sei $A \rightarrow X$ eine Kofaserung und $A \rightarrow Y$ beliebig, dann ist der Pushout $Y \rightarrow X \cup_A Y$ wieder eine Kofaserung, siehe Übung 4.100.

Da Modellkategorien bivollständig sind, gibt es immer ein initiales Objekt \emptyset und ein terminales Objekt $*$, siehe Beispiel 4.9(1) und (2). In einer punktierten Kategorie (zum Beispiel Top_+) stimmen beide überein, wir behalten aber trotzdem die obige Notation bei.

4.58. DEFINITION. Es sei $(\mathcal{M}, w\mathcal{M}, f\mathcal{M}, c\mathcal{M})$ eine Modellkategorie mit initialem Objekt \emptyset und terminalem Objekt $*$. Ein Objekt X von \mathcal{M} heißt *fibrant*, wenn $X \rightarrow *$ eine Faserung ist, und *kofibrant*, wenn $\emptyset \rightarrow X$ eine Kofaserung ist. Wir bezeichnen mit \mathcal{M}_{cf} die volle Unterkategorie der Objekte, die sowohl fibrant als auch kofibrant sind.

4.59. BEISPIEL. Es folgen einige Beispiele von Modellstrukturen auf Kategorien topologischer Räume.

- (1) Es sei $\mathcal{T} = Top, kTop$ oder $kw\mathcal{H}$ eine Kategorie topologischer Räume. Dann besitzt \mathcal{T} eine Modellstruktur, in der $w\mathcal{M}$ gerade die Homotopieäquivalenzen sind. Faserungen sind die Hurewicz-Faserungen aus Definition 3.22 und Kofaserungen die abgeschlossenen Kofaserungen aus Definition 3.55. In dieser Kategorie sind alle Objekte fibrant und kofibrant, es gilt also $Top_{cf} = Top$. Wir nennen sie die *Hurewicz-*, die *naive* oder die *Strøm-Modellstruktur*. Wir haben Axiom (M1) in den Übungen 3.117, 3.127 und 4.101 bewiesen, und (M3) in den Übungen 3.131 und 3.132. Axiom (M2) gilt offensichtlich.
- (2) Da schwache Homotopieäquivalenz allein mit Hilfe der Homotopiegruppen definiert ist, ist dieser Begriff unter Umständen hilfreicher als Homotopieäquivalenz im klassischen Sinne. In der sogenannten *Standard-*, *Serre-* oder *Quillen-Modellstruktur* sind die schwachen Äquivalenzen genau die schwachen Homotopieäquivalenzen, die Faserungen sind die Serre-Faserungen aus Definition 3.22, und die Kofaserungen sind Retrakte von relativen Zellkomplexen. *Relative Zellkomplexe* sind etwas allgemeiner als die relativen CW-Komplexe aus Definition 4.37. Hier darf man in jedem Schritt beliebig viele Zellen beliebiger Dimension ankleben, so dass eine Zelle auch an eine Zelle gleicher oder größerer Dimension angeklebt werden kann. Jetzt ist immer noch jedes Objekt fibrant. Kofibrant sind jedoch nur noch Zellkomplexe und ihre Retrakte.
- (3) Die *gemischte* oder *Cole-Modellstruktur* benutzt schwache Homotopieäquivalenzen und Hurewicz-Faserungen. Die passenden Kofaserungen werden durch Bemerkung 4.57 (2) gegeben. Nach wie vor sind alle Objekte fibrant, kofibrant sind nur Räume vom Homotopietyp eines CW-Komplexes.
- (4) Anstatt Homotopiegruppen zur Definition von schwacher Äquivalenz heranzuziehen, könnte man auch die Kategorie der Überlagerungen und die Kohomologie lokal konstanter Garben zur Definition von $w\mathcal{M}$ benutzen. In diesem Fall wäre beispielsweise der polnische Kreis (das „topologische Huhn“) aus Beispiel 4.52 zu S^1 schwach äquivalent. Leider ist mir keine Modellstruktur bekannt, die auf derartigen schwachen Äquivalenzen aufbaut.

In allen Fällen ist (M4) recht aufwändig nachzuprüfen, weshalb wir darauf hier verzichten wollen.

4.60. DEFINITION. Sei $(\mathcal{M}, w\mathcal{M}, f\mathcal{M}, c\mathcal{M})$ eine Modellkategorie. Zwei Abbildungen $f, g: X \rightarrow Y$ heißen *linkshomotop*, wenn es einen Raum Z (den *Zylinder*) mit Abbildungen $\iota_0, \iota_1: X \rightarrow Z$, eine schwache Äquivalenz $p: Z \rightarrow X$ und eine *Linkshomotopie* $h: Z \rightarrow Y$ gibt, so dass das folgende

Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 X \sqcup X & \xrightarrow{(f,g)} & Y \\
 (id_X, id_X) \downarrow & \searrow^{(\iota_0, \iota_1)} \uparrow h & \downarrow \\
 X & \xleftarrow[p]{\sim} & Z
 \end{array} \quad (1)$$

Sie heißen *rechtshomotop*, wenn es einen Raum P (den *Pfadraum*) mit Abbildungen $\varepsilon_0, \varepsilon_1: P \rightarrow Y$, eine schwache Äquivalenz $u: Y \rightarrow P$ und eine *Rechtshomotopie* $k: X \rightarrow P$ gibt, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 Y \times Y & \xleftarrow{(f,g)} & X \\
 (id_Y, id_Y) \uparrow & \nwarrow^{(\varepsilon_0, \varepsilon_1)} \downarrow k & \downarrow \\
 Y & \xrightarrow[u]{\sim} & P
 \end{array} \quad (2)$$

Der „klassische“ Homotopiebegriff für stetige Abbildungen aus Definition 2.2 entspricht Linkshomotopie mit dem festen Zylinder $X \times I$. Nach dem Exponentialgesetz 1.101 (2) ist das äquivalent zu Rechtshomotopie mit dem Pfadraum Y^I . Die Definition hier ist zum einen allgemeiner, weil sie auch für Modellkategorien funktioniert, die überhaupt nichts mit topologischen Räumen zu tun haben, als auch potentiell gröber, weil man in \mathcal{Top} oder $kw\mathcal{H}$ auch andere Zylinder und Pfadräume benutzen darf und dadurch unter Umständen mehr Homotopien bekommt.

4.61. BEMERKUNG. Diese beiden Begriffe sind zueinander dual und stimmen nicht immer überein. Sie hängen beide von den schwachen Äquivalenzen in \mathcal{M} ab, aber nicht von der Wahl der Faserungen und der Kofaserungen. Wenn X kofibrant ist, ist Linkshomotopie eine Äquivalenzrelation auf $\text{Hom}(X, Y)$, und Linkshomotopie impliziert Rechtshomotopie. Die dazu duale Aussage gilt ebenfalls. Wenn wir uns also auf die volle Unterkategorie \mathcal{M}_{cf} einschränken, stimmen beide Homotopiebegriffe überein und definieren eine Äquivalenzrelation auf den Morphismen-Mengen. Es bezeichne \mathcal{HM}_{cf} eine Kategorie mit den gleichen Objekten wie \mathcal{M}_{cf} und Homotopieklassen von Morphismen.

4.62. DEFINITION. Es sei \mathcal{M} eine Modellkategorie. Eine *Homotopiekategorie* zu \mathcal{M} ist eine Kategorie $\text{Ho}\mathcal{M}$ mit einem Funktor $\text{Ho}: \mathcal{M} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{M}$, der alle schwachen Äquivalenzen auf Isomorphismen abbildet, so dass jeder andere Funktor $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}$, der schwache Äquivalenzen auf Isomorphismen abbildet, auf eindeutige Weise über $\text{Ho}\mathcal{M}$ faktorisiert. Für Objekte X, Y von \mathcal{M} definieren wir

$$[X, Y] = \text{Hom}_{\text{Ho}\mathcal{M}}(\text{Ho } X, \text{Ho } Y).$$

Man kann sich anhand der Diagramme zu Definition 4.60 überzeugen, dass der Funktor Ho links- oder rechtshomotope Abbildungen auf den gleichen Morphismus in $\text{Ho}\mathcal{M}$ abbildet. Er verhält sich also ähnlich wie der Funktor $\mathcal{Top} \rightarrow \mathcal{HTop}$. Er kann aber auch Abbildungen identifizieren, die auf den ersten Blick nicht homotop sind, siehe Bemerkung 4.53 (2).

In der Sprache von Kategorien ist $\text{Ho}\mathcal{M}$ die *Lokalisierung* von \mathcal{M} an $w\mathcal{M}$. Insbesondere hängt die Homotopiekategorie nicht von der Wahl der Faserungen und Kofaserungen ab. Außerdem ist die Lokalisierung bis auf Äquivalenzen von Kategorien eindeutig, so dass insbesondere $[X, Y]$ wohldefiniert ist. Man kann Lokalisierungen (mit gewissen mengentheoretischen Schwierigkeiten) konstruieren, wobei man die Objekte beibehält und als Morphismen Äquivalenzklassen von „Zickzacks“ der Form

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & C_1 & & \cdots & & C_k \\
 & \swarrow \sim & \searrow & \swarrow \sim & \searrow & \swarrow \sim & \searrow \\
 A & & A_1 & & A_{k-1} & & B
 \end{array}$$

einführt, bei denen alle nach links weisenden Pfeile aus $w\mathcal{M}$ stammen, ähnlich wie in Definition 4.45. Bei Quillen heißen die hier definierten Modellkategorien *abgeschlossen*, das heißt, dass ein Morphismus in \mathcal{M} genau dann eine schwache Äquivalenz ist, wenn er in $\text{Ho}\mathcal{M}$ auf einen Isomorphismus abgebildet wird. Das hat nichts mit dem Begriff „abgeschlossen“ aus Abschnitt 4.c zu tun.

Die Modellstruktur erlaubt eine einfachere Beschreibung der Homotopiekategorie bis auf Äquivalenz. An dieser Stelle kommen auch Faserungen und Kofaserungen ins Spiel.

4.63. SATZ (Fundamental- über Modellkategorien, Quillen). *Es sei \mathcal{M} eine Modellkategorie, dann induziert der Funktor Ho eine Äquivalenz von Kategorien $\mathcal{HM}_{cf} \rightarrow \text{Ho}\mathcal{M}$.*

Insbesondere ist $\text{Ho}\mathcal{M}$ selbst eine Kategorie im herkömmlichen Sinn. Wir haben in Bemerkung 4.53 gesehen, dass der klassische Abbildungs- und Homotopiebegriff nicht gut zu schwachen Homotopieäquivalenzen passt. Um $[X, Y]$ wie in Definition 4.62 zu bestimmen, kann man also X und Y durch schwach äquivalente, fibrant-kofibrante Objekte ersetzen, bevor man $[X, Y]$ durch Homotopien im Sinne von Definition 4.60 beschreiben kann. In der Tat reicht es sogar, X durch ein kofibrantes und Y durch ein fibrantes Objekt zu ersetzen.

4.64. BEISPIEL. Wir wollen uns dieses Resultat anhand der obigen Modellstrukturen auf $\mathcal{T} = \text{Top}$, $k\text{Top}$ oder $kw\mathcal{H}$ anschauen. In der Tat bilden topologische Räume eine interessante Beispielskategorie, um das Verhalten verschiedener Modellkategorien zu studieren. Allerdings sind in Beispiel 4.59 stets alle Objekte fibrant. Quillen hat gesehen, dass das nicht in jeder Modellkategorie so sein muss.

- (1) In der Strøm-Modellstruktur sind alle Objekte fibrant und kofibrant. Wenn $f, g: X \rightarrow Y$ im klassischen Sinne von Definition 2.2 homotop sind, können wir $Z = X \times I$ in Definition 4.60 (1) wählen, somit sind f und g linkshomotop. Seien umgekehrt f und g linkshomotop, dann ist $p: Z \rightarrow X$ eine Homotopieäquivalenz, und es existiert ein Homotopieinverses $q: X \rightarrow Z$. In der Notation von Definition 4.60 (1) sind dann ι_0, ι_1 und q im klassischen Sinne homotop. Wir erhalten klassische Homotopien

$$f = h \circ \iota_0 \sim h \circ \iota_1 = g .$$

Also stimmt der neue Homotopiebegriff in der Strøm-Modellstruktur mit dem klassischen überein, und es ist $\text{Ho}\mathcal{T} = \mathcal{HT}$ die Homotopiekategorie aus Bemerkung 2.5 (2).

- (2) Wenn wir zu punktierten Räumen übergehen, müssen wir als schwache Äquivalenzen punktierte Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ zulassen, für die eine punktierte Abbildung $g: Y \rightarrow X$ existiert, so dass $g \circ f$ und $f \circ g$ als unpunktete Abbildungen homotop zur Identität sind, siehe Übung 4.103 mit $A = \text{pt}$.

Nach wie vor sind alle Objekte fibrant. Kofibrant sind jedoch nur noch die gut punktierten Räume aus Definition 3.55. Die zugehörige Homotopiekategorie hat als Objekte also nur gut punktierte Räume, und hier sind schwache Äquivalenzen wieder genau die punktierten Homotopieäquivalenzen. Somit erhalten wir die korrekte Homotopiekategorie, indem wir uns in unser naiven Homotopiekategorie auf gut punktierte Räume einschränken. Jeden nicht gut punktierten Raum X können wir, wenn nötig, durch den Abbildungszyylinder der Inklusion $\{x_0\} \hookrightarrow X$ ersetzen.

- (3) In der Quillen-Modellkategorie ist jeder Raum nach Satz 4.51 zu einem CW-Komplex schwach äquivalent. Also reicht es, Abbildungen $f, g: X \rightarrow Y$ zwischen CW-Komplexen zu betrachten.

Klassische Homotopie impliziert wieder Homotopie im neuen Sinn. Seien also f, g im Sinne von Definition 4.60 homotop. Wir approximieren das Zylinderobjekt Z durch einen CW-Komplex $k: W \rightarrow Z$ und erhalten mit Satz 4.51 zwei Abbildungen $j_0, j_1: X \rightarrow W$,

so dass $k \circ j_i = \iota_i$ für $i = 0, 1$. Außerdem ist $p \circ k$ eine Homotopieäquivalenz nach dem Satz 4.46 von Whitehead. Sei $q: X \rightarrow W$ ein Homotopieinverses, dann folgt im klassischen Sinne $q \sim j_0 \sim j_1$, und wie oben sind auch f und g im klassischen Sinne homotop.

Also ist die Homotopiekategorie zur Quillen-Modellstruktur äquivalent zur naiven Homotopiekategorie \mathcal{HCW} der CW-Komplexe, siehe Bemerkung 4.53 (1). Letztere ist deutlich übersichtlicher als die Kategorie \mathcal{HT}_{cf} aller Retrakte von Zellkomplexen, die uns der Satz von Quillen liefert. Außerdem ist \mathcal{HCW} eine volle Unterkategorie der Kategorie \mathcal{HTop} . Wir erhalten $[X, Y]$, indem wir X durch einen schwach homotopieäquivalenten CW-Komplex ersetzen, bevor wir klassische Homotopien betrachten.

4.f. Faser- und Kofaser-Sequenzen

Ab sofort sei stets \mathcal{T} eine „schöne“ Kategorie topologischer Räume, also beispielsweise $k\mathcal{Top}$ oder $kw\mathcal{H}$. Wir arbeiten ab jetzt wieder überwiegend mit der zugehörigen punktierten Kategorie \mathcal{T}_+ . Außerdem fixieren wir eine Modellstruktur auf \mathcal{T}_+ , beispielsweise die Ström- oder die Quillen-Modellstruktur aus Beispiel 4.59 (1) beziehungsweise (2). In diesem Sinne verstehen wir schwache Äquivalenzen $w\mathcal{T}_+$, Faserungen $f\mathcal{T}_+$ und Kofaserungen $c\mathcal{T}_+$. Mit $\text{Ho}\mathcal{T}_+$ bezeichnen wir eine zugehörige Homotopiekategorie, also etwa die „naive“ Homotopiekategorie \mathcal{HT}_+ der gut punktierten Räume im ersten und \mathcal{HCW}_+ im zweiten Fall, siehe Beispiel 4.64. Wir verstehen die Notation $[X, Y]$ im Sinne von Definition 4.62, das heißt, wir ersetzen X durch einen schwach äquivalenten kofibranten Raum, bevor wir naive Homotopieklassen betrachten (Y ist ja stets fibrant). Die allermeisten Konstruktionen im Folgenden lassen sich komplett in der Sprache der Modellkategorien für beliebige Modellkategorien durchführen. Wir werden aber die meiste Zeit mit konkreten topologischen Methoden arbeiten.

4.65. BEMERKUNG. Wir haben uns in den Abschnitten 4.a–4.d große Mühe gegeben, „schöne“ Kategorien \mathcal{T} und \mathcal{T}_+ mit vielen angenehmen Eigenschaften zu konstruieren, damit wir im letzten Abschnitt 4.e Modell- und Homotopiekategorien einführen konnten. Umso größer ist die Ernüchterung, wenn wir feststellen, dass die Homotopiekategorie $\text{Ho}\mathcal{T}_+$ gar nicht so schöne Eigenschaften hat. Sie ist beispielsweise weder vollständig noch kovollständig, siehe etwa Übung 4.104.

Daher führen wir viele typische Konstruktionen nicht in der Homotopiekategorie durch, sondern zunächst in \mathcal{T}_+ . Erst am Schluss betrachten wir die Früchte unserer Arbeit in $\text{Ho}\mathcal{T}_+$. So „leben“ die Faser- und Kofasersequenzen, die wir gleich betrachten, natürlicherweise in $\text{Ho}\mathcal{T}_+$. Wir beschreiben sie dennoch in \mathcal{T}_+ , um im Zweifel etwas bessere Kontrolle über ihre Eigenschaften zu haben.

In den Homotopiekategorien $\text{Ho}\mathcal{T}_+$ gibt es keinen natürlichen Begriff exakter Sequenzen. In diesem Abschnitt lernen wir zwei Typen von Sequenzen kennen, die sich ähnlich wie exakte Sequenzen verhalten.

In Definition 3.71 haben wir den reduzierten Kegel $CA = A \wedge (I, 0)$ eines Raumes A und den Abbildungskegel $Cf = CY \cup_f X$ einer Abbildung $f: Y \rightarrow X$ kennengelernt. Nach Bemerkung 3.72 (1) und (3) sind (CA, A) und (Cf, X) immer Kofaserungen in der Ström-Modellstruktur. Der Homotopiequotient $X//A$ ist gerade der Abbildungskegel der Inklusion $A \hookrightarrow X$.

4.66. BEMERKUNG. Der Abbildungskegel $Cf = CY \cup_f X$ von $f: Y \rightarrow X$ hat einige schöne Eigenschaften.

- (1) Es sei Z ein weiterer punktierter Raum. Aus der universellen Eigenschaft 1.86 eines Pushouts folgt, dass eine Abbildung $k: Cf \rightarrow Z$ genau einer punktierten Abbildung $g: X \rightarrow Z$ und einer punktierten Nullhomotopie h von der konstanten Abbildung $Y \rightarrow \{z_0\} \hookrightarrow Z$

zu $g \circ f$ entspricht.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & h \\
 & & & & \curvearrowright \\
 Y \wedge I_+ & \longrightarrow & Cf & \longrightarrow & Z \\
 \uparrow & & \uparrow & \nearrow & \\
 Y \vee Y & \xrightarrow{* \vee f} & X & & \\
 & & & & g
 \end{array}$$

- (2) Betrachte die Inklusion $\iota: X \rightarrow Cf$. Wir schreiben $f^* = \cdot \circ f: [X, Z] \rightarrow [Y, Z]$. Mit (1) sieht man, dass die Sequenz

$$[Cf, Z] \xrightarrow{\iota^*} [X, Z] \xrightarrow{f^*} [Y, Z]$$

punktierter Mengen für alle Z bei $[X, Z]$ im Sinne von Definition 3.17 exakt ist.

Wir erinnern uns an die iterierte Einhängung $S^k X = S^k \wedge X$ aus Definition 3.68 und Bemerkung 3.70 (2). Sei $f: X \rightarrow Y$ stetig, dann schreiben wir im Folgenden $-Sf$ für die Abbildung $(\text{id}_{S^1}) \wedge f: S^1 X \rightarrow S^1 Y$. Dabei sei id_{S^1} eine punktierte Selbstabbildung vom Grad -1 , etwa gegeben durch komplexe Konjugation auf $S^1 \subset \mathbb{C}$. Man beachte, dass dann $-S(-Sf)$ zu $S^2 f$ homotop ist.

4.67. SATZ (Barratt-Puppe-Sequenz). *Es sei $f: Y \rightarrow X$ eine Abbildung zwischen kofibranten punktierten Räumen. Dann existiert eine natürliche Sequenz*

$$\dots \longleftarrow S^2 Cf \xleftarrow{S^2 \iota} S^2 X \xleftarrow{S^2 f} S^2 Y \xleftarrow{-Sj} SCf \xleftarrow{-S\iota} SX \xleftarrow{-Sf} SY \xleftarrow{j} Cf \xleftarrow{\iota} X \xleftarrow{f} Y \quad (*)$$

in \mathcal{T}_+ mit folgenden Eigenschaften:

- (1) Für je zwei aufeinanderfolgende Abbildungen in der Sequenz existiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 Ck & & \\
 \ell \downarrow \sim & \swarrow & \\
 W & \longleftarrow & V \xleftarrow{k} U,
 \end{array}$$

bei dem ℓ eine schwache Äquivalenz ist;

- (2) Sei g eine beliebige Abbildung in der Sequenz, dann stimmt die rechts von g abgeschnittene Sequenz in $\text{Ho}\mathcal{T}_+$ gerade mit der entsprechenden Sequenz für g überein;
- (3) Für jeden Raum Z ist die induzierte Sequenz

$$\begin{aligned}
 \dots \longrightarrow [S^2 Cf, Z] &\xrightarrow{(S^2 \iota)^*} [S^2 X, Z] \xrightarrow{(S^2 f)^*} [S^2 Y, Z] \xrightarrow{(-Sj)^*} [SCf, Z] \xrightarrow{(-S\iota)^*} \\
 &\longrightarrow [SX, Z] \xrightarrow{(-Sf)^*} [SY, Z] \xrightarrow{j^*} [Cf, Z] \xrightarrow{\iota^*} [X, Z] \xrightarrow{f^*} [Y, Z]
 \end{aligned}$$

von Mengen exakt.

Eine Sequenz (*) mit der Eigenschaft (1) heißt auch *Kofasersequenz*. Zusammen mit f legt sie die Sequenz (*) bereits bis auf Isomorphie in $\text{Ho}\mathcal{T}_+$ eindeutig fest. Die Minuszeichen vor allen ungeraden Einhangungen in (*) sind nötig für (2). Sie spielen eine Rolle in der Theorie sogenannter „triangulierter Kategorien“. Die analoge Sequenz ohne Minuszeichen ist offensichtlich isomorph zu (*), so dass man die Minuszeichen später manchmal weglässt.

Nach Bemerkung 3.77 (1) ist die *Puppe-Sequenz* (3) bis zur Stelle $[SY, Z]$ eine exakte Sequenz von Gruppen, und nach 3.77 (2) sogar eine exakte Sequenz abelscher Gruppen bis zur Stelle $[S^2 Y, Z]$. Nach Übung 4.111 wirkt die Gruppe $[SY, Z]$ auf $[Cf, Z]$; ähnliche Gruppenwirkungen haben wir in den Sätzen 3.19 und 3.25 gesehen. Allgemeiner heißt eine Sequenz

$$\dots \longleftarrow X_3 \longleftarrow X_2 \longleftarrow X_1 \longleftarrow X_0$$

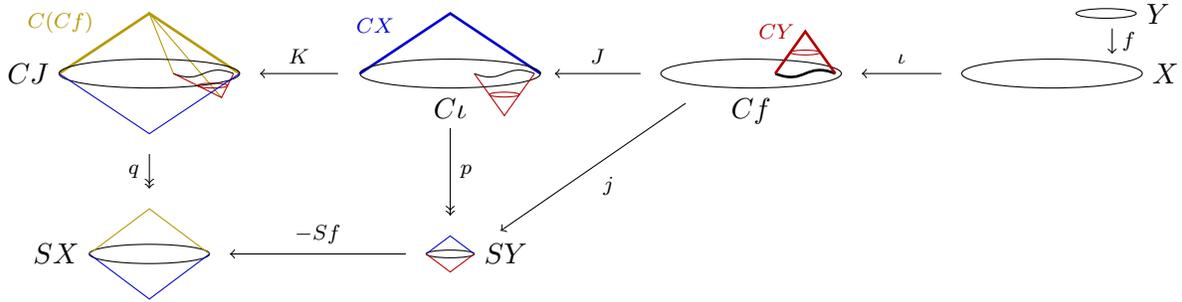


ABBILDUNG 4.6. Zur Kofasersequenz der Abbildung $f: Y \rightarrow X$

mit der Eigenschaft (3) *Homotopie-koexakt*. Diese Eigenschaft ist schwächer als (1) und legt (*) nicht eindeutig fest. Beispielsweise können wir Cf durch einen Raum W ersetzen, der Cf als Retrakt besitzt, und die Sequenz (*) links von X durch die entsprechende Sequenz zur Abbildung $X \rightarrow W$ ersetzen, ohne die Exaktheit von (3) zu zerstören. Die schwache Äquivalenz ℓ in (1) ist ebenfalls nicht eindeutig bestimmt, denn die Gruppe $[SU, W]$ operiert auf der Menge der möglichen Homotopieklassen von Homotopieäquivalenzen. Das hängt eng damit zusammen, dass $\text{Ho}\mathcal{T}_+$ nicht alle Kolimiten enthält, siehe Bemerkung 4.65.

BEWEIS. Wir arbeiten hier nur in der Ström-Modellstruktur. In der Quillen-Modellstruktur reicht es, die Abbildung f wie in Satz 4.51 durch eine zelluläre Abbildung zwischen CW-Komplexen zu ersetzen. Dadurch werden alle weiteren Abbildungen in (1) ebenfalls zu zellulären Abbildungen zwischen CW-Komplexen.

Wir konstruieren die Sequenz (*) Schritt für Schritt und beweisen (1) und (2), dann folgt die Exaktheit der Sequenz (3) aus Bemerkung 4.66 (2). Am Anfang der Sequenz (*) ist nichts zu tun.

Wir betrachten zu $\iota: X \rightarrow Cf$ den Abbildungskegel

$$C\iota = CX \cup_{\iota} Cf .$$

Dabei befolgen wir die Konvention, dass der zuletzt konstruierte Kegel immer die Orientierung festlegt; das wird auch die diversen Minuszeichen in (*) erklären.

Da (CY, Y) eine Kofaserung ist, sind (Cf, X) und $(C\iota, CX)$ nach Proposition 3.64 ebenfalls Kofaserungen. Außerdem ist CX zusammenziehbar, also ist die Quotientenabbildung $p: C\iota \rightarrow C\iota/CX$ eine Homotopieäquivalenz nach Proposition 3.62. Da CX die „Basis“ des Abbildungskegels $C\iota$ ist, ist $C\iota/CX$ natürlich homöomorph zur Einhängung SY . Wir beweisen (1) an der Stelle Cf , indem wir die Abbildung $j: Cf \rightarrow SY$ definieren wie im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C\iota & \xleftarrow{J} & Cf \xleftarrow{\iota} X \\ p \downarrow \sim & \swarrow j & \\ SY & & \end{array} .$$

Im nächsten Schritt sei $J: Cf \rightarrow C\iota$ die natürliche Inklusion. Wie oben ist $CJ = C(Cf) \cup_J C\iota$, und $(CJ, C(Cf))$ ist eine Kofaserung. Da die „Basis“ $C(Cf)$ von CJ zusammenziehbar ist, erhalten wir wieder eine Homotopieäquivalenz

$$q: CJ \xrightarrow{\sim} CJ/C(Cf) \cong SX .$$

Das linke Quadrat in Abbildung 4.6 kommutiert bis auf die punktierte Homotopie $h: C\iota \times I \rightarrow SX$ mit

$$\begin{aligned} h((y, s), t) &= (f(y), 1 - s + st) && \text{für } (y, s) \in CY \subset C\iota, \\ \text{und } h((x, s), t) &= (x, st) && \text{für } (x, s) \in CX \subset C\iota, \end{aligned}$$

wobei der Kegelparameter s jeweils an der Spitze den Wert 0 und an der Basis den Wert 1 annimmt. Es folgt $h(\cdot, 0) = (-Sf) \circ p$ und $h(\cdot, 1) = q \circ K$, wobei $K: C\iota \rightarrow CJ$ wieder die natürliche Inklusion bezeichne. Wir erhalten das kommutative Diagramm in Abbildung 4.6. Damit ist (1) an der Stelle SY ebenfalls gezeigt.

Als letztes beweisen wir induktiv (1) und (2), indem wir die Sequenz (*) mit der verschobenen Sequenz zur Abbildung ι vergleichen wie im Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longleftarrow & SX & \xleftarrow{-Sf} & SY & \xleftarrow{j} & Cf & \xleftarrow{\iota} & X & \xleftarrow{f} & Y \\ & & \parallel & & \uparrow p \sim & & \parallel & & \parallel & & \\ \dots & \longleftarrow & SCf & \xleftarrow{-S\iota} & SX & \xleftarrow{q \circ K} & C\iota & \xleftarrow{J} & Cf & \xleftarrow{\iota} & X. \end{array}$$

Dies erlaubt uns, die Sequenz (*) Schritt für Schritt nach links fortzusetzen. Die Eigenschaft (1) folgt aus der entsprechenden Eigenschaft für die ι -Sequenz eine Position weiter rechts. \square

4.68. BEISPIEL. Es sei $f: S^3 \rightarrow S^2$ die Hopf-Faserung. Wenn wir an S^2 eine Zelle mit der Verklebeabbildung f ankleben, erhalten wir die komplex projektive Ebene $\mathbb{C}P^2$, siehe Übung 1.168. Insbesondere ist $\mathbb{C}P^2 \cong Cf$, da $D^4 \cong CS^3$. Der Quotient von $\mathbb{C}P^2$ nach dem 2-Gerüst S^2 ist homöomorph zu S^4 . Wir erhalten also eine Kofasersequenz

$$\dots \longleftarrow S^3 \xleftarrow{Sf} S^4 \longleftarrow \mathbb{C}P^2 \longleftarrow S^2 \xleftarrow{f} S^3.$$

Völlig analog führen wir jetzt Fasersequenzen ein. Dabei lassen wir uns wie in Abschnitt 3.f vom Prinzip der Eckmann-Hilton-Dualität leiten. Wir erinnern uns daran, dass $Y^{I+} = C(I, Y)$ die unpunktieren und Y^I die punktierten Abbildungen von $I = (I, 0)$ nach Y bezeichnet. Diese Räume sind dual zum reduzierten Zylinder $Y \wedge I_+$ beziehungsweise zum reduzierten Kegel CY .

4.69. DEFINITION. Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine punktierte Abbildung. Dann definieren wir die *Pfad-Faserung*

$$p: Pf \longrightarrow Y^{I+} \xrightarrow{\text{ev}_0} Y,$$

indem wir $Pf = \{(\gamma, x) \in Y^{I+} \times X \mid \gamma(1) = f(x)\} \rightarrow Y^{I+}$ als Pullback

$$\begin{array}{ccc} Y^{I+} & \longleftarrow & Pf \\ \text{ev}_1 \downarrow & & \downarrow f^* \text{ev}_1 \\ Y & \xleftarrow{f} & X \end{array}$$

konstruieren. Die typische Faser der Pfadfaserung ist die *Homotopiefaser*

$$Ff = \{(\gamma, x) \in Y^{I+} \times X \mid \gamma(0) = y_0 \text{ und } \gamma(1) = f(x)\} = \{(\gamma, x) \in Y^I \times X \mid \gamma(1) = f(x)\}.$$

4.70. BEMERKUNG. Die Pfadfaserung hat folgende Eigenschaften, siehe auch Abbildung 4.7 und Übung 4.105.

(1) Die Abbildungen

$$\begin{aligned} \text{ev}_0: Y^{I+} &\longrightarrow Y, & \text{ev}_1: Y^{I+} &\longrightarrow Y, \\ p: Pf &\longrightarrow Y & \text{und} & f^* \text{ev}_1: Pf &\longrightarrow X \end{aligned}$$

sind Hurewicz-Faserungen mit Faser Y^I beziehungsweise Ff , siehe Definition 3.22.

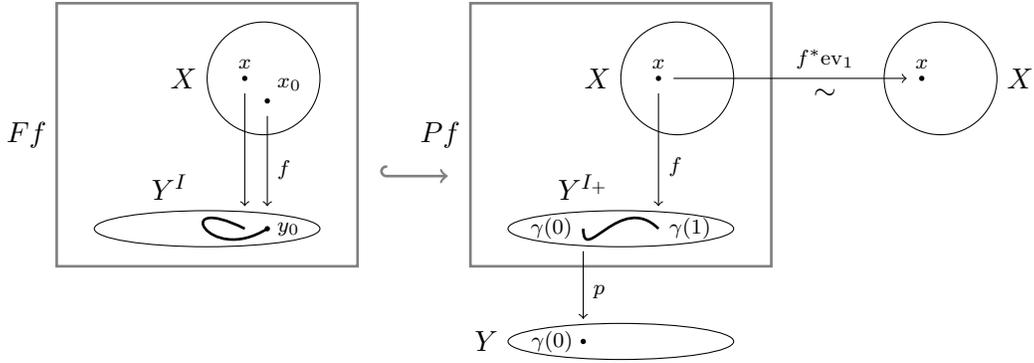


ABBILDUNG 4.7. Die Pfadfaserung einer Abbildung $f: X \rightarrow Y$

- (2) Wenn wir Y mit den konstanten Pfaden in Y^{I+} identifizieren, ist Y ein Deformationsretrakt von Y^{I+} . Dabei können wir ev_0 oder ev_1 als Retraktionsabbildung wählen. Wählen wir entsprechend zu $x \in X$ den konstanten Pfad im Punkt $f(x)$ und benutzen $\iota: X \rightarrow Pf$ mit

$$\iota(x) = (t \mapsto f(x), x)$$

um X mit $\text{im } \iota \subset Pf$ zu identifizieren, so wird X zu einem Deformationsretrakt von Pf .

- (3) Es gilt $p \circ \iota = f$, und $f \circ f^* \text{ev}_1$ ist punktiert homotop zu p , somit können wir jede beliebige Abbildung f durch eine Hurewicz-Faserung $p: Pf \rightarrow Y$ mit homotopieäquivalentem Totalraum ersetzen.
- (4) Wenn $f: X \rightarrow Y$ bereits eine Hurewicz-Faserung ist, dann ist die Homotopiefaser Ff homotopieäquivalent zur Faser $f^{-1}(y_0)$.

4.71. BEMERKUNG. Dual zu Bemerkung 4.66 hat die Homotopiefaser folgende Eigenschaften.

- (1) Die Homotopiefaser Ff lässt sich auf zwei Weisen als Pullback darstellen:

$$\begin{array}{ccc} Y^I & \longleftarrow & Ff \\ \text{ev}_1 \downarrow & & \downarrow q=f^* \text{ev}_1 \\ Y & \xleftarrow{f} & X \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} Pf & \longleftarrow & Ff \\ p \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xleftarrow{\text{pt}} & \text{pt} . \end{array}$$

- (2) Eine Abbildung $k: Z \rightarrow Ff$ entspricht genau einer Abbildung $g: Z \rightarrow X$ und einer punktierten Nullhomotopie h von der konstanten Abbildung $Z \rightarrow \{y_0\} \hookrightarrow Y$ zur Abbildung $f \circ g$.
- (3) Wir schreiben $f_* = f \circ \cdot : [Z, X] \rightarrow [Z, Y]$. Aus (2) folgt, dass die Sequenz

$$[Z, Ff] \xrightarrow{q_*} [Z, X] \xrightarrow{f_*} [Z, Y]$$

punktierter Mengen exakt ist.

Der folgende Satz ist Eckmann-Hilton dual zum Satz 4.67 von Barratt-Puppe. Der Beweis ist daher Übung 4.106. Wir überlegen uns aber, dass $\Omega^k X = X^{S^k}$ zu $S^k X = X \wedge S^k$ dual ist. Sei $f: X \rightarrow Y$ stetig, dann schreiben wir $-\Omega f$ für die Abbildung, die $\alpha \in \Omega X$ auf $f \circ \alpha \circ \overline{\text{id}}_{S^1}$ abbildet. Dann ist $-\Omega(-\Omega f)$ homotop zu $\Omega^2 f$.

Da jede Hurewicz-Faserung eine Serre-Faserung ist, sieht diese Sequenz in der Quillen-Modellstruktur genau so aus wie in der Ström-Modellstruktur. Allerdings sollten wir in (3) den Raum Z zunächst durch einen schwach äquivalenten CW-Komplex ersetzen, wenn wir die Menge $[Z, \cdot]$ aus Definition 4.62 durch die Menge naiver Homotopieklassen ersetzen wollen.

4.72. SATZ. Zu jeder Abbildung $f: X \rightarrow Y$ existiert eine natürliche Sequenz

$$\dots \rightarrow \Omega^2 Ff \xrightarrow{\Omega^2 q} \Omega^2 X \xrightarrow{\Omega^2 f} \Omega^2 Y \xrightarrow{-\Omega r} \Omega Ff \xrightarrow{-\Omega q} \Omega X \xrightarrow{-\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{r} Ff \xrightarrow{q} X \xrightarrow{f} Y \quad (*)$$

punktierter Abbildungen mit folgenden Eigenschaften:

- (1) Für je zwei aufeinanderfolgende Abbildungen in der Sequenz existiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & Ff & \\ & \uparrow k \sim & \searrow q \\ W & \longrightarrow & V \xrightarrow{f} U, \end{array}$$

bei dem k eine Homotopieäquivalenz ist;

- (2) Sei g eine beliebige Abbildung in der Sequenz, dann stimmt die rechts von g abgeschnittene Sequenz in $\text{Ho}\mathcal{T}_+$ mit der entsprechenden Sequenz für g überein;
(3) Für jeden gut punktierten Raum Z ist die induzierte Sequenz

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow [Z, \Omega^2 Ff] &\xrightarrow{(\Omega^2 q)_*} [Z, \Omega^2 X] \xrightarrow{(\Omega^2 f)_*} [Z, \Omega^2 Y] \xrightarrow{(-\Omega r)_*} [Z, \Omega Ff] \xrightarrow{(-\Omega q)_*} \\ &\rightarrow [Z, \Omega X] \xrightarrow{(-\Omega f)_*} [Z, \Omega Y] \xrightarrow{r_*} [Z, Ff] \xrightarrow{q_*} [Z, X] \xrightarrow{f_*} [Z, Y] \end{aligned}$$

von Mengen exakt.

Eine Sequenz mit der Eigenschaft (1) heißt *Fasersequenz*. Die Sequenz (*) wird durch (1) und die Abbildung f bis auf Isomorphie in $\text{Ho}\mathcal{T}_+$ eindeutig festgelegt. Allgemeiner heißt eine Sequenz

$$\dots \rightarrow X_3 \rightarrow X_2 \rightarrow X_1 \rightarrow X_0$$

mit der Eigenschaft (3) *Homotopie-exakt*. Wiederum ist die Sequenz (*) nicht allein durch diese Eigenschaft bis auf Homotopieäquivalenz eindeutig festgelegt, und k in (1) ist nicht bis auf Homotopie eindeutig bestimmt.

Als Spezialfall der Sequenz (3) mit $Z = S^0$ erhalten wir die lange exakte Sequenz für Serre-Faserungen aus Satz 3.25, wenn wir Ff durch die Faser F und $[S^0, \Omega^k \cdot]$ mit Hilfe des Exponentialgesetzes durch $[S^k, \cdot]$ ersetzen, siehe Übung 4.109. Die Abbildung r nennt man auch *Fasertransport*. Sie beschreibt, wohin der Basispunkt der Faser durch so etwas wie Paralleltransport entlang einer Schleife in Y verschoben wird und liefert somit einen Punkt in der Homotopiefaser.

4.73. BEISPIEL. Es sei $\iota: S^2 \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ die Inklusion des 2-Gerüsts und $f: S^3 \rightarrow S^2$ die Hopf-Faserung. Da $\pi_3(\mathbb{C}P^\infty) = 0$, lässt sich die Abbildung $\iota \circ f$ auf $D^4 = CS^3$ fortsetzen. Das liefert uns eine Abbildung $g: S^3 \rightarrow F\iota$. Der Schleifenraum $\Omega\mathbb{C}P^\infty$ ist nach Übung 4.107 zu S^1 homotopieäquivalent. Aus der obigen langen exakten Sequenz (3) für $Z = S^k$ und Beispiel 3.33 folgt, dass $g_*: \pi_k(S^3) \rightarrow \pi_k(F\iota)$ ein Isomorphismus ist für alle $k \geq 3$. Für $k = 1, 2$ überlegt man sich, dass $\pi_k(\Omega S^2) \rightarrow \pi_j(\Omega\mathbb{C}P^1) = \pi_j(S^1)$ ein Isomorphismus ist für $j = 0, 1$. Außerdem sind sowohl S^3 als auch $F\iota$ zusammenhängend. Somit ist g eine schwache Homotopieäquivalenz. Da $F\iota$ nach einer etwas allgemeineren Version des Satzes 4.55 von Milnor den Homotopietyp eines CW-Komplexes hat, ist g nach dem Satz 4.46 von Whitehead sogar eine Homotopieäquivalenz. Wir erhalten somit eine Fasersequenz

$$\dots \rightarrow S^1 \hookrightarrow S^3 \xrightarrow{f} S^2 \xrightarrow{\iota} \mathbb{C}P^\infty.$$

Auf der rechten Seite können wir die Fasersequenz sogar noch durch die Abbildung $\mathbb{C}P^\infty \rightarrow \mathbb{H}P^\infty$ fortsetzen.

4.g. Übungen zu Kapitel 4

Übungen zu Abschnitt 4.a.

4.74. ÜBUNG. Es seien $\mathcal{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $\mathcal{G}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ Funktoren. Wir nennen natürliche Transformationen $\varepsilon: \mathcal{F} \circ \mathcal{G} \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$ und $\eta: \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ ein Einheitspaar, wenn

$$\varepsilon_{\mathcal{F}X} \circ \mathcal{F}\eta_X = \text{id}_{\mathcal{F}X} \quad \text{und} \quad \mathcal{G}\varepsilon_Y \circ \eta_{\mathcal{G}Y} = \text{id}_{\mathcal{G}Y}$$

für alle Objekte X von \mathcal{C} und Y von \mathcal{D} gilt. Zeigen Sie wahlweise:

- (1) Es sei $\Phi_{X,Y}: \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{G}Y)$ eine Adjunktion im Sinne von Definition 4.1, dann bilden

$$\varepsilon_Y = \Phi_{\mathcal{G}Y, Y}^{-1}(\text{id}_{\mathcal{G}Y}) \quad \text{und} \quad \eta_X = \Phi_{X, \mathcal{F}X}(\text{id}_{\mathcal{F}X})$$

ein Einheitspaar.

- (2) Es sei ε und η ein Einheitspaar, dann liefert $\Phi_{X,Y} = \mathcal{G} \cdot \circ \eta_X$ eine Adjunktion im Sinne von Definition 4.1.

4.75. ÜBUNG. Beweisen Sie die folgenden Aussagen über Kolimiten.

- (1) Der Kolimes $\text{colim}(A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} B)$ erfüllt die universelle Eigenschaft des Pushout.
 (2) Jeder Kolimes lässt sich als Pushout von Koproducten schreiben.

4.76. ÜBUNG. Es sei \mathcal{I} die Kategorie mit einem Objekt aus Beispiel 4.5 und $\mathcal{F}: \mathcal{I} \rightarrow \text{Vec}_{\mathbb{k}}$ ein Funktor. Beschreiben Sie \mathcal{F} in Termen der linearen Algebra und geben Sie $\lim \mathcal{F}$ und $\text{colim} \mathcal{F}$ an.

4.77. ÜBUNG. Welche Rechenregeln ergeben sich aus Lemma 4.14 und dem Exponentialgesetz für Mengen aus Beispiel 4.3 (1)

- (1) für disjunkte Vereinigungen und kartesische Produkte, sowie
 (2) für kartesische Produkte und Mengen von Abbildungen?

4.78. ÜBUNG. Es sei \mathcal{C} eine Kategorie, dann bezeichne \mathcal{C}^{op} die Kategorie mit den gleichen Objekten und

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \quad \text{und} \quad f \circ_{op} g = g \circ f$$

für alle f, g und für alle $X, Y \in \mathcal{C}$.

Überprüfen Sie:

- (1) Sei \mathcal{I} ein Diagramm. Dann sind \mathcal{I} -Limiten in \mathcal{C} gerade \mathcal{I}^{op} -Kolimiten in \mathcal{C}^{op} und umgekehrt.
 (2) Funktoren $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ entsprechen Funktoren $F: \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}^{op}$ und Funktoren $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}^{op}$ entsprechen Funktoren $G: \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}$.
 (3) Es seien $F: \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ adjungierte Funktoren, dann sind auch $G: \mathcal{D}^{op} \rightleftarrows \mathcal{C}^{op} : F$ adjungiert.
 (4) Es seien $F: \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}^{op} : G$ adjungierte Funktoren, dann sind auch $G: \mathcal{D} \rightleftarrows \mathcal{C}^{op} : F$ adjungiert.

Übungen zu Abschnitt 4.b. Zur Erinnerung: unter „kompakt“ verstehen wir stets überdeckungskompakt und Hausdorffsch, siehe Definition 1.58.

4.79. ÜBUNG. Zeigen Sie:

- (1) Hausdorff-Räume sind schwach Hausdorff, und schwache Hausdorff-Räume erfüllen (T1).
 (2) Sei X schwach Hausdorff, K kompakt und $f: K \rightarrow X$ stetig. Dann ist f kompakt (insbesondere Hausdorff), und f ist *eigentlich*, das heißt, Urbilder kompakter Teilmengen sind kompakt.

4.80. ÜBUNG. Zeigen Sie:

- (1) Die k -offenen Mengen von X bilden eine Topologie \mathcal{O}_{kX} auf X ; diese ist feiner als \mathcal{O}_X . Schreibe $kX = (X, \mathcal{O}_{kX})$, dann ist insbesondere $\text{id}_X: kX \rightarrow X$ stetig.
- (2) Sei K kompakt, dann ist $f: K \rightarrow X$ genau dann stetig, wenn $f: K \rightarrow kX$ stetig ist.
- (3) Es gilt $\mathcal{O}_{k(kX)} = \mathcal{O}_{kX}$, also ist kX kompakt erzeugt.
- (4) Ein Raum X ist genau dann kompakt erzeugt, wenn für jeden Raum Y und jede Abbildung $g: X \rightarrow Y$ von Mengen äquivalent sind:
 - (a) die Abbildung g ist stetig, und
 - (b) für jedes Kompaktum K und jede stetige Abbildung $f: K \rightarrow X$ ist $g \circ f: K \rightarrow Y$ stetig.

4.81. ÜBUNG. Zeigen Sie:

- (1) Der Funktor $k: \mathcal{Top} \rightarrow k\mathcal{Top}$ ist rechtsadjungiert zum Inklusionsfunktor $k\mathcal{Top} \hookrightarrow \mathcal{Top}$, das heißt, für alle $X \in k\mathcal{Top}$, $Y \in \mathcal{Top}$ gibt es eine natürliche Bijektion

$$\text{hom}_{k\mathcal{Top}}(X, kY) = \text{hom}_{\mathcal{Top}}(X, Y).$$

- (2) Es sei $X \in k\mathcal{Top}$ und $A \subset X$ eine Teilmenge. Dann hat kA die charakteristische Eigenschaft eines Unterraums in der Kategorie $k\mathcal{Top}$ aus Satz 1.50.
- (3) Es sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie von Räumen in $k\mathcal{Top}$, dann hat $k \prod_{i \in I} X_i$ die universelle Eigenschaft eines Produkts in der Kategorie $k\mathcal{Top}$ aus Satz 1.53.

4.82. ÜBUNG. Wir betrachten die topologischen Räume

$$X = \bigvee_{i \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} (I, 0) \quad \text{und} \quad Y = \bigvee_{j \in \mathbb{N}} (I, 0)$$

und die Teilmenge

$$P = \left\{ \left(\frac{1}{1+i_j}, \frac{1}{1+i_j} \right) \in I_i \times I_j \mid i \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, j \in \mathbb{N} \right\} \subset X \times Y.$$

Zeigen Sie:

- (1) Statt den Raum $X \times Y$ mit der CW-Topologie, die durch die abgeschlossenen 2-Zellen $\bar{e}_{i,j}^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ für $(i, j) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}$ gegeben ist, aus, dann ist P abgeschlossen.
- (2) In der Produkttopologie auf $X \times Y$ gilt $0 \in \bar{P}$.
- (3) Die CW-Topologie in (1) stimmt mit der Topologie auf $k(X \times Y)$ zur Produkttopologie auf $X \times Y$ überein.

Hinweis: Jede Umgebung von 0 enthält in der Produkttopologie eine Teilmenge der Form

$$\left(\bigvee_{i \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} [0, a_i) \right) \times \left(\bigvee_{j \in \mathbb{N}} [0, b_j) \right) \quad \text{mit } 0 < a_i, b_j \leq 1 \text{ für alle } i \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \text{ und alle } j \in \mathbb{N}.$$

4.83. ÜBUNG. Zeigen Sie:

- (1) Disjunkte Vereinigungen von Familien in $kw\mathcal{H}$ sind wieder kompakt erzeugt und schwach Hausdorff.
- (2) Sei $X_0 \subset X_1 \subset \dots$ eine aufsteigende Familie in $kw\mathcal{H}$, so dass X_i für alle i in X_{i+1} abgeschlossen ist. Dann ist der Kolimes in \mathcal{Top} wieder kompakt erzeugt und schwach Hausdorff.
- (3) CW-Komplexe sind kompakt erzeugt und schwach Hausdorff.

4.84. ÜBUNG. Zeigen Sie in Analogie zu Aufgabe 3.129: wenn X ein kompakt erzeugter schwach Hausdorff-Raum und (X, A) eine Kofaserung in der Kategorie $kw\mathcal{H}$ ist, dann ist $A \subset X$ eine k -abgeschlossene Teilmenge.

4.85. ÜBUNG. Es sei $X \in kw\mathcal{H}$, und es sei $X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X$ eine aufsteigende Folge von Unterräumen in $kw\mathcal{H}$, so dass $X \cong \text{colim } X_n$. Außerdem sei K kompakt und $f: K \rightarrow X$ stetig.

- (1) Zeigen Sie, dass im $f \subset X_n$ für ein hinreichend großes n .
- (2) Folgern Sie für $x_0 \in X_0$, dass $\pi_k(X, x_0) = \text{colim } \pi_k(X_n, x_0)$.

Hinweis. Beweisen Sie zunächst folgende Aussage: es sei $(x_n)_n$ eine Folge in X , so dass $x_n \in X \setminus X_{n-1}$, dann ist $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset X$ abgeschlossen.

4.86. ÜBUNG. Es bezeichne $|\cdot| : \mathcal{Top} \rightarrow \mathcal{Set}$ den vergesslichen Funktor, der einem topologischen Raum die zugrundeliegende Menge zuordnet.

- (1) Geben Sie je einen links- und einen rechtsadjungierten Funktor zu $|\cdot|$ an.
- (2) Gibt es links- und rechtsadjungierte Funktoren zur Einschränkung $|\cdot| : kw\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{Set}$?

Hinweis zu (2). Welche Auswirkungen hat die Existenz der jeweiligen Adjungierten nach Lemma 4.14 auf Pullbacks und Pushouts?

4.87. ÜBUNG. Es bezeichne $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \bigvee_{n \in \mathbb{Z}} S^1$ den Quotienten topologischer Räume. Bestimmen Sie den Kolimes der Folge

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \dots$$

zum einen in der Kategorie \mathcal{Top} , zum anderen in der Kategorie $kw\mathcal{H}$.

4.88. ÜBUNG. Wir betrachten den inversen Limes X der Folge

$$S^1 \xleftarrow{\cdot 1} S^1 \xleftarrow{\cdot 2} S^1 \xleftarrow{\cdot 3} S^1 \longleftarrow \dots$$

topologischer Räume. Bestimmen Sie eine Abbildung der universellen Überlagerung $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ des ersten Raumes in den Limes X . Ist diese Abbildung eine Einbettung? Ist sie surjektiv?

Übungen zu Abschnitt 4.c.

4.89. ÜBUNG. Konstruieren Sie die natürlichen Transformationen α , λ und ρ aus Definition 4.26, zeigen Sie, dass sie Isomorphismen sind, und beweisen Sie die Axiome (1) und (2)

- (1) entweder für (\mathcal{C}, \times, E) , falls endliche Produkte in \mathcal{C} existieren und E terminal ist,
- (2) oder für (\mathcal{C}, \sqcup, E) , falls endliche Koproducte in \mathcal{C} existieren und E initial ist.

4.90. ÜBUNG. Es sei $(\mathcal{C}, \otimes, E)$ eine abgeschlossene monoidale Kategorie.

- (1) Benutzen Sie die Adjunktion $\cdot \otimes Y \dashv \text{hom}(Y, \cdot)$ und die Funktorialität von \otimes im zweiten Argument, um zu zeigen, dass $\text{hom}(\cdot, Z) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ ein kontravarianter Funktor ist.
- (2) Zeigen Sie, dass $\text{hom}(\cdot, \cdot)$ ein *Bifunktor* ist, das heißt, dass für alle $f : Z \rightarrow W$, $g : X \rightarrow Y$ gilt

$$\text{hom}(X, f) \circ \text{hom}(g, Z) = \text{hom}(g, W) \circ \text{hom}(Y, f) : \text{hom}(Y, Z) \longrightarrow \text{hom}(X, W).$$

4.91. ÜBUNG. Es sei $(\mathcal{C}, \otimes, E)$ eine abgeschlossene monoidale Kategorie. Beweisen Sie die universellen Eigenschaften des internen hom -Funktors und des Tensorproduktes aus Bemerkung 4.28 mit Hilfe von Bemerkung 4.2. Überlegen Sie sich außerdem, dass die Zuordnungen $f \mapsto g$ in (1) und $g \mapsto f$ in (2) zueinander invers sind.

4.92. ÜBUNG. Beweisen Sie Proposition 4.36, orientieren Sie sich dabei am Beweis von Proposition 3.59.

4.93. ÜBUNG. Es seien X, Y, Z in $kw\mathcal{H}$. Zeigen Sie:

- (1) $k\mathcal{C}(\cdot, Z) : kw\mathcal{H} \rightleftarrows kw\mathcal{H}^{op} : k\mathcal{C}(\cdot, Z)$ ist eine Adjunktion.
- (2) $k\mathcal{C}(X \sqcup Y, Z) \cong k(k\mathcal{C}(X, Z) \times k\mathcal{C}(Y, Z))$.
- (3) $k\mathcal{C}(X, k(Y \times Z)) \cong k(k\mathcal{C}(X, Y) \times k\mathcal{C}(X, Z))$.
- (4) Was muss eine abgeschlossene monoidale Kategorie $(\mathcal{C}, \otimes, \text{hom}, E)$ erfüllen so, dass (i) und (ii) analog gelten?

Übungen zu Abschnitt 4.d.

4.94. ÜBUNG. Beweisen Sie Folgerung 4.41.

4.95. ÜBUNG. Zeigen Sie:

- (1) Schwach homotopieäquivalente CW-Komplexe sind homotopieäquivalent.
- (2) Schwach homotopieäquivalente topologische Räume haben homotopieäquivalente CW-Approximationen.

4.96. ÜBUNG. Geben Sie k -zusammenhängende CW-Modelle für $(\mathbb{C}P^n, *)$ an für alle $k \leq 2n$.
Zusatz: Wie sieht es mit $(\mathbb{H}P^n, *)$ aus?

4.97. ÜBUNG. Präzisieren und beweisen Sie die folgende Aussage:

Pushouts längst zellulären Abbildungen auf Unterkomplexen sowie Kolimiten einer Folge zellulärer Inklusionen von CW-Komplexen liefern wieder CW-Komplexe.

4.98. ÜBUNG. Seien X, Y CW-Komplexe mit charakteristischen Abbildungen $(\Phi_i^m)_{m,i}, (\Psi_j^n)_{n,j}$, dann sei Z der CW-Komplex auf der Menge $X \times Y$ mit den charakteristischen Abbildungen

$$\Phi_i^m \times \Psi_j^n: D^m \times D^n \cong D^{n+m} \rightarrow X \times Y.$$

Zeigen Sie:

- (1) $\text{id}: Z \rightarrow k(X \times Y)$ ist stetig.
- (2) Wenn X, Y endlich sind, ist $\text{id}: Z \rightarrow k(X \times Y)$ ein Homöomorphismus.
- (3) $\text{id}: Z \rightarrow k(X \times Y)$ ein Homöomorphismus.

Hinweis: Es reicht bei (3) zu zeigen, dass für alle Kompakta K und alle stetigen $f: K \rightarrow X \times Y$ die Abbildung $\text{id} \circ f: K \rightarrow Z$ stetig ist.

Übungen zu Abschnitt 4.e.

4.99. ÜBUNG. Es sei $(w\mathcal{M}, f\mathcal{M}, c\mathcal{M})$ eine Modellstruktur. Zeigen Sie, dass $f\mathcal{M}$ gerade die Menge aller $p: E \rightarrow B$ in \mathcal{M} ist, die für alle trivialen Kofaserungen $i: A \rightarrow X$ die Liftungseigenschaft

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & E \\ i \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

erfüllen.

Hinweis: Wenn p die Liftungseigenschaft hat, zerlegen Sie $p = q \circ j$ wie in Axiom (M4) und schreiben Sie p als Retrakt von q .

4.100. ÜBUNG. Es sei $A \rightarrow X$ eine Kofaserung und $A \rightarrow Y$ beliebig. Zeigen Sie, dass der Pushout $Y \rightarrow X \cup_A Y$ wieder eine Kofaserung ist.

4.101. ÜBUNG. Es sei $f: A \rightarrow B$ ein Retrakt von $g: X \rightarrow Y$ im Sinne von Übung 3.117 in einer beliebigen Kategorie \mathcal{C} . Zeigen Sie:

- (1) Wenn g ein Isomorphismus ist, dann ist auch f ein Isomorphismus.
- (2) Sei $\mathcal{C} = \text{Top}$. Wenn g eine Homotopieäquivalenz ist, dann auch f .
- (3) Sei $\mathcal{C} = \text{Top}$. Wenn g eine schwache Homotopieäquivalenz ist, dann auch f .

Hinweis: (2) und (3) folgen aus (1) dank Funktorialität.

4.102. ÜBUNG. Es sei \mathcal{C} eine beliebige Kategorie. Zeigen Sie, dass man stets drei „triviale“ Modellstrukturen auf \mathcal{C} erhält, indem man für zwei der drei Kategorien $w\mathcal{C}, f\mathcal{C}$ und $c\mathcal{C}$ alle Morphismen zulässt, und für die dritte nur Isomorphismen. Bestimmen Sie die zugehörigen Homotopiekategorien zum einen anhand der Definition 4.62, zum anderen mit dem Satz 4.63 von Quillen.

4.103. ÜBUNG. Es sei $(\mathcal{M}, w\mathcal{M}, f\mathcal{M}, c\mathcal{M})$ eine Modellkategorie und A ein Objekt von \mathcal{M} . Die Kategorie $A \downarrow \mathcal{M}$ „unter A “ enthält als Objekte Morphismen der Form $A \rightarrow X$ in \mathcal{M} , und als Morphismen kommutative Diagramme der Form

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ & \swarrow & \searrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

in \mathcal{M} . Wir nennen einen Morphismus Faserung, Kofaserung beziehungsweise schwache Äquivalenz in $A \downarrow \mathcal{M}$, wenn f in \mathcal{M} vom entsprechenden Typ ist. Zeigen Sie, dass $A \downarrow \mathcal{M}$ mit dieser Struktur wieder eine Modellkategorie bildet.

4.104. ÜBUNG. Es seien $f: A \rightarrow X$ und $g: A \rightarrow Y$ stetige, punktierte Abbildungen. Wir definieren den *Homotopie-Pushout*

$$Z = X_f \cup_g Y = X \sqcup A \wedge I_+ \sqcup Y / \sim,$$

wobei wir $A \times \{0\}$ via f an X und $A \times \{1\}$ via g an Y ankleben. Wir erhalten Inklusionsabbildungen $i: X \rightarrow Z$ und $j: Y \rightarrow Z$. Zeigen Sie:

- (1) Seien punktierte Abbildungen $p: X \rightarrow W$ und $q: Y \rightarrow W$ gegeben, so dass $p \circ f$ zu $q \circ g: A \rightarrow W$ homotop sind, dann existiert eine Abbildung $k: Z \rightarrow W$ mit $k \circ i = p$ und $k \circ j = q$.
- (2) Wenn man f und g durch punktiert homotope Abbildungen f', g' ersetzt, erhält man einen zu Z punktiert homotopieäquivalenten Raum $X_{f'} \cup_{g'} Y$.
- (3) Warum muss der Raum Z trotzdem kein Pushout in der Homotopiekategorie sein? Geben Sie dazu ein Beispiel.

Übungen zu Abschnitt 4.f.

4.105. ÜBUNG. Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine beliebige Abbildung. Beweisen Sie zwei der folgenden Aussagen aus Bemerkung 4.70.

- (1) Die Pfadfaserung $Pf \rightarrow Y$ ist eine Hurewicz-Faserung mit Faser Ff .
- (2) Der Unterraum $\text{im}(\iota) \cong X$ ist ein Deformationsretrakt von Pf .
- (3) Die Abbildung $f \circ (f^* \text{ev}_1)$ ist zu $p: Pf \rightarrow Y$ punktiert homotop.
- (4) Wenn f eine Hurewicz-Faserung ist, ist $f^{-1}(y_0)$ zur Homotopiefaser Ff homotopieäquivalent.

4.106. ÜBUNG. Beweisen Sie Eigenschaft (1) für die Sequenz (*) aus Satz 4.72 an einer der Stellen Ff oder ΩY , indem Sie den Beweis von Satz 4.67 mit Eckmann-Hilton-Dualität übertragen.

4.107. ÜBUNG. Es sei $\iota: S^2 \cong \mathbb{C}P^1 \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ die Inklusion. Die Abbildung $S^1 \wedge S^1 \cong S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ induziert eine Abbildung

$$S^1 \longrightarrow \Omega^1(\mathbb{C}P^\infty).$$

Zeigen Sie, dass diese Abbildung eine schwache Homotopieäquivalenz ist. Aus den Sätzen von Milnor und Whitehead folgt, dass sie sogar eine Homotopieäquivalenz ist.

4.108. ÜBUNG. Es sei $\iota: S^2 \cong \mathbb{C}P^1 \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ die Inklusion und $F\iota$ ihre Homotopiefaser. Da $\pi_3(\mathbb{C}P^\infty) = 0$, lässt sich die durch die Hopf-Faserung induzierte Abbildung $g: S^3 \rightarrow S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ auf ganz D^4 fortsetzen.

Konstruieren Sie damit eine Abbildung $S^3 \rightarrow F\iota$. Zeigen Sie mit Hilfe der langen exakten Sequenz 3.25 für Faserungen, dass diese Abbildung eine schwache Homotopieäquivalenz ist.

4.109. ÜBUNG. Es sei (X, A) ein Paar punktierter Räume und $\iota: A \rightarrow X$ die Inklusionsabbildung. Zeigen Sie, dass $\pi_k(F\iota) \cong \pi_{k+1}(X, A)$ für alle $k \geq 0$.

4.110. ÜBUNG. Setzen Sie die Sequenz aus Beispiel 4.73 nach links fort, indem Sie sich überlegen, dass ΩS^1 zu \mathbb{Z} und $\Omega^k S^1$ für $k \geq 2$ zu einem Punkt homotopieäquivalent ist.

4.111. ÜBUNG. Beweisen Sie eine der folgenden Aussagen.

- (1) Es gibt in der Sequenz aus Satz 4.67 (3) eine natürliche Wirkung der Gruppe $[SY, Z]$ auf der Menge $[Cf, Z]$, deren Bahnen genau den Urbildern von Elementen von $[X, Z]$ unter ι^* entsprechen.
- (2) Es gibt in der Sequenz aus Satz 4.72 (3) eine natürliche Wirkung der Gruppe $[Z, \Omega Y]$ auf der Menge $[Z, Ff]$, deren Bahnen genau den Urbildern von Elementen von $[Z, X]$ unter q^* entsprechen.

KAPITEL 5

Homologie

Wir haben am Ende von Kapitel 3 gesehen, dass stabile Homotopiegruppen etwas leichter zu handhaben sind als die ursprünglichen Homotopiegruppen. Wir nehmen das als Inspiration für die Eilenberg-Steenrod-Axiome für allgemeine Homologie- und Kohomologiefunktoren. In der Literatur ist gern von Homologietheorien die Rede, aber eigentlich ist das ganze nur Teil einer größeren Theorie, daher verwenden wir den etwas bescheideneren Begriff Funktor.

5.a. Die Eilenberg-Steenrod-Axiome

Wir geben die Eilenberg-Steenrod-Axiome für allgemeine Homologiefunktoren an, leiten einige elementare Schlussfolgerungen ab, und geben ein Beispiel einer solchen Theorie. Weitere Homologiefunktoren konstruieren wir später.

Ab sofort sei wieder \mathcal{T} eine „schöne“ Kategorie topologischer Räume, also beispielsweise $k\mathcal{Top}$ oder $kw\mathcal{H}$. An einzelnen Stellen werden wir sogar nur die Kategorie CW der CW-Komplexe und ihrer zellulären Abbildungen betrachten. Wir arbeiten ab jetzt wieder überwiegend mit der zugehörigen punktierten Kategorie \mathcal{T}_+ . Außerdem fixieren wir eine Modellstruktur auf \mathcal{T}_+ , beispielsweise die punktierte Ström- oder Quillen-Modellstruktur, siehe Beispiel 4.64 (2) und Übung 4.103. In diesem Sinne verstehen wir schwache Äquivalenzen, Faserungen und Kofaserungen in \mathcal{T}_+ . Anstelle von „kofibrant“ sagen wir nach wie vor „gut punktiert“ und erinnern uns daran, dass in beiden Modellstrukturen alle Räume fibrant sind. Mit $\text{Ho}\mathcal{T}_+$ bezeichnen wir wieder eine zugehörige Homotopiekategorie, und mit $[X, Y]$ die „Homotopieklassen“ im Sinne von Definition 4.62.

Als Zielkategorie wählen wir im Folgenden der Einfachheit halber stets die Kategorie $\mathcal{C} = \text{Mod}_R$ der (Links-) Moduln über einem Ring R . Im Prinzip könnten wir stattdessen eine Kategorie wählen, die viele wichtige Eigenschaften mit den Kategorien Mod_R gemeinsam hat. Ein paar dieser Eigenschaften listen wir gleich auf. Wir könnten also beispielsweise eine sogenannte *Grothendieck-Kategorie* wählen, siehe (7) unten. Nach dem *Satz von Gabriel-Popescu* ist jede Grothendieck-Kategorie \mathcal{C} eine volle Unterkategorie der Kategorie Mod_R mit $R = \text{End } G$, siehe (7), das heißt, sie erbt viele Eigenschaften von Mod_R . Allerdings erhalten wir unter Umständen andere Limiten und Kolimiten — dieses Phänomen haben wir in Abschnitt 4.b bereits beim Übergang von \mathcal{Top} zu den vollen Unterkategorien $k\mathcal{Top}$ und $kw\mathcal{H}$ beobachtet. Insgesamt gibt es kaum Vorteile, allgemeinere Kategorien als Mod_R zu betrachten, daher arbeiten wir lieber direkt in der Kategorie Mod_R . Später werden wir darüber hinaus oft annehmen, dass R kommutativ oder sogar ein Hauptidealring ist. Das liefert uns gleich die wichtigsten Zielkategorien, nämlich

$$\text{Mod}_{\mathbb{Z}} = \text{Ab} \quad \text{und} \quad \text{Mod}_{\mathbb{k}} = \text{Vec}_{\mathbb{k}} \quad \text{für einen Körper } \mathbb{k} .$$

Die wichtigsten Körper wiederum werden $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$ und $\mathbb{k} = \mathbb{Z}/2$ oder allgemeiner \mathbb{Z}/p für eine Primzahl p sein.

5.1. BEMERKUNG. Es sei R ein Ring. Dann hat die Kategorie Mod_R der (Links-) R -Moduln folgende wichtige Eigenschaften.

- (1) *Punktiert*: Es gibt ein Nullobjekt 0 , und daher zwischen je zwei Objekten X, Y einen Nullmorphimus $0: X \rightarrow 0 \rightarrow Y$, siehe Bemerkung 4.29.

- (2) *Additiv*: Zusätzlich zu (1) gibt es endliche Produkte und Koprodukte, und für je zwei Objekte ist die natürliche Abbildung

$$X \sqcup Y \longrightarrow X \times Y$$

ein Isomorphismus. Wir nennen das Koprodukt daher auch *direkte Summe*. Jetzt kann man Morphismen $f, g: X \rightarrow Y$ addieren:

$$X \xrightarrow{\Delta} X \times X \xleftarrow{\cong} X \sqcup X \xrightarrow{f \sqcup g} Y \sqcup Y \xrightarrow{\text{id} \sqcup \text{id}} Y.$$

Diese Addition entspricht genau der elementweisen Addition, also $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \in Y$. Allein aus der kategoriellen Beschreibung folgt, dass $\text{Hom}_R(X, Y)$ eine abelsche Halbgruppe ist, und das die Verknüpfung von Morphismen bilinear ist. Zusätzlich fordert man noch, dass $\text{Hom}_R(X, Y)$ sogar ein Gruppe ist.

- (3) *Prä-Abelsch*: Zusätzlich zu (1), (2) hat jeder Morphismus $f: X \rightarrow Y$ einen *Kern* $\ker f \hookrightarrow X$ und einen *Kokern* $Y \twoheadrightarrow \text{coker } f$. Bisher haben wir sie als Faser und Kofaser bezeichnet:

$$\begin{array}{ccc} \ker f \hookrightarrow X & & \text{coker } f \leftarrow Y \\ \downarrow & \text{und} & \uparrow \\ 0 \longrightarrow Y & & 0 \longleftarrow X \end{array}$$

- (4) *Abelsch*: Zusätzlich zu (1)–(3) ist jedes Unterobjekt *normal*, das heißt, Kern eines Morphismus, und jeder Quotient ist *konormal*, das heißt, Kokern eines Morphismus. Wir verzichten hier auf die kategorielle Beschreibung. Als Folge gilt der *Homomorphiesatz*: Für jeden Morphismus $f: X \rightarrow Y$ gilt

$$\text{im } f = \ker \text{coker } f \cong \text{coker } \ker f = \text{coim } f.$$

Außerdem können wir in abelschen Kategorien über exakte Sequenzen sprechen.

- (5) *Vollständig und Kovollständig*: Alle Limiten und Kolimiten existieren, siehe Abschnitt 4.a. Aus (1)–(4) folgt bereits, dass alle endlichen Limiten und Kolimiten existieren.
- (6) *Exakte gerichtete Kolimiten*: Jede Folge von Abbildungen kurzer exakter Sequenzen hat als Kolimes wieder eine kurze exakte Sequenz, siehe Beweis von Lemma ???. Man beachte, dass die analoge Eigenschaft für Limiten im Allgemeinen nicht gilt, siehe Abschnitt ???. Hier ist also zum ersten Mal das Dualitätsprinzip verletzt.
- (7) *Grothendieck-Kategorie*: Zusätzlich zu (1)–(6) hat Mod_R einen *Erzeuger* G , nämlich $G = R$: Der Funktor $|\cdot|: \text{Mod}_R \rightarrow \text{Set}_+$ aus Bemerkung 4.29, der ein Objekt X auf $|X| = \text{Hom}_R(G, X)$ abbildet, ist *treu*, das heißt, für alle Objekte ist $\text{Hom}_R(X, Y) \rightarrow \text{Abb}(|X|, |Y|)$ injektiv. In beliebigen Grothendieck-Kategorien ist $|X|$ wegen (2) eine abelsche Gruppe, damit sogar ein $\text{End } G$ -Modul, und $\text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\text{End } G}(|X|, |Y|)$ ist bijektiv.
- (8) *Abgeschlossen Monoidal*: Wenn R kommutativ ist, ist Mod_R eine abgeschlossene monoidale Kategorie, siehe Abschnitt 4.c.

In der Kategorie Mod_R gelten viele Lemmata der homologischen Algebra, von denen wir bis jetzt nur das Vierer- und Fünfer-Lemma 3.20 kennengelernt haben. Dank (4) lassen sich viele Sätze über exakte Sequenzen durch „Diagrammjagd“ beweisen, und dank (7) dürfen wir dabei mit Elementen (nicht mit Morphismen) arbeiten, siehe etwa Satz 5.6 über die Mayer-Vietoris-Sequenz. Eigenschaft (8) wird wichtig, sobald wir zu sogenannten „multiplikativen“ Theorien übergehen. Später werden wir zusätzlich sogar fordern, dass R ein Hauptidealring ist, siehe etwa Abschnitt ??.

5.2. DEFINITION. Es sei R ein Ring und \mathcal{T}_+ eine punktierte Kategorie topologischer Räume mit einer Modellstruktur. Ein (*allgemeiner*) *reduzierter Homologiefunktor* $(\tilde{h}_\bullet, \partial_\bullet)$ auf \mathcal{T}_+ mit Werten

in Mod_R besteht aus einer Familie von Funktoren

$$\tilde{h}_\bullet = (\tilde{h}_n : \mathcal{T}_+ \rightarrow \text{Mod}_R)_{n \in \mathbb{Z}},$$

und einer Familie natürlicher Transformationen $\partial_\bullet = (\partial_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ mit $\partial_n(X, A) : \tilde{h}_n(X/A) \rightarrow \tilde{h}_{n-1}(A)$ für alle Kofaserungen (X, A) in $c\mathcal{T}_+$, die die folgenden *Eilenberg-Steenrod-Axiome* erfüllen.

- (1) *Homotopieinvarianz.* Für jede schwache Äquivalenz $f: X \rightarrow Y$ ist $\tilde{h}_n f : \tilde{h}_n(X) \rightarrow \tilde{h}_n(Y)$ ein Isomorphismus für alle $n \in \mathbb{Z}$.
- (2) *Homologiesequenz.* Für jede Kofaserung (X, A) mit den natürlichen Abbildungen $\iota: A \rightarrow X$ und $p: X \rightarrow X/A$ ist die folgende Sequenz exakt:

$$\cdots \longleftarrow \tilde{h}_{n-1}(A) \xleftarrow{\partial_n} \tilde{h}_n(X/A) \xleftarrow{\tilde{h}_n p} \tilde{h}_n(X) \xleftarrow{\tilde{h}_n \iota} \tilde{h}_n(A) \longleftarrow \cdots$$

- (3) *Summenaxiom.* Sei $(X_i, x_i)_{i \in I}$ eine Familie gut punktierter Räume, dann ist die von den Inklusionsabbildungen $\iota_i: X_i \rightarrow \bigvee_{i \in I} (X_i, x_i)$ induzierte Abbildung

$$\bigoplus_{i \in I} \tilde{h}_n \iota_i : \bigoplus_{i \in I} \tilde{h}_n(X_i) \xrightarrow{\cong} \tilde{h}_n \left(\bigvee_{i \in I} (X_i, x_i) \right)$$

ein Isomorphismus.

Man nennt $(\tilde{h}_\bullet, \partial_\bullet)$ einen (*gewöhnlichen*) *reduzierten Homologiefunktor* mit *Koeffizienten* $M \in \text{Mod}_R$, wenn zusätzlich das folgende Axiom gilt.

- (4) *Dimensionsaxiom.*

$$\tilde{h}_n(S^0) = \begin{cases} M & \text{für } n = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgrund der Diagramme in Definition 4.60 gilt $\tilde{h}_n f = \tilde{h}_n g$ für alle n , wenn f und $g: X \rightarrow Y$ (rechts- oder links-) homotop sind. Nach Definition 4.62 und dem Satz 4.63 von Quillen ist (1) äquivalent dazu, dass sich \tilde{h}_n auf der Homotopiekategorie $\text{Ho}\mathcal{T}_+$ definieren lässt. Axiome (2) und (3) sprechen nur über Kofaserungen beziehungsweise kofibrante Objekte. Für beliebige Paare (Y, X) und allgemeiner Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ ersetzt man den Quotienten durch den Homotopiequotienten $X//A$ beziehungsweise durch den Abbildungskegel aus Definition 3.71. Aufgrund der Homotopieinvarianz von \tilde{h} gilt Axiom (2) in dieser Situation analog.

Wir betrachten die Kategorie der Pfeile in $c\mathcal{T}_+$, das ist die volle Unterkategorie von Pair , die alle Kofaserungen (X, A) enthält. Die Zuordnungen $(X, A) \mapsto \tilde{h}_n(X/A)$ und $(X, A) \mapsto \tilde{h}_{n-1}(A)$ sind zwei Funktoren von dieser Kategorie in die Kategorie Mod_R . Der *Verbindungshomomorphismus* oder die *Randabbildung* ∂_n im Axiom (2) ist eine natürliche Transformation im Sinne von Definition 3.3 zwischen diesen beiden Funktoren. Sei $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ eine Abbildung zwischen Kofaserungen, dann erhalten wir also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \tilde{h}_n(A) & \xrightarrow{\tilde{h}_n \iota} & \tilde{h}_n(X) & \xrightarrow{\tilde{h}_n p} & \tilde{h}_n(X/A) & \xrightarrow{\partial_n} & \tilde{h}_{n-1}(A) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \tilde{h}_n(f|_A) \downarrow & & \tilde{h}_n f \downarrow & & \tilde{h}_n \bar{f} \downarrow & & \tilde{h}_{n-1}(f|_A) \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & \tilde{h}_n(B) & \xrightarrow{\tilde{h}_n \iota} & \tilde{h}_n(Y) & \xrightarrow{\tilde{h}_n p} & \tilde{h}_n(Y/B) & \xrightarrow{\partial_n} & \tilde{h}_{n-1}(B) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Dabei ergibt sich die Kommutativität der zwei linken Quadrate aus der Natürlichkeit von ι und p (siehe oben) und der Funktorialität von \tilde{h}_n , während die Kommutativität des rechten Quadrats aus der Natürlichkeit von ∂_\bullet folgt. Streng genommen sollten wir in der Sequenz (2) Minuszeichen wie in den Faser- und Kofasersequenzen 4.67 und 4.72 einbauen. Diese ändern jedoch nichts an der Exaktheit und der Natürlichkeit und werden daher meist weggelassen.

Später schreiben wir meistens nur \tilde{h}_\bullet anstelle von $(\tilde{h}_\bullet, \partial_\bullet)$. Außerdem kürzen wir gern $\tilde{h}_k f$ durch f_* ab, wenn klar ist, zwischen welchen Homologien f_* abbildet.

In der Literatur gibt es viele Varianten dieser Axiome. Die natürliche lange exakte Sequenz (2) zusammen mit Homotopieinvarianz (1) bilden dabei stets den „harten Kern“. Auf das Summenaxiom (3) können wir wegen Bemerkung 5.7 verzichten, wenn wir nur endliche Koproducte betrachten wollen; diese reichen aber nicht für alle Anwendungen aus. Andere Axiome können wir bei Bedarf zusätzlich fordern, zum Beispiel, dass (3) sogar für alle abstrakten Limiten gilt. Die ursprünglichen Axiome von Eilenberg und Steenrod beziehen sich übrigens auf *unreduzierte* Homologie, siehe Bemerkung 5.5 (2) unten.

Übrigens sind die Axiome (1)–(3) so allgemein gehalten, dass sie auf beliebige Modellkategorien anwendbar sind. Beispielsweise ist die Homologie eines Kettenkomplexes aus Definition 5.15 ein Homologiefunktor im Sinne der obigen Definition, wenn man eine passende Modellstruktur auf \mathcal{Ch}_R wählt. Nur für Axiom (4) müsste man ein spezielles Objekt auszeichnen, das die Rolle der S^0 übernimmt.

Wir kennen bereits einen allgemeinen Homologiefunktor. Dieser wird uns später dabei helfen, weitere Homologiefunktoren zu konstruieren.

5.3. FOLGERUNG (aus Satz 3.82 und den Propositionen 3.79 und 3.84). *Die stabilen Homotopiegruppen bilden einen allgemeinen Homologiefunktor $\pi_\bullet^s: \mathcal{T}_+ \rightarrow \mathcal{Ab}$.*

Stabile Homotopiegruppen erfüllen aber nicht das Dimensionsaxiom, denn nach Satz 3.101 gilt $\pi_1^s(S^0) \cong \mathbb{Z}/2 \neq 0$.

5.4. LEMMA. *Es sei X schwach zusammenziehbar, das heißt, schwach äquivalent zum Ein-Punkt-Raum pt. Dann gilt $\tilde{h}_k(X) = 0$ für jeden allgemeinen reduzierten Homologiefunktor \tilde{h}_\bullet .*

BEWEIS. Betrachte $(X, A) = (\text{pt}, \text{pt})$ mit den natürlichen Abbildungen $\iota = p = \text{id}_X$. Nach Axiom (2) ist die Sequenz

$$\tilde{h}_n(X/A) \xleftarrow{p_*} \tilde{h}_n(X) \xleftarrow{\iota_*} \tilde{h}_n(A)$$

bei $\tilde{h}_n(X)$ exakt, also folgt

$$\tilde{h}_n(X) = \text{im}(\text{id}) = \ker(\text{id}) = 0. \quad \square$$

5.5. BEMERKUNG. Wir betrachten die Rolle des Basispunktes in der Homologie. Dazu sei X ein Raum mit Basispunktes x_0 . Wegen der Homotopieinvarianz 5.2 (1) dürfen wir X , wenn nötig, durch einen schwach äquivalenten Raum $X \vee (I, 0)$ mit gutem Basispunkt $(I, 1)$ ersetzen.

- (1) Es sei $X_+ = X \sqcup \{*\}$ ein Raum mit neuem Basispunkt $*$, dann betrachten wir die punktierten Abbildungen

$$\begin{aligned} \iota: S^0 &\longrightarrow X_+ & \text{mit } S^0 &= \{x_0, *\} \subset X_+, \\ r: X_+ &\longrightarrow S^0 & \text{mit } r(x) &= x_0 \quad \text{für alle } x \in X. \end{aligned}$$

Dann ist S^0 ein Retrakt von X_+ , und $S^0 \hookrightarrow X_+$ ist eine Kofaserung mit Kofaser $X \cong X_+/S^0$. Funktoren bilden Retrakte auf Retrakte ab, und Retrakte in abelschen Kategorien sind direkte Summanden. Also erhalten wir einen Isomorphismus

$$\tilde{h}_k(X_+) \cong \tilde{h}_k(X) \oplus \tilde{h}_k(S^0).$$

Die linke Seite ist funktoriell in X in \mathcal{T} . Allerdings hängt der Isomorphismus selbst von der Wahl von x_0 ab, siehe Übung 5.34.

- (2) Zu jedem allgemeinen reduzierten Homologiefunktor \tilde{h}_\bullet definieren wir einen allgemeinen *unreduzierten* Homologiefunktor h_\bullet auf \mathcal{Pair} und auf \mathcal{T} durch

$$h_k(X, U) = \tilde{h}_k(X//U) \quad \text{und} \quad h_k(X) = h_k(X, \emptyset) = \tilde{h}_k(X_+).$$

Man nennt $h_k(X, U)$ auch *relative Homologie*, siehe Übung 5.46 für CW-Komplexe. Die Eilenberg-Steenrod-Axiome [ES, Section I.3] fordern anstelle von Axiom 5.2 (2) eine lange exakte Sequenz

$$\dots \leftarrow h_{n-1}(U) \xleftarrow{\partial_n} h_n(X, U) \leftarrow h_n(X) \leftarrow h_n(U) \leftarrow \dots$$

für alle Paare (X, U) , nicht nur für Kofaserungen. Außerdem benötigt man ein Ausschneidungsaxiom, siehe Satz ???. Diese Forderungen sind dann zu 5.2 (2) äquivalent.

- (3) Umgekehrt können wir die reduzierte Homologie aus der unreduzierten Homologie nach Wahl eines Basispunktes x_0 rekonstruieren als

$$\tilde{h}_k(X) = h_k(X, \{x_0\}) .$$

- (4) Wir erhalten wegen Satz 3.97, Folgerung 5.3 und (2) als Beispiel eines allgemeinen unreduzierten Homologiefunktors den gerahmten Bordismus

$$\Omega_{\bullet}^{\text{fr}}(X) = \pi_{\bullet}^s(X_+) .$$

In Zukunft meinen wir immer reduzierte Homologiefunktoren, solange wir nicht anderes sagen. Als nächstes wollen wir einige möglichst allgemeine Sätze über Homologiefunktoren aus den Axiomen herleiten.

5.6. SATZ (Mayer-Vietoris-Sequenz). *Es sei $X = A \cup B$, so dass $(A, A \cap B)$ und $(B, A \cap B)$ Kofaserungen sind, und es sei \tilde{h} ein allgemeiner Homologiefunktor. Bezeichne die natürlichen Inklusionen mit*

$$\begin{array}{ccc} A \cap B & \xrightarrow{a} & A \\ \downarrow b & & \downarrow i \\ B & \xrightarrow{j} & X \end{array} .$$

Dann existiert ein natürlicher Verbindungshomomorphismus $\partial: \tilde{h}_n(X) \rightarrow \tilde{h}_{n-1}(A \cap B)$, so dass die Sequenz

$$\dots \leftarrow \tilde{h}_{n-1}(A \cap B) \xleftarrow{\partial} \tilde{h}_n(X) \xleftarrow{i_* + j_*} \tilde{h}_n(A) \oplus \tilde{h}_n(B) \xleftarrow{(a_*, -b_*)} \tilde{h}_n(A \cap B) \leftarrow \dots$$

exakt ist.

BEWEIS. Wir wissen aus Folgerung 3.65, dass (X, A) und (X, B) unter den obigen Voraussetzungen ebenfalls Kofaserungen sind. Außerdem gilt $X/A \cong B/(A \cap B)$ und $X/B \cong A/(A \cap B)$. Wir fassen die \tilde{h} -Sequenzen für die Paare (X, A) , (X, B) , $(A, A \cap B)$ und $(B, A \cap B)$ im folgenden Diagramm zusammen:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \xrightarrow{r_*} & & \xrightarrow{\partial} & & \xrightarrow{s_*} & & \xrightarrow{-\partial} & & \\ \tilde{h}_{n-1}(X/B) & & & \tilde{h}_{n-1}(A) & & \tilde{h}_n(X/A) & & \tilde{h}_n(B) & & \tilde{h}_{n+1}(X/B) & \\ & \swarrow q_* & & \swarrow i_* & & \swarrow a_* & & \swarrow \partial & & \swarrow p_* & & \swarrow j_* & & \swarrow b_* & & \swarrow -\partial & \\ & & \tilde{h}_{n-1}(X) & & \tilde{h}_{n-1}(A \cap B) & & \tilde{h}_n(X) & & \tilde{h}_n(A \cap B) & & & & & & & \\ & \swarrow p_* & & \swarrow j_* & & \swarrow b_* & & \swarrow -\partial & & \swarrow q_* & & \swarrow i_* & & \swarrow a_* & & \swarrow \partial & \\ \tilde{h}_{n-1}(X/A) & & \tilde{h}_{n-1}(B) & & \tilde{h}_n(X/B) & & \tilde{h}_n(A) & & \tilde{h}_{n+1}(X/A) & & & & & & & \\ & & \xrightarrow{s_*} & & \xrightarrow{-\partial} & & \xrightarrow{r_*} & & \xrightarrow{\partial} & & & & & & & \end{array} .$$

Die linke und die rechte Raute kommutieren, weil \tilde{h}_\bullet ein Funktor ist. Die „runden Dreiecke“ kommutieren wegen der Natürlichkeit der langen exakten Sequenz (2), angewandt auf die Paarabbildung $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ beziehungsweise $(A, A \cap B) \hookrightarrow (X, B)$, und weil $X/A \cong B/(A \cap B)$ beziehungsweise $X/B \cong A/(A \cap B)$. Die Kommutativität der mittleren Raute können wir erst später in Bemerkung 5.8 zeigen; sie wird im Folgenden auch nicht benutzt.

Als Verbindungshomomorphismus wählen wir $\partial \circ p_* = -\partial \circ q_*$. Da ∂ natürlich ist, ist dieser Verbindungshomomorphismus ebenfalls natürlich, hängt allerdings von der Reihenfolge der Mengen A und B ab. Um zu zeigen, dass die Sequenz exakt ist, veranstalten wir eine Diagrammjagd zwischen den (oben farbig gezeichneten) exakten Sequenzen der Paare (X, A) und $(B, A \cap B)$.

Beispielsweise folgt die Exaktheit bei $h_n(A) \oplus h_n(B)$ aus folgendem Argument. Sei zunächst $\gamma \in \tilde{h}_n(A \cap B)$. Aus der Kommutativität der rechten Raute folgt

$$((i_* + j_*) \circ (a_*, -b_*))(\gamma) = (i_* \circ a_*)(\gamma) - (j_* \circ b_*)(\gamma) = 0.$$

Seien jetzt $\alpha \in \tilde{h}_n(A)$ und $\beta \in \tilde{h}_n(B)$ gegeben, so dass $i_*\alpha + j_*\beta = 0$. Dann liegt $\xi = -j_*\beta = i_*\alpha$ im Bild von i_* , also im Kern von p_* . Es folgt $s_*\beta = -p_*\xi = 0$, also existiert ein Element $\gamma' \in \tilde{h}_n(A \cap B)$ mit $-b_*\gamma' = \beta$. Da $(i_* \circ a_*)\gamma' = (j_* \circ b_*)\gamma' = \xi = i_*\alpha$, also $i_*(\alpha - a_*\gamma') = 0$, existiert ein $\delta \in \tilde{h}_{n+1}(X/A)$ mit $\partial\delta = \alpha - a_*\gamma' \in \tilde{h}_n(A)$. Dann ist $\gamma = \gamma' + \partial\delta \in \tilde{h}_n(A \cap B)$ das gesuchte Urbild von (α, β) .

Die Exaktheit an den anderen Stellen ist Inhalt der Übung 5.35. \square

5.7. BEMERKUNG. Mit Hilfe der Mayer-Vietoris-Sequenz sehen wir, dass das Summenaxiom (3) für endliche Summen bereits aus den Axiomen (1) und (2) folgt, denn mehr haben wir im obigen Beweis nicht gebraucht. Sei dazu $X = Y \vee Z$ mit Basispunkt in $Y \cap Z = \text{pt}$, dann erhalten wir mit Lemma 5.4, dass

$$\cdots \longleftarrow \underbrace{\tilde{h}_{n-1}(\text{pt})}_{=0} \longleftarrow \tilde{h}_n(X) \xleftarrow{i_*+j_*} \tilde{h}_n(Y) \oplus \tilde{h}_n(Z) \longleftarrow \underbrace{\tilde{h}_n(\text{pt})}_{=0} \longleftarrow \cdots$$

5.8. BEMERKUNG. Aufgrund der Symmetrie des Diagramms im Beweis von Satz 5.6 erhalten wir analog zur Mayer-Vietoris-Sequenz eine zweite Sequenz

$$\cdots \longleftarrow \tilde{h}_{n-1}(X) \xleftarrow{\partial} \tilde{h}_n(A \cap B) \xleftarrow{\partial-\partial} \tilde{h}_n(X/A) \oplus \tilde{h}_n(X/B) \xleftarrow{(p_*, -q_*)} \tilde{h}_n(X) \longleftarrow \cdots$$

Nun kann man sich überzeugen, dass $X/(A \cap B) \cong (X/A) \vee (X/B)$, indem man $X/(A \cap B)$ als Pushout von $A/(A \cap B)$ längs $\text{pt} \rightarrow B/(A \cap B)$ schreibt. Dann entspricht die obige Sequenz nach Bemerkung 5.7 gerade der exakten Sequenz des Paares $(X, A \cap B)$. Aus ihrer Exaktheit schließen wir, dass auch die mittlere Raute im obigen Diagramm kommutiert.

5.9. BEMERKUNG. Nach Folgerung 5.3 bilden die stabilen Homotopiegruppen π_\bullet^s einen Homologiefunktor, somit ist die Mayer-Vietoris-Sequenz für π_\bullet^s exakt. Wenn ähnliche Zusammenhangsvoraussetzungen für die Paare $(A, A \cap B)$ und $(B, A \cap B)$ wie in Folgerung 3.65 gelten, existiert eine ähnliche endliche exakte Sequenz für die „instabilen“ Homotopiegruppen π_\bullet . Wir überlassen Konstruktion und Beweis dem Leser als Übung 5.36. Allerdings muss man für π_1 aufpassen, da der Satz 2.39 von Seifert-van Kampen sich nur dann gut in die lange exakte Sequenz einfügt, wenn mindestens eine der Gruppen $\pi_1(A)$, $\pi_1(B)$ oder $\pi_1(A \cap B)$ verschwindet.

5.10. SATZ. *Es sei \tilde{h}_\bullet ein allgemeiner reduzierter Homologiefunktor und $k, n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq 1$. Dann existiert für jeden gut punktierten Raum X ein natürlicher Isomorphismus*

$$\tilde{h}_k(S^n X) \cong \tilde{h}_{k-n}(X). \quad (1)$$

Falls \tilde{h}_\bullet ein gewöhnlicher reduzierter Homologiefunktor mit Koeffizienten M in Mod_R ist, gilt insbesondere

$$\tilde{h}_k(S^n) \cong \begin{cases} M & \text{falls } k = n, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2)$$

Aussage (1) liefert für $\tilde{h}_\bullet = \pi_\bullet^s$ eine offensichtliche Folgerung aus dem Freudenthalschen Einhängungssatz 3.76.

Jetzt wird auch der Name „Dimensionsaxiom“ klar: ein reduzierter Homologiefunktor mit Koeffizienten $M \neq 0$ „sieht“ die Dimension der Sphären S^n . Daher lassen sich manche der Anwendungen des Satzes 3.42 von Brouwer-Hopf aus (2) folgern, beispielsweise der Fixpunktsatz 3.44 von Brouwer und der Satz 3.51 von der Invarianz der Dimension. Für den Satz 3.48 vom Igel benötigen wir zusätzlich den Abbildungsgrad, siehe Satz 5.11 unten.

BEWEIS. Diesen Beweis können wir entweder analog zum Satz 3.42 oder mit Hilfe der Mayer-Vietoris-Sequenz führen. Wir entscheiden uns für Letzteres. Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen. Für $n \geq 1$ zerlegen wir $S^n X$ in zwei reduzierte Kegel $C_\pm^n X \cong (I, 0) \wedge \cdots \wedge (I, 0) \wedge X \cong D^n \wedge X$ mit Basispunkt auf dem Durchschnitt $S^{n-1} X = C_+^n X \cap C_-^n X$. Da $(C_\pm^n X, S^{n-1} X)$ Kofaserungen sind und $C_\pm^n X$ zusammenziehbar, erhalten wir mit Lemma 5.4 und Satz 5.6 die exakte Sequenz

$$\cdots \leftarrow \underbrace{\tilde{h}_{k-1}(C_+^n X) \oplus \tilde{h}_{k-1}(C_-^n X)}_{=0} \leftarrow \tilde{h}_{k-1}(S^{n-1} X) \xleftarrow{\partial} \tilde{h}_k(S^n X) \leftarrow \underbrace{\tilde{h}_k(C_+^n X) \oplus \tilde{h}_k(C_-^n X)}_{=0} \leftarrow \cdots$$

Wir erhalten induktiv den gesuchten Isomorphismus

$$\tilde{h}_k(S^n X) \cong \tilde{h}_{k-1}(S^{n-1} X) \cong \tilde{h}_{k-n}(X).$$

Wenn \tilde{h}_\bullet ein gewöhnlicher reduzierter Homologiefunktor mit Koeffizienten M in Mod_R ist, folgt die zweite Behauptung aus der ersten und dem Dimensionsaxiom 5.2 (4). \square

Wir betrachten jetzt stetige Abbildungen $f: S^n \rightarrow S^n$. Nach dem Satz 3.42 von Brouwer-Hopf und Übung 3.120 ist für alle $n \geq 1$ der Abbildungsgrad aus Definition 3.45 ein Ringisomorphismus $\text{deg}: \pi_n(S^n) \rightarrow \mathbb{Z}$. Wegen Homotopieinvarianz hängt $f_*: \tilde{h}_k(S^n) \rightarrow \tilde{h}_k(S^n)$ nur vom Abbildungsgrad $\text{deg } f$ ab. Für spätere Anwendungen ist die Charakterisierung des Abbildungsgrades für differenzierbare f aus Folgerung 3.91 hilfreich, bei der es reicht, die Urbilder eines regulären Wertes von f mit dem durch die jeweilige Orientierung von df gegebenen Vorzeichen zu zählen.

Da Mod_R additiv ist, ist $\text{Hom}_R(\tilde{h}(S^n), \tilde{h}(S^n))$ eine abelsche Gruppe, oder äquivalent ein \mathbb{Z} -Modul. Wir können also Elemente von $\text{Hom}_R(\tilde{h}(S^n), \tilde{h}(S^n))$ mit ganzen Zahlen multiplizieren.

5.11. SATZ. Sei \tilde{h}_\bullet ein Homologiefunktor, und $k \in \mathbb{Z}$, $m, n \in \mathbb{N}$ und $f: S^m \rightarrow S^n$ seien stetig.

- (1) Falls $m < n$, gilt $f_* = 0: \tilde{h}_k(S^m) \rightarrow \tilde{h}_k(S^n)$.
- (2) Falls $m = n$, gilt $f_* = \text{deg } f: \tilde{h}_k(S^n) \rightarrow \tilde{h}_k(S^n)$.
- (3) Falls $m > n$ und falls \tilde{h}_\bullet das Dimensionsaxiom (4) erfüllt, gilt $f_* = 0: \tilde{h}_k(S^m) \rightarrow \tilde{h}_k(S^n)$.

Insbesondere liefert dieser Satz eine weitere Charakterisierung des Abbildungsgrades. Allerdings können wir den Abbildungsgrad nur dann mit Hilfe von \tilde{h}_\bullet bestimmen, wenn \mathbb{Z} treu auf $\tilde{h}_\bullet(S^0)$ wirkt. Das ist beispielsweise nicht der Fall, wenn \tilde{h}_\bullet ein gewöhnlicher Homologiefunktor mit Koeffizienten \mathbb{Z}/n ist für ein $n \neq 0$.

BEWEIS. Nach Satz 3.42 (1) ist f homotop zur konstanten Abbildung, falls $m < n$. In diesem Fall faktorisiert f_* über $\tilde{h}_k(\text{pt}) = 0$, und es folgt Behauptung (1).

Falls \tilde{h}_\bullet das Dimensionsaxiom erfüllt und $m \neq n$, gilt $\tilde{h}_k(S^m) = 0$ oder $\tilde{h}_k(S^n) = 0$, und es folgt (3).

Zu (2) reicht es, zu zeigen, dass $\tilde{h}: \pi_n(S^n) \rightarrow \text{End}_R(\tilde{h}_k(S^n))$ mit $f \mapsto f_*$ ein Homomorphismus abelscher Gruppen ist. Denn $\deg \text{id}_{S^n} = 1$, und wegen Folgerung 3.46 und Funktorialität folgt

$$f_* = (\deg f \cdot \text{id}_{S^n})_* = \deg f \cdot (\text{id}_{S^n})_* = \deg f .$$

Es sei $S^{n-1} \subset S^n$ ein Äquator, der den Basispunkt erhält. Wir betrachten die Quotientenabbildung $d: S^n \rightarrow S^n/S^{n-1} \cong S^n \vee S^n$. Seien $f, g: S^n \rightarrow S^n$ gegeben, dann können wir die Summe $[f] + [g] \in \pi_n(S^n)$ nach Definition 3.1 darstellen durch die zusammengesetzte Abbildung

$$S^n \xrightarrow{d} S^n \vee S^n \xrightarrow{f \vee g} S^n .$$

Wir wenden den Homologiefunktor \tilde{h}_n an und erhalten

$$\tilde{h}_n(S^n) \xrightarrow{d_*} \tilde{h}_n(S^n) \oplus \tilde{h}_n(S^n) \xrightarrow{f_* \oplus g_*} \tilde{h}_n(S^n) . \quad (*)$$

Um die Abbildung d_* besser zu verstehen, betrachten wir zunächst $f = \text{id}_{S^n}$, $g = 0$. Dann ist $(f \vee g) \circ d$ homotop zur Identität, und wir erhalten

$$(\text{id}_{\tilde{h}_n(S^n)} \oplus 0) \circ d_* = \text{id}_{\tilde{h}_n(S^n)} .$$

Indem wir die Rollen von f und g vertauschen, sehen wir insgesamt, dass $d_* = \Delta$ die Diagonalabbildung in die direkte Summe ist.

Wir vergleichen jetzt das Diagramm (*) mit der Addition von Morphismen in $\mathcal{M}od_R$ nach Bemerkung 5.1 (3) und erhalten wie gewünscht

$$((f \vee g) \circ d)_* = (f_* \oplus g_*) \circ \Delta = f_* + g_* \in \text{Hom}_R(\tilde{h}_n(S^n), \tilde{h}_n(S^n)) . \quad \square$$

5.12. BEMERKUNG. Aussage (3) gilt nicht für allgemeine Homologiefunktoren. Dazu betrachten wir wieder π_3^s . Es sei $f: S^3 \rightarrow S^2$ die Hopf-Faserung. Aus Satz 3.101 wissen wir, dass $0 \neq [f] \in \pi_3^s(S^2) = \pi_1^s(S^0)$. Außerdem sei $1 = [\text{id}_{S^3}] \in \pi_0^s(S^0)$. Es folgt

$$f_*(1) = f_*[\text{id}_{S^3}] = [f \circ \text{id}_{S^3}] = [f] \neq 0 \in \pi_3^s(S^2) \cong \mathbb{Z}/2 .$$

5.b. Zelluläre Homologie

Wir zeigen, dass sich die (gewöhnliche) Homologie \tilde{h}_\bullet von CW-Komplexen allein aus den Koeffizienten $\tilde{h}_\bullet(S^0)$ und gewissen Daten der CW-Struktur berechnen lässt. Dieses Ergebnis ist aus mehreren Gründen interessant:

- Es zeigt, dass die Eilenberg-Steenrod-Axiome gewöhnliche Homologiefunktoren auf der Unterkategorie der CW-Komplexe bereits vollständig festlegen, in der Quillen-Modellstruktur also auf ganz \mathcal{T}_+ ;
- Es zeigt auch, dass gewöhnliche Homologiefunktoren mit beliebigen Koeffizienten in $\mathcal{M}od_R$ stets existieren;
- Für einfach konstruierte Räume erhalten wir sehr effizientes Verfahren zur Bestimmung der Homologiegruppen.

Wir beginnen mit einigen Vorüberlegungen.

5.13. PROPOSITION. *Es sei \tilde{h}_\bullet ein Homologiefunktor, der das Summenaxiom 5.2 (3) erfüllt, und es sei X ein CW-Komplex mit einer aufsteigenden Folge $X_0 \subset X_1 \subset \dots$ von Unterkomplexen, so dass $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$. Für alle k gilt dann*

$$\tilde{h}_k(X) = \text{colim } \tilde{h}_k(X_i) .$$

Diese Proposition bedeutet allerdings nicht, dass \tilde{h}_\bullet kostetig wäre. Denn dann müsste \tilde{h}_\bullet auch Pushouts in Pushouts überführen. Ein Hindernis dagegen ist der Verbindungshomomorphismus in der Mayer-Vietoris-Sequenz 5.6, und in Satz 5.10 haben wir Beispiele gesehen, in denen letzterer nicht verschwindet.

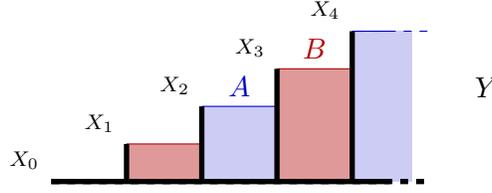


ABBILDUNG 5.1. Das Teleskop einer Folge von CW-Komplexen

BEWEIS. Anstelle von X betrachten wir den CW-Komplex

$$Y = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} ([i, i+1]_+ \wedge X_i) \subset [0, \infty)_+ \wedge X ,$$

siehe Abbildung 5.1. Somit ist Y die Vereinigung der Abbildungszylinder der Inklusionen $\iota_i: X_i \rightarrow X_{i+1}$. Man nennt diese Konstruktion auch *Abbildungsteleskop*, dabei handelt es sich um einen Spezialfall eines Homotopie-Kolimes. Die Projektion $[0, \infty)_+ \wedge X \rightarrow X$ induziert eine Abbildung $r: Y \rightarrow X$. Analog definieren wir

$$r_n: Y_n = \bigcup_{i \leq n} ([i, i+1]_+ \wedge X_i) \longrightarrow X_n .$$

Dann ist r_n eine Deformationsretraktion, insbesondere eine schwache Äquivalenz.

Als nächstes zeigen wir, dass r eine schwache Homotopieäquivalenz ist. Jede stetige Abbildung $S^k \rightarrow X$ trifft nach Proposition 4.38 nur endlich viele Zellen, und faktorisiert daher über eine der Inklusionen $X_i \rightarrow X$. Das gleiche gilt für Homotopien zwischen solchen Abbildungen. Analog faktorisieren Abbildungen $S^k \rightarrow Y$ und Homotopien zwischen ihnen über eine der Inklusionen $Y_i \rightarrow Y$. Da X_i und Y_i homotopieäquivalent sind, induziert r einen Isomorphismus

$$\pi_k(Y) = \operatorname{colim} \pi_k(Y_i) \xrightarrow{r_*} \operatorname{colim} \pi_k(X_i) = \pi_k(X) .$$

Nach dem Satz 4.46 von Whitehead ist r sogar eine Homotopieäquivalenz. Also reicht es, $\tilde{h}_\bullet(Y)$ zu bestimmen.

Wir schreiben Y als Vereinigung zweier Unterkomplexe

$$A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} ([2i, 2i+1]_+ \wedge X_{2i}) \quad \text{und} \quad B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} ([2i+1, 2i+2]_+ \wedge X_{2i+1}) \subset Y .$$

Dann erhalten wir Homotopieäquivalenzen

$$A \simeq \bigvee_{i \in \mathbb{N}} X_{2i} , \quad B \simeq \bigvee_{i \in \mathbb{N}} X_{2i+1} , \quad \text{und} \quad A \cap B \simeq \bigvee_{i \in \mathbb{N}} X_i .$$

Da es sich um Unterkomplexe handelt, sind $(A, A \cap B)$ und $(B, A \cap B)$ Kofaserungen, und wir betrachten die Mayer-Vietoris-Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longleftarrow & \tilde{h}_k(Y) & \longleftarrow & \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \tilde{h}_k(X_{2i}) \oplus \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \tilde{h}_k(X_{2i+1}) & \xleftarrow{\varphi} & \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \tilde{h}_k(X_i) & \longleftarrow & \dots \\ & & \parallel & & \parallel & & \cong \downarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i \operatorname{id}_{\tilde{h}_k(X_i)} & & \\ \dots & \longleftarrow & \tilde{h}_k(Y) & \longleftarrow & \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \tilde{h}_k(X_i) & \xleftarrow{\psi} & \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \tilde{h}_k(X_i) & \longleftarrow & \dots \end{array}$$

Der Pfeil φ wird nach Satz 5.6 für alle i gegeben durch

$$\varphi|_{\tilde{h}_k(X_{2i})} = \operatorname{id}_{\tilde{h}_k(X_{2i})} - \iota_{2i*} \quad \text{und} \quad \varphi|_{\tilde{h}_k(X_{2i+1})} = \iota_{(2i+1)*} - \operatorname{id}_{\tilde{h}_k(X_{2i+1})} ,$$

also erhalten wir

$$\psi = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} (\text{id}_{\tilde{h}_k(X_i)} - \iota_{i*}) .$$

Sei $\sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i \in \ker \psi$, dann können wir induktiv $\alpha_i = 0 \in \tilde{h}_k(X_i)$ zeigen, also ist ψ injektiv, und die Sequenz zerfällt in lauter kurze exakte Sequenzen. Mit der üblichen Charakterisierung des Kolimes analog zum Beweis von Proposition 4.10 folgt

$$\tilde{h}_k(Y) \cong \bigoplus_i \tilde{h}_k(X_i) / \text{im } \psi \cong \text{colim } \tilde{h}_k(X_i) . \quad \square$$

Im folgenden sei \tilde{h}_\bullet stets ein gewöhnlicher reduzierter Homologiefunktor mit Koeffizienten $M = \tilde{h}_0(S^0)$ in Mod_R . Wir fixieren Homöomorphismen $D^n/S^{n-1} \cong S^n$ und benutzen die Isomorphismen

$$\partial_n : \tilde{h}_n(S^n) \rightarrow \tilde{h}_{n-1}(S^{n-1})$$

aus dem Beweis von Satz 5.10, um induktiv $\tilde{h}_n(S^n)$ mit $\tilde{h}_0(S^0) = M$ zu identifizieren.

Sei $(X, \{x_0\})$ ein CW-Paar wie in Definition 4.37 mit den n -Gerüsten X^n für $n \geq -1$ und den Indexmengen J^n für die n -Zellen für $n \geq 0$. Insbesondere gilt $X^{-1} = \{x_0\}$ und $X^0 \cong J^0 \sqcup \{x_0\}$. Wir schreiben

$$M^{\oplus J^n} = \bigoplus_{j \in J^n} M \quad \text{und} \quad \sum_{j \in J^n} a_j e_j^n = (a_j)_{j \in J^n} \in M^{\oplus J^n} ,$$

so dass $a_j = 0$ außer für endlich viele $j \in J^n$.

Es seien $\Phi_j^n : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X^n, X^{n-1})$ die charakteristischen Abbildungen von X für $j \in J^n$. Wir bezeichnen die induzierten Abbildungen auf den Quotienten mit $\bar{\Phi}_j^n : S^n \rightarrow X^n/X^{n-1}$.

5.14. LEMMA. *Es sei \tilde{h}_\bullet ein gewöhnlicher reduzierter Homologiefunktor mit Koeffizienten M in Mod_R . Es sei $k \in \mathbb{Z}$ und $n \geq 0$. Wir erhalten natürliche Isomorphismen*

$$M^{\oplus J^n} \cong \tilde{h}_n(X^n/X^{n-1}) \quad \text{mit} \quad a_j e_j^n \mapsto \tilde{h}_n \bar{\Phi}_j^n(a_j) \quad \text{für alle } j \in J^n , \quad (1)$$

$$0 \cong \tilde{h}_k(X^n/X^{n-1}) \quad \text{falls } k \neq n , \quad (2)$$

$$0 \cong \tilde{h}_k(X^n) \quad \text{falls } k > n , \quad (3)$$

$$\text{und} \quad \tilde{h}_k(X) \cong \tilde{h}_k(X^n) \quad \text{falls } n > k . \quad (4)$$

BEWEIS. Für jedes $n \geq 0$ erhalten wir einen Homöomorphismus

$$\bigvee_{j \in J^n} S^n \xrightarrow{\bigvee_{j \in J^n} \bar{\Phi}_j^n} X^n/X^{n-1} .$$

Die Behauptungen (1) und (2) folgen aus dem Summenaxiom und aus Satz 5.10.

Punkt (3) folgt aus (2) für $n = 0$ und ergibt sich für $n > 0$ induktiv aus der langen exakten Sequenz des Paares (X^n, X^{n-1}) aus Axiom (2) und Behauptung (2) für $k > n$, da

$$\dots \leftarrow \underbrace{\tilde{h}_k(X^n/X^{n-1})}_{\cong 0} \leftarrow \tilde{h}_k(X^n) \leftarrow \underbrace{\tilde{h}_k(X^{n-1})}_{\cong 0} \leftarrow \dots$$

Mit (2) und der langen exakten Sequenz des Paares (X^{n+1}, X^n) schließen wir, dass $\tilde{h}_k(X^{n+1}) \cong \tilde{h}_k(X^n)$ für $n > k$, denn

$$\dots \leftarrow \underbrace{\tilde{h}_k(X^{n+1}/X^n)}_{\cong 0} \leftarrow \tilde{h}_k(X^{n+1}) \xleftarrow{\cong} \tilde{h}_k(X^n) \leftarrow \underbrace{\tilde{h}_{k+1}(X^{n+1}/X^n)}_{\cong 0} \leftarrow \dots$$

Behauptung (4) folgt jetzt aus Proposition 5.13 mit $X_i = X^i$. □

Nach dem obigen Lemma enthält die lange exakte Sequenz des Paares (X^{n+1}, X^n) für alle n einen Ausschnitt der Form

$$\underbrace{\tilde{h}_n(X^{n+1}/X^n)}_{\cong 0} \longleftarrow \underbrace{\tilde{h}_n(X^{n+1})}_{\cong \tilde{h}_n(X)} \xleftarrow{\iota_*^{n+1}} \tilde{h}_n(X^n) \xleftarrow{\partial^{n+1}} \underbrace{\tilde{h}_{n+1}(X^{n+1}/X^n)}_{\cong M \oplus J^{n+1}} \xleftarrow{p_*^{n+1}} \tilde{h}_{n+1}(X^{n+1}) \longleftarrow \underbrace{\tilde{h}_{n+1}(X^n)}_{\cong 0} .$$

Wir definieren $d_n^{\text{CW}} = p_*^{n-1} \circ \partial$ und setzen diese Ausschnitte zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & & \\ & & & & \swarrow & & \\ & & & & \tilde{h}_n(X) & & \\ & & & & \swarrow & \searrow & \\ & & & & \iota_*^{n+1} & & 0 \\ & & & & \tilde{h}_n(X^n) & & \\ & & & & \swarrow & \searrow & \\ \dots & & & & p_*^n & & \partial^{n+1} \\ \dots & \longleftarrow & \tilde{h}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) & \xleftarrow{d_n^{\text{CW}}} & \tilde{h}_n(X^n/X^{n-1}) & \xleftarrow{d_{n+1}^{\text{CW}}} & \tilde{h}_{n+1}(X^{n+1}/X^n) & \longleftarrow \dots \\ & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & \\ & & p_*^{n-1} & & \partial^n & & p_*^{n+1} & \\ & & \tilde{h}_{n-1}(X^{n-1}) & & & & \tilde{h}_{n+1}(X^{n+1}) & \\ & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & \\ \dots & & \dots & & 0 & & \dots & 0 \end{array}$$

zusammen. Indem wir die Exaktheit der Diagonalen ausnutzen, erhalten wir eine Kette natürlicher Isomorphismen

$$\begin{aligned} \tilde{h}_n(X) &\cong \tilde{h}_n(X^n) / \text{im } \partial^{n+1} && \text{da } \iota_*^{n+1} \text{ surjektiv ist,} \\ &\cong \text{im } p_*^n / \text{im } (p_*^n \circ \partial^{n+1}) && \text{da } p_*^n \text{ injektiv ist,} \\ &= \ker \partial^n / \text{im } d_{n+1}^{\text{CW}} && \text{da } \text{im } p_*^n = \ker \partial^n, \\ &= \ker d_n^{\text{CW}} / \text{im } d_{n+1}^{\text{CW}} && \text{da } p_*^{n-1} \text{ injektiv ist.} \end{aligned}$$

Der Quotient auf der rechten Seite ist wohldefiniert, da $\text{im } d_{n+1}^{\text{CW}} \subset \ker d_n^{\text{CW}}$, oder äquivalent

$$d_n^{\text{CW}} \circ d_{n+1}^{\text{CW}} = p_*^{n-1} \circ (\partial^n \circ p_*^n) \circ \partial^{n+1} = 0 .$$

Mit unser Definition $X^{-1} = \{x_0\}$ funktioniert dieses Argument für alle $n \geq 0$.

Wir erinnern uns an Definition 3.17 von Sequenzen und Sequenzabbildungen.

5.15. DEFINITION. Ein *(Ketten-)Komplex* (C_\bullet, d_\bullet) über R ist eine Sequenz $(d_n: C_n \rightarrow C_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}$ von R -Moduln, so dass

$$d_n \circ d_{n+1} = 0: C_{n+1} \longrightarrow C_{n-1}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$. Man definiert R -Moduln

$$\begin{aligned} B_n(C_\bullet, d_\bullet) &= \text{im } d_{n+1} \subset Z_n(C_\bullet, d_\bullet) = \ker d_n \subset C_n \\ \text{und } H_n(C_\bullet, d_\bullet) &= Z_n(C_\bullet, d_\bullet) / B_n(C_\bullet, d_\bullet) = \ker d_n / \text{im } d_{n+1} . \end{aligned}$$

Elemente von C_n , $Z_n(C_\bullet, d_\bullet)$ und $B_n(C_\bullet, d_\bullet)$ heißen n -Ketten, n -Zykel beziehungsweise n -Ränder des Komplexes. Der R -Modul $H_n(C_\bullet, d_\bullet)$ heißt n -te Homologie des Komplexes und seine Elemente n -te Homologieklassen.

Eine *Kettenabbildung* $f_\bullet: (C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (C'_\bullet, d'_\bullet)$ vom Grad a ist eine Sequenzabbildung vom Grad a . Die induzierten Abbildungen zwischen den Homologien bezeichnet man mit

$$H_n f_\bullet = f_*: H_n(C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow H_{n+a}(C'_\bullet, d'_\bullet).$$

Man überlegt sich leicht, dass sich jede Kettenabbildung $f_\bullet: (C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow (C'_\bullet, d'_\bullet)$ zu Abbildungen

$$Z_n(C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow Z_{n+a}(C'_\bullet, d'_\bullet) \quad \text{und} \quad B_n(C_\bullet, d_\bullet) \rightarrow B_{n+a}(C'_\bullet, d'_\bullet)$$

einschränken lässt, so dass die Abbildung f_* tatsächlich wohldefiniert ist. Die Kettenkomplexe über R bilden eine Kategorie \mathcal{Ch}_R mit den Kettenabbildungen vom Grad 0 als Morphismen, und die n -te Homologie ist ein Funktor $H_n: \mathcal{Ch}_R \rightarrow \text{Mod}_R$. Tatsächlich existiert eine Modellstruktur auf \mathcal{Ch}_R , so dass H_\bullet die Eilenberg-Steenrod-Axiome 5.2 (1)–(3) erfüllt.

5.16. BEMERKUNG. Die volle Unterkategorie der Kettenkomplexe (C_\bullet, d_\bullet) mit $d_\bullet = 0$ wird auch als Kategorie \mathcal{GrMod}_R der graduierten R -Moduln bezeichnet; speziell sei \mathcal{GrAb} die Kategorie der graduierten abelschen Gruppen. Homologie ist ein Funktor $H_\bullet: \mathcal{Ch}_R \rightarrow \mathcal{GrMod}_R$. Er ist *graduiert*, das heißt für alle Kettenabbildungen f_\bullet gilt $\deg f_* = \deg f_\bullet$. Zur Illustration dieser Konzepte sei Übung 5.44 empfohlen.

Wir verwenden im Folgenden Kleinbuchstaben \tilde{h} für (reduzierte) Homologiefunktoren im Sinne der Eilenberg-Steenrod-Axiome 5.2 und Großbuchstaben für die Homologie von Kettenkomplexen.

Nach unseren obigen Überlegungen ist $\tilde{h}_k(X)$ zur Homologie eines Kettenkomplexes $(\tilde{C}_\bullet^{\text{CW}}, d_\bullet^{\text{CW}})$ isomorph. Wir identifizieren $\tilde{C}_n^{\text{CW}}(X; M) = \tilde{h}_n(X^n/X^{n-1})$ mit $M^{\oplus J^n}$ wie in Lemma 5.14 (1). Als nächstes suchen wir eine explizite Formel für den Randoperator $d_n^{\text{CW}}: M^{\oplus J^n} \rightarrow M^{\oplus J^{n-1}}$. Wir betrachten dazu für $j \in J^n$ die Projektionsabbildung

$$q_j^n: X^n/X^{n-1} \longrightarrow X^n / \left(X^{n-1} \cup \bigcup_{i \in J^n \setminus \{j\}} e_i^n \right) \xrightarrow{(\bar{\Phi}_j^n)^{-1}} S^n.$$

Dann gilt

$$q_j^n \circ \bar{\Phi}_i^n = \begin{cases} \text{id}_{S^n} & \text{falls } i = j \in J^n, \text{ und} \\ 0 & \text{falls } i \neq j, \end{cases}$$

und für $\sum_{i \in J^n} a_i e_i^n \in M^{\oplus J^n} = \tilde{h}_n(X^n/X^{n-1})$ folgt

$$(q_j^n)_* \sum_{i \in J^n} a_i e_i^n = \sum_{i \in J^n} (q_j^n \circ \bar{\Phi}_i^n)_*(a_i) = a_j \in \tilde{h}_n(S^n) \cong M.$$

Wir betrachten die Paarabbildungen $\Phi_i^n: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X^n, X^{n-1})$, definieren

$$\partial_{ji}^n = q_j^{n-1} \circ p^{n-1} \circ \bar{\varphi}_i^n: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1} \tag{5.1}$$

für alle $i \in J^n, j \in J^{n-1}$, und erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{h}_{n-1}(S^{n-1}) & \xleftarrow{(\partial_{ij}^n)_*} & \tilde{h}_{n-1}(S^{n-1}) & \xleftarrow{\cong} & \tilde{h}_n(S^n) \\ (q_j^{n-1})_* \uparrow & & (\varphi_i^n)_* \downarrow & & (\bar{\Phi}_i^n)_* \downarrow \\ \tilde{h}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) & \xleftarrow{p_*^{n-1}} & \tilde{h}_{n-1}(X^{n-1}) & \xleftarrow{\partial^n} & \tilde{h}_n(X^n/X^{n-1}). \end{array}$$

Dabei kommutiert das rechte Quadrat wegen der Natürlichkeit von ∂_n , und das linke nach Definition von ∂_{ji}^n . Nach Satz 5.11 (2) operiert $(\partial_{ji}^n)_*$ auf $M = \tilde{h}_{n-1}(S^{n-1})$ durch Multiplikation mit dem Abbildungsgrad $d_{ij}^n = \deg \partial_{ji}^n$.

Insgesamt wird der zelluläre Randoperator d_n^{CW} für $n \geq 2$ also durch die ganzzahlige Matrix

$$d_n^{\text{CW}} = (d_{ji}^n)_{j,i} \in M_{J^{n-1}, J^n}(\mathbb{Z})$$

beschrieben. Die Koeffizienten d_{ji}^n dieser Matrix heißen auch die *Inzidenzzahlen* von X . Man beachte, dass S^{n-1} kompakt ist und φ_i^n nach Proposition 4.38 daher nur endlich viele Zellen e_j^{n-1} trifft, so dass $e_i^n \in M \cong \text{im}(\tilde{h}_n \bar{\Phi}_i^n)$ auf eine endliche Linearkombination, also ein Element der direkten Summe $M^{\oplus J^{n-1}}$ abgebildet wird. Man beachte auch, dass der reduzierte Homologiefunktor \tilde{h}_\bullet in dieser Beschreibung des reduzierten zellulären Kettenkomplexes überhaupt nicht mehr auftaucht, sondern nur noch seine Koeffizienten M . Das liegt an Folgerung 3.46 aus dem Satz 3.42 von Brouwer-Hopf, sowie an den Sätzen 5.10 und 5.11.

5.17. DEFINITION. Es sei X ein CW-Komplex und M ein R -Modul. Der *reduzierte zelluläre Kettenkomplex* von X mit Koeffizienten M ist definiert als $(\tilde{C}_\bullet^{\text{CW}}(X; M), d_\bullet^{\text{CW}})$ mit $\tilde{C}_n^{\text{CW}} = M^{\oplus J^n}$ und

$$d_n^{\text{CW}} \sum_{i \in J^n} a_i e_i^n = \sum_{j \in J^{n-1}} \sum_{i \in J^n} \text{deg}(q_j^{n-1} \circ p^{n-1} \circ \bar{\varphi}_i^n) a_i e_j^{n-1} = \sum_{j \in J^{n-1}} \sum_{i \in J^n} d_{ji}^n a_i \cdot e_j^{n-1}.$$

Die Homologie $\tilde{H}_\bullet^{\text{CW}}(X; M) = H_\bullet(\tilde{C}_\bullet^{\text{CW}}(X; M), d_\bullet^{\text{CW}})$ dieses Komplexes heißt die *reduzierte zelluläre Homologie* von X mit Koeffizienten in M .

Wir erinnern uns an die Kategorie CW_+ der punktierten CW-Komplexe mit punktierten zellulären Abbildungen aus Definition 4.42. Es sei Y ein CW-Komplex mit $\tilde{h}_n(Y^n/Y^{n-1}) = M^{\oplus K^n}$. Eine zelluläre Abbildung $f: X \rightarrow Y$ induziert Abbildungen $\bar{f}^n: X^n/X^{n-1} \rightarrow Y^n/Y^{n-1}$, also auch Abbildungen $f_{\#n} = \bar{f}_*^n: M^{\oplus J^n} \rightarrow M^{\oplus K^n}$ für alle n . Mit einem ähnlichen Argument wie oben sieht man, dass

$$f_{\#n} \sum_{j \in J^n} a_j e_j^n = \sum_{j \in J^n} \sum_{k \in K^n} \text{deg}(q_k^n \circ \bar{f}^n \circ \bar{\Phi}_j^n) a_j e_k^n.$$

Die Familie $f_{\#\bullet}$ ist eine Kettenabbildung vom Grad 0, da das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{h}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) & \xleftarrow{p_*^{n-1}} & \tilde{h}_{n-1}(X^{n-1}) & \xleftarrow{\partial} & \tilde{h}_n(X^n/X^{n-1}) \\ \bar{f}_*^{n-1} \downarrow & & f_*^{n-1} \downarrow & & \bar{f}_*^n \downarrow \\ \tilde{h}_{n-1}(Y^{n-1}/Y^{n-2}) & \xleftarrow{p_*^{n-1}} & \tilde{h}_{n-1}(Y^{n-1}) & \xleftarrow{\partial} & \tilde{h}_n(Y^n/Y^{n-1}) \end{array}$$

kommutiert. Wir bezeichnen die induzierten Abbildungen mit

$$f_*^{\text{CW}} = \tilde{H}^{\text{CW}} f_n: \tilde{H}_n^{\text{CW}}(X; M) \rightarrow \tilde{H}_n^{\text{CW}}(Y; M).$$

5.18. SATZ (Zelluläre Homologie, Eindeutigkeit). *Sei M ein R -Modul und $n \in \mathbb{Z}$.*

- (1) *Die reduzierte zelluläre Homologie mit Koeffizienten M ist ein Funktor auf der Kategorie CW_+ der punktierten CW-Komplexe und der punktierten zellulären Abbildungen.*
- (2) *Für jeden gewöhnlichen reduzierten Homologiefunktor \tilde{h}_n mit Koeffizienten M existiert ein natürlicher Isomorphismus $\tilde{h}_n|_{\text{CW}_+} \rightarrow \tilde{H}_n^{\text{CW}}(\cdot; M)$.*

BEWEIS. Wir haben zu jedem CW-Komplex X einen graduierten Modul $H_\bullet^{\text{CW}}(X; M)$ und zu jeder zellulären Abbildung $f: X \rightarrow Y$ eine induzierte Abbildung $f_*^{\text{CW}}: \tilde{H}_n^{\text{CW}}(X; M) \rightarrow \tilde{H}_n^{\text{CW}}(Y; M)$ konstruiert. Um Funktorialität unabhängig von der Existenz eines Homologiefunktors \tilde{h} zu zeigen, betrachten wir zelluläre Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$. Seien Φ_k^n und Ψ_j^n die charakteristischen Abbildungen von X beziehungsweise Y , und q_j^n und r_i^n die entsprechenden Kollaps-Abbildungen von Y beziehungsweise Z .

Die Verkettung von f_*^{CW} und g_*^{CW} wird durch das Matrixprodukt

$$(\text{deg}(r_i^n \circ g \circ \bar{\Psi}_j^n))_{ij} \cdot (\text{deg}(q_j^n \circ f \circ \bar{\Phi}_k^n))_{jk}$$

beschrieben, während zu $(g \circ f)_*^{\text{CW}}$ die Matrix

$$(\deg(r_i^n \circ g \circ f \circ \bar{\Phi}_k^n))_{ik}$$

gehört. Funktorialität folgt, denn man kann zeigen, dass

$$\begin{aligned} \sum_j \deg(r_i^n \circ g \circ \bar{\Psi}_j^n) \cdot \deg(q_j^n \circ f \circ \bar{\Phi}_k^n) &= \sum_j \deg(r_i^n \circ g \circ \bar{\Psi}_j^n \circ q_j^n \circ f \circ \bar{\Phi}_k^n) \\ &= \deg(r_i^n \circ g \circ f \circ \bar{\Phi}_k^n). \end{aligned}$$

Sei jetzt \tilde{h}_\bullet ein gewöhnlicher reduzierter Homologiefunktor mit Koeffizienten M . Wir haben oben Isomorphismen

$$\tilde{h}_n(X) \leftarrow \tilde{h}_n(X^n) / \text{im } \partial_{n+1} \longrightarrow \text{im } \tilde{h}_n p^n / \text{im } (\tilde{h}_n p^n \circ \partial_{n+1}) = \ker d_n / \text{im } d_{n+1} = \tilde{H}_n^{\text{CW}}(X; M)$$

konstruiert, die alle von natürlichen Abbildungen zwischen Homologiemoduln induziert werden. Also ist auch der zusammengesetzte Isomorphismus $\tilde{h}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n^{\text{CW}}(X; M)$ natürlich, und es folgt (2). \square

5.19. BEMERKUNG. Wir können uns zelluläre Homologie wie folgt vorstellen. Jede n -Zelle ist ein n -dimensionales Objekt in X mit einem $(n-1)$ -dimensionalen Rand, und Ketten $c \in \tilde{C}_n^{\text{CW}}(X; M)$ sind M -Linearkombinationen davon. Den Rand $d_n^{\text{CW}} c$ einer solchen Kette c in X^{n-1}/X^{n-2} schreiben wir wieder als M -Linearkombination von $(n-1)$ -Zellen. Dabei vergessen wir, wie die einzelnen Zellen an die kleineren Skelette X^{n-2} angeklebt sind. Die Koeffizienten von $d_n^{\text{CW}} c$ sind Abbildungsgrade von Abbildungen wie in (5.1). Sie hängen von einer Art „Orientierung“ ab, siehe Folgerung 3.91.

Ketten c mit Rand $d_n^{\text{CW}} c = 0$ heißen Zykel. Wir stellen sie uns als „geschlossene“ n -dimensionale Objekte in X vor. Jeder Zykel repräsentiert ein „Loch“ in X^n . Wenn dieses Loch in X^{n+1} von einer Kette $b \in C_{n+1}^{\text{CW}}(X; M)$ „gestopft“ wird, das heißt, wenn $c = d_{n+1}^{\text{CW}} b$, vergessen wir es. Alle anderen Löcher bleiben nach Lemma 5.14 (4) dann auch in X „ungestopft“. Somit dürfen wir uns $\tilde{H}_n^{\text{CW}}(X; M)$ als Menge der M -Linearkombinationen von Löchern in X vorstellen. Man vergleiche das mit der Beschreibung des gerahmten Bordismus in Bemerkung 3.98.

Ein Beispiel ist das Loch in der Mitte der n -Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, das sich nach den Sätzen 5.10 und 5.18 dadurch manifestiert, dass $H_n^{\text{CW}}(S^n) \cong M$. Wir sehen dieses Loch „mit bloßem Auge“, wenn wir S^n in den \mathbb{R}^{n+1} einbetten, während die Homologie es immer findet.

5.20. BEISPIEL. Die reduzierte zelluläre Homologie lässt sich besonders einfach berechnen, wenn der zelluläre Randoperator d_n^{CW} für alle $n \in \mathbb{Z}$ verschwindet. Das passiert etwa dann, wenn X keine Zellen in aufeinanderfolgenden Dimensionen hat. Ein Beispiel sind die komplex und quaternionisch projektiven Räume aus den Übungen 1.167 und 1.168, siehe Übung 5.37.

5.21. BEISPIEL. Wir betrachten jetzt den reell projektiven Raum $X = \mathbb{R}P^n$ mit der CW-Struktur aus Übung 1.168. Dann existiert neben $\{x_0\} = \mathbb{R}P^0$ genau eine Zelle e^k in jeder Dimension $1 \leq k \leq n$, und die Verklebeabbildung ist die Projektion

$$\varphi^k: S^{n-1} \rightarrow X^{k-1} = \mathbb{R}P^{k-1} = S^{n-1}/\{1, -1\}.$$

Dabei wird der Äquator S^{k-2} gerade auf den Unterkomplex $X^{k-2} = \mathbb{R}P^{k-2}$ abgebildet. Ähnlich wie bei der Konstruktion der „Summe“ stetiger Abbildungen erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} S^{k-1} & \longrightarrow & S^{k-1}/S^{k-2} & \xrightarrow{\cong} & S^{k-1} \vee S^{k-1} \\ \varphi^k \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \varphi_+^k \vee \varphi_-^k \\ \mathbb{R}P^{k-1} & \xrightarrow{p^{k-1}} & \mathbb{R}P^{k-1}/\mathbb{R}P^{k-2} & \xrightarrow[\cong]{q^{k-1}} & S^{k-1}. \end{array}$$

Also gilt $[q^{k-1} \circ \varphi^k] = [\varphi_+^k] + [\varphi_-^k] \in \pi_{k-1}(\mathbb{R}P^{k-1})$; hierbei werden $\varphi_{\pm}^k: S^{k-1} \rightarrow S^{k-1}$ durch die Einschränkung von $q^{k-1} \circ \varphi^k$ auf je eine der beiden Halbkugeln induziert. Da $\varphi_-^k = \varphi_+^k \circ (-\text{id})$ nach Konstruktion, folgt aus Beispiel 3.47 bei geeigneter Wahl der Verklebeabbildungen, dass

$$d_k^{\text{CW}} = \deg(q^{k-1} \circ \varphi^k) = 1 + (-1)^k = \begin{cases} 2 & \text{falls } k \text{ gerade ist, und} \\ 0 & \text{falls } k \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

- (1) Wir wählen \mathbb{Z} in der Kategorie $\mathcal{A}b \cong \text{Mod}_{\mathbb{Z}}$ als Koeffizienten. Für gerade n und erhalten wir in den Graden 0 bis n den reduzierten zellulären Kettenkomplex

$$0 \longleftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \dots \xleftarrow{2} \mathbb{Z}$$

für ungerade n hingegen

$$0 \longleftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \dots \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z},$$

und daher

$$\tilde{H}_k^{\text{CW}}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{falls } k \text{ ungerade und } 0 < k < n, \\ \mathbb{Z} & \text{falls } k = n \text{ ungerade, und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hier taucht gelegentlich der Modul $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ auf. Im Sinne von Bemerkung 5.19 beschreibt das Element $0 \neq c \in \tilde{H}_k^{\text{CW}}(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ein „Loch“ in $\mathbb{R}P^k$, das in $\mathbb{R}P^{k+1}$ nicht gestopft wird; erst das zweimal umlaufene Loch $2c$ tritt als Rand einer $(k+1)$ -Kette auf.

- (2) Wir bleiben in der Kategorie $\mathcal{A}b$ und wählen $\mathbb{Z}/2$ als Koeffizienten. Da $2 \equiv 0$ in $\mathbb{Z}/2$, verschwindet der Randoperator komplett, und wir erhalten

$$\tilde{H}_k^{\text{CW}}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{falls } 0 < k \leq n, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das gleiche Ergebnis erhalten in der Kategorie $\mathcal{V}ec_{\mathbb{Z}/2}$. Wir sehen also modulo 2 mehr „Löcher“ als über \mathbb{Z} .

- (3) Es sei jetzt \mathbb{k} ein Körper der Charakteristik $\neq 2$. Dann ist Multiplikation mit 2 invertierbar. Sowohl in der Kategorie $\mathcal{A}b$ als auch in $\mathcal{V}ec_{\mathbb{k}}$ erhalten wir daher nur noch

$$\tilde{H}_k^{\text{CW}}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{k}) \cong \begin{cases} \mathbb{k} & \text{falls } k = n \text{ ungerade ist, und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir wollen zelluläre Homologie zu einem Homologiefunktor machen. Dazu müssen wir die Eilenberg-Steenrod-Axiome 5.2 zeigen. Das Summenaxiom (3) und das Dimensionsaxiom (4) sind leicht zu überprüfen. Zur Homotopieinvarianz (1) und zur langen exakten Sequenz (2) skizzieren wir die Beweise nur, da wir später eine andere Konstruktion für beliebige Homologiefunktoren genauer betrachten wollen.

5.22. DEFINITION. Seien $f_{\bullet}, g_{\bullet}: (C_{\bullet}, d_{\bullet}) \rightarrow (E_{\bullet}, e_{\bullet})$ zwei Kettenabbildungen vom Grad a . Eine *Kettenhomotopie* $h_{\bullet}: f_{\bullet} \sim g_{\bullet}$ zwischen f_{\bullet} und g_{\bullet} ist eine Familie von Abbildungen $h_k: C_k \rightarrow E_{k+a+1}$, so dass

$$g_k - f_k = h_{k-1} \circ d_k + e_{k+a+1} \circ h_k: C_k \rightarrow E_{k+a}.$$

Falls eine solche Kettenhomotopie existiert, heißen f_{\bullet} und g_{\bullet} *kettenhomotop*.

5.23. PROPOSITION. Seien $f_{\bullet}, g_{\bullet}: (C_{\bullet}, d_{\bullet}) \rightarrow (E_{\bullet}, e_{\bullet})$ zwei Kettenabbildungen vom Grad a . Wenn eine Kettenhomotopie $h_{\bullet}: f_{\bullet} \sim g_{\bullet}$ existiert, dann induzieren f_{\bullet} und g_{\bullet} die gleiche Abbildung

$$f_* = g_*: H_{\bullet}(C_{\bullet}, d_{\bullet}) \rightarrow H_{\bullet}(E_{\bullet}, e_{\bullet}).$$

BEWEIS. Für alle Zykel $c \in Z_k \subset C_k$ erhalten wir einen Rand

$$g_k(c) - f_k(c) = h_{k-1}(\underbrace{d_k(c)}_{=0}) + e_{k+a+1}(h_k(c)). \quad \square$$

Man überprüft außerdem leicht, dass Kettenhomotopie eine Äquivalenzrelation auf Kettenabbildungen definiert, die mit der Verkettung von Kettenabbildungen verträglich ist, siehe Übung 5.39. In Analogie zur Homotopiekategorie topologischer Räume können wir daher eine naive Homotopiekategorie \mathcal{HCh}_R von Kettenkomplexen über R definieren.

Eine zelluläre Homotopie induziert stets eine Kettenhomotopie zwischen den zugehörigen zellulären Kettenkomplexen, siehe Übung 5.40. Somit ist zelluläre Homologie in \mathcal{CW}_+ zellulär homotopieinvariant.

5.24. BEMERKUNG. In Analogie zu den schwachen Äquivalenzen aus Definition 4.45 definiert man schwache Äquivalenzen in der Kategorie \mathcal{Ch}_R als Kettenabbildungen, die Isomorphismen auf allen Homologiegruppen induzieren. Es gibt dazu passende Modellstrukturen auf \mathcal{Ch}_R . Außerdem kann man Kettenhomotopie in diesem Sinne als Links- oder als Rechtshomotopie auffassen, siehe Übungen 5.41 und 5.42. Diese Konstruktionen bilden die Grundlage für die sogenannte *derivierte Kategorie* HoCh_R in der homologischen Algebra (die allerdings nicht zu \mathcal{HCh}_R äquivalent ist). Wir werden uns in Abschnitt ?? ein bisschen mehr dazu anschauen.

Es sei jetzt X ein CW-Komplex und $A \subset X$ ein Unterkomplex. Dann ist auch $\tilde{C}_\bullet^{\text{CW}}(A; M)$ ein *Unterkettenkomplex* von $\tilde{C}_\bullet^{\text{CW}}(X; M)$, das heißt, es gilt $\tilde{C}_k^{\text{CW}}(A; M) \subset \tilde{C}_k^{\text{CW}}(X; M)$ für alle k , und die Inklusion ist mit den Differentialen d_\bullet^{CW} verträglich; das ergibt sich unmittelbar aus der obigen Konstruktion. Dann können wir den *Quotienten* $\tilde{C}_\bullet^{\text{CW}}(X; M)/\tilde{C}_\bullet^{\text{CW}}(A; M)$ mit dem induzierten Differential betrachten, und erhalten eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longleftarrow (\tilde{C}_\bullet^{\text{CW}}(X; M)/\tilde{C}_\bullet^{\text{CW}}(A; M), \bar{d}_\bullet^{\text{CW}}) \longleftarrow (\tilde{C}_\bullet^{\text{CW}}(X; M), d_\bullet^{\text{CW}}) \longleftarrow (\tilde{C}_\bullet^{\text{CW}}(A; M), e_\bullet^{\text{CW}}) \longleftarrow 0$$

von Kettenkomplexen. Man überprüft leicht, dass $\tilde{C}_\bullet^{\text{CW}}(X; M)/\tilde{C}_\bullet^{\text{CW}}(A; M)$ gerade der zelluläre Kettenkomplex des Quotienten X/A ist, siehe Übung 5.46. Das folgende Lemma liefert uns dann die gesuchte lange exakte Sequenz aus Axiom (3).

5.25. LEMMA (Schlangen-). *Es seien $(C_\bullet, \partial_\bullet)$, $(C'_\bullet, \partial'_\bullet)$ und $(C''_\bullet, \partial''_\bullet)$ Kettenkomplexe über R und $f_\bullet: (C'_\bullet, \partial'_\bullet) \rightarrow (C_\bullet, \partial_\bullet)$ und $g_\bullet: (C_\bullet, \partial_\bullet) \rightarrow (C''_\bullet, \partial''_\bullet)$ seien Kettenabbildungen, so dass für alle k die Sequenz*

$$0 \longrightarrow C'_k \xrightarrow{f_\bullet} C_k \xrightarrow{g_\bullet} C''_k \longrightarrow 0$$

exakt ist. Dann existiert eine Folge natürlicher Transformationen $d_k: H_k(C''_\bullet, \partial''_\bullet) \rightarrow H_{k-1}(C'_\bullet, \partial'_\bullet)$, so dass die folgende Sequenz exakt ist:

$$\dots \longrightarrow H_k(C_\bullet, \partial_\bullet) \xrightarrow{g_*} H_k(C''_\bullet, \partial''_\bullet) \xrightarrow{d_k} H_{k-1}(C'_\bullet, \partial'_\bullet) \xrightarrow{f_*} H_{k-1}(C_\bullet, \partial_\bullet) \longrightarrow \dots$$

In gewissem Sinne entspricht die hier konstruierte Sequenz einer Faser- oder Kofasersequenz, ausgehend von einer „Faserung“ g_\bullet oder einer „Kofaserung“ f_\bullet in \mathcal{Ch}_R (nach Wahl einer passenden Modellstruktur), genauer entspricht sie den langen exakten Sequenzen 4.67 (3) beziehungsweise 4.72 (3). Insbesondere sollten wir hier eigentlich entsprechende Vorzeichen verwenden, siehe auch die Anmerkungen nach Definition 5.2.

BEWEIS. Dieser Beweis ist eine Diagrammjagd im Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & C'_k & \xrightarrow{\subset} & C_k & \xrightarrow{\twoheadrightarrow} & C''_k \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial'_k & & \downarrow \partial_k & & \downarrow \partial''_k \\
 0 & \longrightarrow & C'_{k-1} & \xrightarrow{\subset} & C_{k-1} & \xrightarrow{\twoheadrightarrow} & C''_{k-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow
 \end{array}$$

Um das Bild von $[c'_k] \in H_k(C'_\bullet, \partial'_\bullet)$ zu bestimmen, wählen wir zunächst ein Urbild $c_k \in C_k$ von c'_k , dann bildet $\partial_k c_k$ auf $0 \in C'_{k-1}$ ab, also erhalten wir ein Urbild $c'_{k-1} \in C'_{k-1}$ von $\partial_k c_k$. Wir setzen $d_k[c'_k] = [c'_{k-1}]$ und lassen den Rest als Übung 5.43. \square

Der Name des Lemmas ergibt sich, wenn man im obigen Diagramm an die Stelle der Komplexe ihre Homologien einträgt und die Verbindungshomomorphismen mit einzeichnet. Wir nennen die im Lemma konstruierten natürlichen Transformationen d_k auch *Verbindungshomomorphismen*.

5.26. SATZ (Zelluläre Homologie; Existenz). Sei M ein R -Modul und $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist die reduzierte zelluläre Homologie mit Koeffizienten M ein Mod_R -wertiger Homologiefunktor $\tilde{H}_\bullet^{\text{CW}}(\cdot; M)$ auf der Kategorie CW_+ der punktierten CW-Komplexe und der punktierten zellulären Abbildungen.

BEWEIS. Der Funktor ist CW-homotopieinvariant nach Proposition 5.23, und mit Hilfe des Schlangenlemmas 5.25 erhalten wir die Homologiesequenz für Paare von CW-Komplexen. Das Summen- und das Dimensionsaxiom ergeben sich leicht aus der Konstruktion. \square

5.27. FOLGERUNG. Zu jedem R -Modul M gibt es gewöhnliche reduzierte Homologiefunktoren mit Koeffizienten M auf den Kategorien $k\text{Top}$ und $kw\mathcal{H}$ und ihren punktierten Versionen, und zwar sowohl bezüglich der Quillen- als auch bezüglich der Ström-Modellstruktur.

BEWEIS. Sei $\mathcal{T} = k\text{Top}$ oder $kw\mathcal{H}$. Wie in Bemerkung 5.5 (1) und (3) können wir auch zelluläre Homologie auf der unpunktigten CW-Kategorie CW definieren. Aufgrund von Homotopieinvarianz faktorisiert H_\bullet^{CW} über die Homotopiekategorie \mathcal{HCW} , die nach Beispiel 4.64 (3) zur Homotopiekategorie $\text{Ho}\mathcal{T}$ der Quillen-Modellstruktur äquivalent ist. Also erhalten wir den gesuchten Homologiefunktor für die Quillen-Modellstruktur als Verkettung

$$\tilde{h}_\bullet: \mathcal{T} \xrightarrow{\text{Ho}} \text{Ho}\mathcal{T}_+ \xleftarrow{\cong} \mathcal{HCW} \xrightarrow{H_\bullet^{\text{CW}}} \text{GrMod}_R.$$

Analog verfahren wir im punktierten Fall. Der Funktor \tilde{h}_\bullet ist invariant unter schwachen Äquivalenzen, also insbesondere unter Homotopieäquivalenzen. Somit ist er ebenfalls ein Homologiefunktor für die Ström-Modellstruktur. \square

5.28. BEMERKUNG. Wir übertragen Bemerkung 5.5 auf die zelluläre Homologie.

- (1) Wir betrachten den reduzierten zellulären Randoperator in Grad 1 etwas näher. Sei $j \in J^1$ und $i \in J^0 = X^0 \setminus \{x_0\}$, und sei $S^0 = \{1, -1\}$ mit Basispunkt 1. Dann erhalten wir die Matrixkoeffizienten

$$d_{ij}^1 = \deg(q_i^0 \circ \varphi_j^1) = \sum_{s \in (\varphi_j^1)^{-1}(i)} s \in \{-1, 0, 1\},$$

wobei wir hier i als Punkt in $X^0 \setminus \{x_0\}$ verstehen.

- (2) Wir definieren den *unreduzierten zellulären Kettenkomplex* $C_{\bullet}^{\text{CW}}(X; M) = \tilde{C}_{\bullet}^{\text{CW}}(X_+; M)$. In der obigen Formel für d_i^1 ; erlauben wir jetzt $i \in X^0$. Die *unreduzierte zelluläre Homologie* bezeichnen wir mit

$$H_{\bullet}^{\text{CW}}(X; M) = H_{\bullet}(C_{\bullet}^{\text{CW}}(X; M); d_{\bullet}^{\text{CW}}) = \tilde{H}_{\bullet}^{\text{CW}}(X_+; M).$$

In Analogie zu Bemerkung 5.5 erhalten wir einen Isomorphismus

$$H_{\bullet}^{\text{CW}}(X; M) \cong \tilde{H}_{\bullet}^{\text{CW}}(X; M) \oplus M.$$

Die linke Seite ist unabhängig vom Basispunkt x_0 und funktoriell in X in \mathcal{T} . Allerdings hängen die rechte Seite und der Isomorphismus von der Wahl von x_0 ab, siehe Übung 5.34. Aus dem Dimensionsaxiom 5.2 (4) folgt $H_n^{\text{CW}}(X; M) \cong \tilde{H}_n^{\text{CW}}(X; M)$ für alle $n \neq 0$.

- (3) Wir definieren den *augmentierten zellulären Kettenkomplex* $(\bar{C}_{\bullet}^{\text{CW}}(X; M), \bar{d}_{\bullet}^{\text{CW}})$, indem wir die Abbildung $q_{\#}: C_0^{\text{CW}}(X; M) \rightarrow C_0^{\text{CW}}(\{x_0\}; M) = M$ in den unreduzierten Kettenkomplex mit einbauen. Das heißt, wir setzen

$$\bar{C}_n^{\text{CW}}(X; M) = \begin{cases} C_n^{\text{CW}}(X; M) & \text{falls } n \neq -1, \text{ und} \\ C_0^{\text{CW}}(\{x_0\}; M) = M & \text{falls } n = -1, \end{cases}$$

und

$$\bar{d}_n^{\text{CW}} = \begin{cases} d_n^{\text{CW}} & \text{falls } n \neq 0, \text{ und} \\ q_{\#}: C_0^{\text{CW}}(X; M) \rightarrow M & \text{falls } n = 0. \end{cases}$$

Die Abbildung $\bar{d}_0^{\text{CW}} = q_{\#}$ heißt *Augmentierung* und wird auch mit ε bezeichnet. Aus der Konstruktion ergibt sich ein natürlicher Isomorphismus

$$H_{\bullet}(\bar{C}_{\bullet}^{\text{CW}}(X; M), \bar{d}_{\bullet}^{\text{CW}}) \cong \ker(q_{\#}: H_{\bullet}^{\text{CW}}(X; M) \rightarrow H_{\bullet}^{\text{CW}}(\{x_0\}; M)) \cong \tilde{H}_{\bullet}^{\text{CW}}(X; M),$$

der wieder vom Basispunkt x_0 abhängt.

Da der augmentierte Kettenkomplex die gleiche Homologie wie der reduzierte Kettenkomplex liefert, aber keine Basispunkte benötigt, definiert man die reduzierte zelluläre Homologie später lieber als die Homologie des augmentierten Kettenkomplexes.

5.29. BEMERKUNG. Es gibt eine besonders elegante und vor allem funktorielle Möglichkeit, jedem topologischen Raum X eine CW-Approximation zuzuordnen. Dazu betrachten wir den sogenannten *singulären (simplicialen) Komplex* von X . Zu jeder stetigen Abbildung $\sigma: \Delta^k \rightarrow X$ vom Standardsimplex $\Delta^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ nach X betrachten wir eine k -Zelle in der Form eines Simplex, und wir kleben jede Seite dieses Simplexes an den $(k-1)$ -Simplex, der der Einschränkung von σ auf die jeweilige Seite entspricht. Dann lassen sich diese Abbildungen zu einer Abbildung von einem (zugegeben sehr großen) CW-Komplex $|\text{sing}_{\bullet} X|$ nach X verkleben, und man kann zeigen, dass es sich dabei um eine schwache Homotopieäquivalenz handelt. Tatsächlich ist diese Abbildung gerade die Einheit der Adjunktion $|\cdot| \dashv \text{sing}_{\bullet}$ zwischen der geometrischen Realisierung und dem singulären Simplicialkomplex. Wir können jetzt also *singuläre Homologie* definieren als

$$H_{\bullet}(X; M) = H_{\bullet}^{\text{CW}}(|\text{sing}_{\bullet} X|; M).$$

Der Vorteil gegenüber der CW-Approximation nach Satz 4.51 besteht darin, dass wir oben keine Wahlen in Abhängigkeit von X getroffen haben. Für die reduzierte Homologie verwenden wir den augmentierten Komplex aus Bemerkung 5.28 (3).

5.30. DEFINITION. Es sei \mathbb{k} ein Körper, h_{\bullet} ein unreduzierter gewöhnlicher Homologiefunktor mit Koeffizienten \mathbb{k} und X ein topologischer Raum, dann heißen die Dimensionen $b_k(X; \mathbb{k}) = \dim_{\mathbb{k}} h_k(X) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ der Homologie-Vektorräume von X die *Betti-Zahlen* von X über \mathbb{k} . Falls alle

Betti-Zahlen endlich sind und fast alle verschwinden, ist die *Euler-Zahl* oder *Euler-Charakteristik* von X definiert als

$$\chi(X) = \sum_k (-1)^k b_k(X; \mathbb{k}) .$$

Die Betti-Zahlen von X hängen im allgemeinen vom gewählten Homologiefunktor h_\bullet ab. Nach Satz 5.18 hängen sie nur von \mathbb{k} ab, genauer von seiner Charakteristik, wenn X ein CW-Komplex ist. Aber selbst für CW-Komplexe können verschiedene Körper unterschiedliche Betti-Zahlen liefern, siehe Beispiel 5.21. Die Euler-Zahl hängt zumindest für kompakte CW-Komplexe nicht von \mathbb{k} ab, wie der folgende Satz zeigt. Dazu beachten wir, dass CW-Komplexe nach Satz 1.112 genau dann kompakt sind, wenn sie insgesamt nur aus endlich vielen Zellen bestehen.

5.31. SATZ (Morse-Ungleichungen). *Sei \mathbb{k} ein Körper und $X = X^n$ ein CW-Komplex mit endlich vielen Zellen in jeder Dimension k , und sei $c_k(X) = \#I^k < \infty$ die Anzahl der k -Zellen. Für alle m gilt*

$$\sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} c_k(X) \geq \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} b_k(X, \mathbb{k}) , \quad (1)$$

$$c_m(X) \geq b_m(X, \mathbb{k}) , \quad (2)$$

$$\chi(X) = \sum_k (-1)^k c_k(X) \quad \text{falls } X \text{ kompakt ist.} \quad (3)$$

BEWEIS. Man leitet (1) aus den Dimensionsformeln für \mathbb{k} -Vektorräume ab. Sei etwa $U \subset V$ ein Untervektorraum und $f: V \rightarrow W$ linear, dann gilt

$$\dim_{\mathbb{k}} U + \dim_{\mathbb{k}}(V/U) = \dim_{\mathbb{k}} V \quad \text{und} \quad \dim_{\mathbb{k}} V = \dim_{\mathbb{k}} \ker f + \dim_{\mathbb{k}} \operatorname{im} f .$$

Die Ungleichungen (2) und die Gleichung (3) folgen aus (1). Die Details sind Übung 5.45. \square

5.32. BEISPIEL. Wir betrachten die obigen Beispiele.

- (1) Für die 2-Sphäre erhalten wir $\chi(S^2) = 2$, da die übliche CW-Struktur nur aus einer 0- und einer 2-Zelle besteht. Die Oberfläche eines konvexen Polyeders im \mathbb{R}^3 liefert eine andere CW-Struktur X auf S^2 mit $e = c_0(X)$ „Ecken“, $k = c_1(X)$ „Kanten“ und $f = c_2(X)$ „Flächen“. Wir erhalten den *Eulerschen Polyedersatz*

$$2 = e - k + f .$$

- (2) Für $\mathbb{C}P^n$ und $\mathbb{H}P^n$ mit der üblichen Zellzerlegung sind die Morse-Ungleichungen scharf, das heißt, es gilt Gleichheit. Es gilt

$$\chi(\mathbb{C}P^n) = \chi(\mathbb{H}P^n) = n + 1 .$$

- (3) Für $\mathbb{R}P^n$ erhalten wir die Morse-Ungleichungen

$$0 \geq - \sum_{j=0}^{2k-1} (-1)^j b_j(\mathbb{R}P^n, \mathbb{k}) \quad \text{für } 2k - 1 \leq n ,$$

$$1 \geq \sum_{j=0}^{2k} (-1)^j b_j(\mathbb{R}P^n, \mathbb{k}) \quad \text{für } 2k \leq n ,$$

$$\chi(\mathbb{R}P^{2k-1}) = 1 , \chi(\mathbb{R}P^{2k}) = 0 .$$

Die Morse-Ungleichungen sind scharf im Falle $\mathbb{k} = \mathbb{Z}/2$, für andere Charakteristiken und $n \geq 2$ jedoch nicht.

5.c. Übungen zu Kapitel 5

Übungen zu Abschnitt 5.a.

5.33. ÜBUNG. Gegeben sei eine lange exakte Sequenz

$$\dots \longleftarrow A_{n-1} \xleftarrow{h_n} C_n \xleftarrow{g_n} B_n \xleftarrow{f_n} A_n \xleftarrow{h_{n+1}} C_{n+1} \longleftarrow \dots$$

in $\mathcal{C} = \text{Mod}_R$. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

- (1) Für alle n existiert $k_n: B_n \rightarrow A_n$ mit $k_n \circ f_n = \text{id}_{A_n}$.
- (2) Für alle n existiert $\ell_n: C_n \rightarrow B_n$ mit $g_n \circ \ell_n = \text{id}_{C_n}$.
- (3) Für alle n existiert ein Isomorphismus $\varphi_n: B_n \rightarrow A_n \oplus C_n$, so dass $\varphi_n \circ f_n$ die natürliche Inklusion und $g_n \circ \varphi_n^{-1}$ die natürliche Projektion ist.

Zeigen Sie außerdem, dass dann $h_n = 0$ gilt, und dass es natürliche Bijektionen zwischen den Mengen der möglichen Folgen $(k_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ in (1), $(\ell_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ in (2), sowie der $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ in (3) gibt.

5.34. ÜBUNG. Es sei $X = \{0, \dots, n\}$ versehen mit der diskreten Topologie, und $0 \in X$ sei der Basispunkt. Es sei \tilde{h}_\bullet ein reduzierter Homologiefunktor. Beschreiben Sie den Isomorphismus $\tilde{h}_n(X_+) \cong \tilde{h}_n(X) \oplus \tilde{h}_n(S^0)$ aus Bemerkung 5.5 (1) in Termen von $\tilde{h}_n(S^0)$ mit Hilfe des Summenaxioms 5.2 (3), indem Sie X und X_+ darstellen als

$$X = \bigvee_{i=1}^n S^0 \quad \text{und} \quad X_+ = \bigvee_{i=0}^n S^0.$$

5.35. ÜBUNG. Beweisen Sie die Exaktheit der Mayer-Vietoris-Sequenz 5.6 an einer der beiden fehlenden Stellen, also bei $\tilde{h}_n(X)$ oder bei $\tilde{h}_n(A \cap B)$.

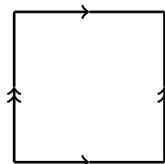
5.36. ÜBUNG. Es sei $X = A \cup B$, so dass $(A, A \cap B)$ und $(B, A \cap B)$ Kofaserungen seien, und es gelten Zusammenhangsvoraussetzungen wie in Folgerung 3.65. Konstruieren Sie ein Analogon zur Mayer-Vietoris-Sequenz 5.6 für die „unstabilen“ Homotopiegruppen π_\bullet wie in Bemerkung 5.9. Wie weit lässt sich diese Sequenz nach links beziehungsweise rechts fortsetzen? Für π_1 kennen wir bereits den Satz 2.39 von Seifert-van Kampen. Unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen lässt er sich in diese Sequenz „einbauen“?

Übungen zu Abschnitt 5.b.

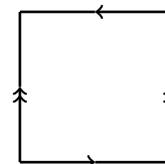
5.37. ÜBUNG. Es sei $n > 0$, und es sei A Objekt einer abelschen Kategorie \mathcal{C} . Bestimmen Sie $H_k(\mathbb{C}P^n; A)$ und $H_k(\mathbb{H}P^n; A)$ für alle $k \geq 0$.

5.38. ÜBUNG. Berechnen Sie $\tilde{H}_\bullet^{CW}(X; \mathbb{Z})$ und $\tilde{H}_\bullet^{CW}(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ für die folgenden Räume:

- (1) Fassen Sie den Torus $T^2 = S^1 \times S^1$ als CW-Komplex auf, indem Sie in der linken Skizze gegenüberliegende Seiten identifizieren.
- (2) Betrachten Sie die Kleinsche Flasche X , die aus einem Quadrat durch Identifikation gegenüberliegender Seiten gemäß der rechten Skizze entsteht. Fassen Sie X für die Berechnung der Homologie als CW-Komplex mit Basispunkt, zwei 1-Zellen und einer 2-Zelle auf.



Torus



Kleinsche Flasche

5.39. ÜBUNG. Zeigen Sie:

- (1) Kettenhomotopie ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Kettenabbildungen zwischen zwei gegebenen Komplexen. Sie ist mit der Komposition von Kettenabbildungen verträglich.
- (2) Kettenhomotopieäquivalenz ist eine Äquivalenzrelation auf der Kategorie der Kettenkomplexe.

5.40. ÜBUNG. Es seien X, Y punktierte CW-Komplexe und M ein R -Modul. Eine zelluläre Homotopie zwischen zellulären Abbildungen $f, g: X \rightarrow Y$ ist eine zelluläre Abbildung $h: I_+ \wedge X \rightarrow Y$, wobei I die CW-Struktur mit einer 1- und zwei 0-Zellen trage. Zeigen Sie: zelluläre Homotopien induzieren Kettenhomotopien zwischen den Abbildungen $f_{\#}$ und $g_{\#}: \tilde{C}_{\bullet}^{CW}(X; M) \rightarrow C_{\bullet}^{CW}(Y; M)$.

5.41. ÜBUNG. Sei h_{\bullet} eine Kettenhomotopie zwischen Kettenabbildungen f_{\bullet} und $g_{\bullet}: (C_{\bullet}, d_{\bullet}) \rightarrow (E_{\bullet}, e_{\bullet})$ über R . Konstruieren Sie mit Hilfe von h_{\bullet} eine Linkshomotopie zwischen f_{\bullet} und g_{\bullet} in \mathcal{Ch}_R im Sinne von Definition 4.60, und zwar mit dem Zylingerobjekt $(ZC_{\bullet}, zd_{\bullet})$, mit

$$ZC_k = C_k \oplus C_k \oplus C_{k-1} \quad \text{und} \quad zd_k = \begin{pmatrix} d_k & & -\text{id}_{C_{k-1}} \\ & d_k & \text{id}_{C_{k-1}} \\ & & -d_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Dabei wollen wir unter einer schwachen Äquivalenz eine Kettenabbildung verstehen, die Isomorphismen auf allen Homologiemoduln induziert.

5.42. ÜBUNG. Seien $f_{\bullet}, g_{\bullet}, h_{\bullet}$ wie in der vorigen Aufgabe. Konstruieren Sie aus diesen Daten eine Rechtshomotopie zwischen f_{\bullet} und g_{\bullet} in \mathcal{Ch}_R .

5.43. ÜBUNG. Beweisen Sie das Schlangenlemma 5.25.

- (1) Zeigen Sie: der Verbindungshomomorphismus ist wohldefiniert und natürlich als Transformation zwischen zwei Funktoren von der Kategorie der kurzen exakten Sequenzen in der Kategorie $\mathcal{Ch}_{\mathcal{C}}$ der Kettenkomplexe in \mathcal{C} in die Kategorie \mathcal{C} .
- (2) Beweisen Sie die Exaktheit der angegebenen Sequenz an mindestens einer Stelle.

5.44. ÜBUNG. Es sei R ein Ring mit Eins. Wir identifizieren R mit dem Kettenkomplex

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow R \rightarrow 0 \rightarrow \cdots,$$

wobei sich R in Grad 0 befinde.

- (1) Sei $(C_{\bullet}, d_{\bullet})$ ein Kettenkomplex in \mathcal{Ch}_R und $c_k \in C_k$. Unter welchen Bedingungen existiert ein Morphismus $R \rightarrow C_{\bullet}$ vom Grad k , der $1 \in R$ auf c_k abbildet? Ist er eindeutig?
- (2) Sei c_k wie oben, und bezeichne $c_k: R \rightarrow C_{\bullet}$ den obigen Morphismus. Was beschreibt $c_{k*} = H_{\bullet}(c_k): H_{\bullet}(R, 0) \rightarrow H_{\bullet}(C_{\bullet}, d_{\bullet})$?
- (3) Sei $f: (C_{\bullet}, d_{\bullet}) \rightarrow (C'_{\bullet}, d'_{\bullet})$ eine Abbildung vom Grad a . Welchen Grad haben die Morphismen $f \circ c_k$ und $f_* \circ c_{k*}$, und was bezeichnen sie?

5.45. ÜBUNG. Beweisen Sie Satz 5.31.

5.46. ÜBUNG. Es sei Y Unterkomplex eines CW-Komplexes X , und es sei M ein R -Modul. Nach Bemerkung 5.5 (2) definiert man relative Homologiemoduln $H_k(X, Y; M) = \tilde{H}_k(X//Y; M)$. Zeigen Sie

- (1) Es gilt $H_k(X, Y; M) \cong \tilde{H}_k(X/Y; M)$.
- (2) Wir betrachten $(\tilde{C}_{\bullet}^{CW}(Y; M), d^{CW})$ als Unterkomplex von $(\tilde{C}_{\bullet}^{CW}(X; M), d^{CW})$, dann existiert ein natürlicher Quotientenkomplex $(\tilde{C}_{\bullet}^{CW}(X; M)/\tilde{C}_{\bullet}^{CW}(Y; M), \bar{d}^{CW})$.
- (3) Der Komplex aus (2) ist natürlich isomorph zu $(\tilde{C}_{\bullet}^{CW}(X/Y; M), d^{CW})$.

Literatur

- [Ad] J. F. Adams, Stable homotopy and generalised homology, The University of Chicago Press, Chicago, 1974.
- [At] M. F. Atiyah, *K*-Theory, W. A. Benjamin, New York, 1967.
- [tD1] T. tom Dieck, Topologie, de Gruyter Lehrbuch, de Gruyter, Berlin, 1991, x+401S.
- [tD2] ———, Algebraic Topology, EMS textbooks in Mathematics, EMS, Zürich, 2008, xii+567S.
- [D] A. Dold, Lectures on Algebraic Topology, Springer, Berlin, 1972, xi+377S.
- [DP] A. Dold, D. Puppe, Duality, Trace and Transfer, Proc. Stekhlov Inst. Math. 154, 1984, 85–103.
- [En] R. Engelking, General Topology, PWN, Warsawa, 1977, 626S.
- [ES] S. Eilenberg, N. Steenrod, Foundations of Algebraic Topology, Princeton University Press, 1952.
- [F] P. Freyd, Abelian Categories, Harper & Row, New York, 1964, xi+164S.
- [H1] A. Hatcher, Algebraic Topology, Cambridge University Press, Cambridge, 2002, xii+544S.,
<http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html>
- [H2] A. Hatcher, Vector bundles and *K*-theory, preprint,
<http://www.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VBpage.html>
- [Ho] M. Hovey, Model Categories, Math. Surv. and Monogr. 63, Amer. Math. Soc., Providence, RI. 1999, xii+209S.
- [J] K. Jänich, Topologie, Springer Hochschultext, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1980, ix+215S.
- [M] P. May, A Concise Course in Algebraic Topology, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago IL, 1999, x+243S.,
<http://www.math.uchicago.edu/~may/CONCISE/ConciseRevised.pdf>
- [Mi] J. Milnor, Topology from the differentiable viewpoint, The University Press of Virginia, Charlottesville, VA. 1965, ix+65S.
- [Que] B. v. Querenburg: Mengentheoretische Topologie, Springer Hochschultext, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1973, ix+195S.
- [Qui] D. G. Quillen, Homotopical Algebra, Lect. Notes Math. 43, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1967, 160S.
- [R] Y. B. Rudyak: On Thom Spectra, Orientability, and Cobordism, Springer, Berlin-Heidelberg, 1998, xii+587S.
- [S] E. H. Spanier, Algebraic Topology, Corrected reprint, Springer, Berlin, 1981, xvi+528S.
- [SS] L. A. Steen, J. A. Seebach Jr, Counterexamples in Topology, Second edition, Springer, New York - Heidelberg, 1978, xi+244S.
- [St] N. Strickland, The category of CGWH spaces, preprint, 2009,
neil-strickland.staff.shef.ac.uk/courses/homotopy/cgwh.pdf
- [Sw] R. W. Switzer, Algebraic Topology—Homotopy and Homology, Springer, Berlin, 1975.

Stichwortverzeichnis

- Abbildung
 - abgeschlossene, 50
 - adjungierte, 37
 - charakteristische, 41, 44, 157
 - eigentliche, 24, 176
 - Exponential-, 53, 60, 61, 63
 - Höldersche, 7, 44
 - homotope, 53
 - induzierte
 - Homologie, 194
 - Unterraum, 18
 - injektive, 18, 31
 - Inklusions-, 37
 - Ketten-, 194
 - konstante, 6
 - Lipschitz-, 1, 44
 - natürliche, 89
 - Null-, 95, 153
 - Projektions-, 72, 73
 - punktierte, 54, 87
 - Rand-, *siehe* Homomorphismus, Verbindungs-
 - Sequenz-, 94
 - stetige, 6, 7, 22, 35, 45, 48
 - surjektive, 31, 50
 - Verklebe-, 41, 157
 - von Paaren, 54
 - zelluläre, 159, 195
- Abbildungsgrad, 109, 126, 189
- Abelisierung, 68, 83, 85
- abgeschlossen, 4, 5, 8, 9, 13, 22, 23, 34
 - folgen-, 13
- Abschluss, 5, 43
- Adjunktion, 141, 142–148, 151–153
- Äquivalenz
 - Homotopie-
 - schwache, 160
 - schwache, 166
 - von Kategorien, 77, 78
- Äquivalenzrelation, 31, 50, 84
 - erzeugte, 32, 50
- Analysis, 3, 23
- Approximation
 - CW-, 161
 - zelluläre, 159
- Assoziativität, 6
- Augmentierung, 200
- Ausschöpfung
 - kompakte, 39
- Ausschneidung
 - Homotopie, 103
- Axiom
 - Abzählbarkeits-, *siehe* Eigenschaft, Abzählbarkeits-, 147
 - Auswahl-, 25–27, 31, 151
 - Dimensions-, 185
 - Eilenberg-Steenrod, 185
 - Funktor, 58
 - Kategorie, 6
 - abgeschlossene monoidale, 151
 - kartesisch abgeschlossene, 151
 - Modell-, 166
 - monoidale, 150
 - Summen-, 185
 - Trennungs-, *siehe* Eigenschaft, Trennungs-
- Bahn, 72, 78
- Ball, 4, 12
 - Einheits-, 40
 - ε -, 3
- Basis, 12, 20, 50
 - abzählbare, 12, 31, 39, 40, 110
 - Faserbündel, 100
 - Umgebungs-, 13, 76
- Basispunkt, 54, 57, 59, 66, 71
 - nicht entarteter, 112
- Baum
 - maximaler, 80
- beschränkt, 22, 23
- Bifunktor, 178
- Bings Haus, 55
- Bordismus
 - gerahmter, 123, 124–130, 187
- Borromäische Ringe, 85
- Bouquet, 115
- Bündel
 - Faser-, 100
 - Normalen-, 123
 - triviale, 101

Charakteristik
 Euler-, 201
 Körper, 201

Decktransformation, 74, 75–78

Diagramm, 142
 kommutatives, 30, 58

Dimension, 39, 110

Divisionsalgebra, 2

Dreiecksungleichung, 3

dual, 30, 32

Dualität
 Eckmann-Hilton-, 111, 166, 173

Eigenschaft

 Abzählbarkeits-, 12, 22, 30–32, 42, 46, 47

 charakteristische

 Produkt, 19, 28

 Quotient, 31, 93, 149

 Summe, 30

 Unterraum, 18, 55, 149

 Homotopieausdehnungs-, 111

 Homotopieliftung-, 97, 111

 Trennungs-, 8, 30–32, 45, 46

 universelle, 20

 interner hom-Funktor, 38, 152

 Kolimes, 34, 119, 144

 Koprodukt, 65, 86, 115

 Limes, 144

 Produkt, 19, 86

 Pullback, 144

 Pushout, 33, 69, 86, 144

 Stone-Čech-Kompaktifizierung, 27

 Tensorprodukt, 38, 152

 universelle Überlagerung, 77

eigentlich, 24, 128

Einbettung, 18, 47

Einhängung
 reduzierte, 116

Einheit
 Adjunktion, 141, 152

Einheitswürfel, 88

Erzeuger
 Kategorie, 184

Exponentialgesetz, 38, 142, 154
 abstraktes, 153

Faser, 97, 114, 184
 Homotopie-, 173

 typische, 100

Faserung, 166
 azyklische, 166

 Hopf-, 52, 101, 107, 108

 quaternionische, 102, 108

 Hurewicz-, 97, 173

 Pfad-, 173

 Serre-, 97

 triviale, 166

 fein, 7, 29, 31

Filter, 15
 Bild, 16

 freier, 15

 Ultra-, 25

 Umgebungs-, 15

Fixpunkt, 1, 62

Fläche, 83
 nicht orientierbare, 83

 orientierbare, 83

Flasche
 Kleinsche, 83

Folge, 9, 15, 22, 44, 52

Fundamentalgruppe, 56, 66–71, 75–78, 84, 88
 des Komplements, 69, 70

Funktion
 Morse-, 132

 stetige, 8, 9

Funktor, 28, 58, 77, 84, 86, 185
 adjungierter, 141, 142–148, 151–153

 Bi-, 178

 Diagonal-, 142

 essentiell surjektiver, 77

 graduierter, 194

 interner hom-, 151–155

 kontravarianter, 78

 kostetiger, 145

 kovarianter, 58

 stetiger, 145

 treuer, 184

 vergesslicher, 142, 153

 volltreuer, 77

Galois-Theorie, 78

Gerüst, 41, 157

Gerade
 lange, 39

Geschlecht, 83

Grenzwert, 8, 9, 13, 15, 23, 44
 Filter, 16

grob, 7, 13, 17, 19, 31

Gruppe, 7, 56, 72, 84, 86
 abelsche, 84, 85

 Decktransformations-, 74–78

 freie, 70, 86

 Galois-, 78

 Präsentation, 80

 unendliche Dieder-, 65

 Unter-, 65, 66, 75, 78

Häufungspunkt, 15
 Filter, 16

Hom, 6

hom
 kursiv, 151

Homöomorphismus, 6, 49, 54, 69, 72, 77

Homologie
 Kettenkomplex, 193

reduzierte
 allgemeine, 184
 gewöhnliche, 185
 relative, 187
 singuläre, 200
 unreduzierte
 allgemeine, 186
 zelluläre
 Eindeutigkeit, **195**
 reduzierte, 195
 unreduzierte, 200
 Homologiekategorie, 193
 Homomorphismus
 Gruppen-, 72, 84
 J -, 133
 Verbindungs-, 95, 98, 185, 199
 homotop
 ketten-, 197
 links-, 167
 rechts-, 168
 Homotopie, 53, 55, 60
 Ketten-, 197
 Links-, 167
 punktierter, 87
 Rechts-, 168
 relative, 54, 55, 56, 71, 84
 Homotopieäquivalenz, 54, 55, 59, 84, 160
 Homotopiegruppe, 88
 stabile, 120, 186
 Homotopieinvarianz, 185
 Homotopiekategorie
 stabile
 naive, 120
 Homotopiekategorie, 54, 55
 freie, 53, 92
 Huhn
 topologisches, 164
 Identität, 6, 44
 in Kategorie, 6, 54
 Inklusion, 17, 29
 Inneres, 5
 Intervall, 34
 Inverses, 54
 Homotopie-, 54
 Inzidenzzahlen, 195
 Isomorphismus, 54, 57, 59
 Karte
 Faserbündel, 100
 Kategorie, 6, 20, 27, 33, 54, 58, 65, 69, 77, 84, 86, 115
 abelsche, 184
 abgeschlossene, 151
 bivollständige, 143
 deriviertere, 198
 Grothendieck-, 183, 184
 Homotopie-, 54, 168, 185
 kartesisch abgeschlossene, 151, 153
 kovollständige, 143
 Modell-, 166, 167–170
 monoidale, 150
 abgeschlossene, 151
 streng, 151
 punktierter, 153, 183
 symmetrisch monoidale, 151
 vollständige, 143
 Kegel
 reduzierter, 116
 Kern, 94, 184
 Kette, 193
 Klasse, 6
 echte, 6
 Knoten, 70
 Kobordismus
 gerahmter, 130
 Koeffizienten, 185
 Koinzidenz
 Adjunktion, 141, 152
 Körper, 7
 Schief-, 52
 Kofaser, 114, 184
 Homotopie-, *siehe* Quotient, Homotopie
 Kofaserung, 111, 157, 166
 azyklische, 166
 Hurewicz-, 111
 triviale, 166
 Kokern, 184
 Kolimes, 33, 119, 143, 144–146
 endlicher, 143
 Homotopie-, 191
 Kommutator, 83
 kompakt, 22, 23, 32, 43, 48, 61, 66, 67, 86
 abzählbar, 22, 23
 folgen-, 22, 23
 lokal, 24, 36, 38, 55
 quasi-, 22, 32
 kompakt erzeugt, 176–178
 Kompaktifizierung, 24
 Alexandroff-, 24, 27
 Ein-Punkt-, *siehe* Alexandroff-
 Stone-Čech-, 27
 Komplex
 CW-, 41, 42–44, 79–83, 147
 endlicher, 43
 punktierter, 157
 Ketten-, 193
 augmentierter, 200
 Unter-, 198
 zellulärer, 195
 singulärer, 200
 Unter-, 43
 Konvergenz, 39, 44
 Filter, 16
 gleichmäßige, 38, 51
 lokal, 38

kompakte, 38, 51
 punktweise, 20, 36, 48
 Koprodukt, 30, 33, 49, 65, 86, 115, 145, 151
 Kozykel
 gerahmter, 130
 Kragen, 123
 Kreis, 68–70
 polnischer, 164
 kürzen, 64
 Lemma
 Fünfer-, **96**
 Schlangen-, **198**
 Urysohn, **9**
 Vierer-, **96**
 Zorn, *siehe* Axiom, Auswahl-
 Lift, 60–63, 71–77, 97
 Limes, 142, 144–146
 endlicher, 142
 Lokalisierung, 168
 Mannigfaltigkeit, 39, 52, 79, 83, 147
 mit Rand, 110
 Maximum, 22
 Menge, 6, 7, 33
 Potenz-, 3, 4
 punktierte, 89
 Metrik
 französische Eisenbahn-, 44
 Halb-, 47
 p -adische, 44
 metrisierbar, 5, 11, 21, 40, 42
 Modellstruktur, 166
 Cole-, 167
 gemischte, *siehe* Modellstruktur, Cole-
 Hurewicz-, *siehe* Modellstruktur, Strøm-
 naive, *siehe* Modellstruktur, Strøm-
 Quillen-, 167
 Serre-, *siehe* Modellstruktur, Quillen-
 Standard-, *siehe* Modellstruktur, Quillen-
 Strøm-, 167
 Morphismus, 6, 54, 58, 86
 invertierbarer, *siehe* Isomorphismus
 Null-, 153
 Netz, 15
 Norm, 52
 normal, 8, 21, 22, 40, 42, 48, 50
 Normalteiler, 65, 74–76
 erzeugter, 66, 80, 82
 Nullbordismus
 gerahmter, 124
 Objekt, 6, 58
 Einheits-, 150
 fibrantes, 167
 initiales, 27, 89, 144, 151, 167
 kofibrantes, 167
 Null-, 89, 153
 Quotienten-, 184
 konormales, 184
 terminales, 27, 89, 144, 151, 167
 Unter-, 184
 normales, 184
 offen, 4, 5, 34
 Operation, *siehe* Wirkung
 Ordnung, 14
 lexikographische, 39
 Wohl-, 14
 Paar, 54, 192
 CW-, 157
 punktiertes, 92
 Paarung
 Kronecker-, 130
 Periodizität
 Bott-, 134
 Polynom, 45, 85
 Präsentation, 80, 83
 Problem
 Isomorphie-, 80
 Wort-, 80
 Produkt, 65, 86, 100, 145, 149, 151
 amalgamiertes, 68
 Cup-, 130
 direktes, 49, 84
 freies, 65
 in einer Kategorie, 20
 reduziertes, 115, 150
 Smash-, *siehe* Produkt, reduziertes
 Tensor-, 150
 topologisches, 18, 26, 49–51, 84
 Wedge-, *siehe* Bouquet
 Projektion
 stereographische, 39, 69
 Pullback, 144
 Punkt
 innerer, 111
 Rand-, 111
 Pushout, 33, 69, 86, 114, 116, 144, 150
 Quaternionen, 131
 Quotient, 147
 Homotopie-, 116
 Kettenkomplex, 198
 nach Äquivalenzrelation, 31, 32
 nach Gruppenwirkung, 53, 72, 74–78
 punktiertes Räume, 87, 115
 Rand, 5
 geometrischer, 88, 104, 110
 Kettenkomplex, 193
 Randoperator
 zellulärer, 194–199
 Raum
 einpunktiger, 54

Hausdorff-, 8, 9, 22, 39, 43, 44, 46, 48, 74, 86, 110
 schwach, 147, 176–178
 kompakt erzeugter, 147
 kompakt erzeugter schwach-Hausdorff-, 147,
 177–178
 metrischer, 3, 8, 12, 23, 38, 44, 45, 147
 Pfad-, 168
 projektiver
 komplex, 101, 196
 quaternionisch, 102, 196
 reell, 196
 punktiertes, 54, 87, 115
 gut, 112
 Schleifen-, 92
 topologischer, 5, 7
 Tychonoff-, 8
 Vektor-, 7, 49, 52
 dualer, 49
 normierter, 1, 3, 44, 52
 reduzieren, *siehe* kürzen
 regulär, 8, 40
 vollständig, 8
 Retrakt, 55, 62, 112
 Abbildung, 136
 Deformations-, 55, 68–70, 160
 starker, 55
 Umgebungs-, 112, 157
 Morphismus, 136
 Retraktion, *siehe* Retrakt
 Ringe
 Borromäische, 69
 Satz
 Alexandroff-Kompaktifizierung, 24
 Approximation
 CW-, 162
 zelluläre, 159
 Ausschneidungs-
 Homotopie, 103, 114
 stabile Homotopiegruppen, 121
 Barratt-Puppe-Sequenz, 171
 Blakers-Massey, 103, 114
 Borsuk-Ulam, 63, 85
 Brouwer, 110
 Brouwer-Hopf, 107
 Ein-Punkt-Kompaktifizierung, *siehe*
 Alexandroff-Kompaktifizierung
 Eulerscher Polyeder-, 201
 Exponentialgesetz, 38, 154
 abstraktes, 153
 Fixpunkt-
 Banach, 1
 Brouwer, 1, 62, 108
 Freudenthal, 118, 120, 189
 Fundamental-
 Modellkategorien, 169
 Fundamental- der Algebra, 85
 Gabriel-Popescu, 183
 Heine-Borel, 22, 23
 Hilbert Basis-, 45
 Homomorphie-, 184
 Homotopiesequenz
 Paar, 95
 Serre-Faserung, 98
 stabile, 121
 Igel, 109
 Invarianz der Dimension, 110
 Kervaire-Milnor, 2
 Lebesgue, 66, 67
 Lebesgue-Zahl, 23
 Liftungs-, 71, 74, 99
 Homotopie-, 60, 71
 Mayer-Vietoris, 187
 Metrisations-
 Urysohn, 13, 40
 Milnor, 166
 Pontryagin
 $\pi_1^s(S^0)$, 131
 Pontryagin-Thom
 gerahmter Bordismus, 125, 128
 Quillen, 169
 Seifert-van Kampen, 66, 68, 69
 Serre, 133
 Stone-Čech-Kompaktifizierung, 27
 Tietze, 10, 42
 Tychonoff, 26, 28
 vom Igel, 2
 Whitehead, 160
 Zwischenwert-, 35, 62
 Schleife, 56, 71
 Schleifenraum, 92
 Schneeflockenkurve, 7
 Schnitt, 100
 Seite
 freie, 93
 Sequenz, 94
 Barratt-Puppe-, 171
 exakte, 94, 135, 184
 Homotopie-, 175
 kurze, 94
 lange, 185
 Faser-, 175
 Homologie-, 185
 Mayer-Vietoris-, 187
 Homotopie-
 Faserungen, 98
 Kofaserung, 117
 Paar, 95
 stabile, 121, 186
 koexakte
 Homotopie-, 172
 Kofaser-, 171
 Mayer-Vietoris-, 187
 Skelett, 41, 157

Spektrum, 120
 Sphäre, 2, 39, 83, 189
 stetig, 3, 4, 6, 29
 an einem Punkt, 3, 6, 16
 Subbasis, 12, 18, 36
 Summe
 direkte, 49, 184
 topologische, 29
 Suspension
 reduzierte, *siehe* Einhängung, reduzierte

 Teilfolge, 15
 Teilmenge
 offene, 39
 Teleskop
 Abbildungs-, 191
 Topologie, 4
 Box-, 20, 26
 CW-, 42, 43
 diskrete, 5, 12, 31, 34, 40, 45, 60, 61, 63
 Final-, 31, 50
 Identifizierungs-, *siehe* Quotienten-
 induzierte, *siehe* Initial-
 Initial-, 31, 50
 Klumpen-, 5, 12, 20, 31, 45, 73
 koendliche, 45, 46
 koinduzierte, *siehe* Final-
 Kolimes-, 34, 44
 kompakt erzeugte, 147
 kompakt-offene, 36, 38, 51, 55, 92, 154
 metrische, 4, 47, 51
 Ordnungs-, 14, 46
 p -adische, 51
 Produkt-, 18, 31, 36, 47, 51, 53, 149
 Quotienten-, 31, 33, 50, 52, 72, 74, 87, 115, 147
 Relativ-, *siehe* Unterraum-
 schwache, 34, 44
 Spur-, *siehe* Unterraum-
 Summen-, 29, 31, 147
 Unterraum-, 17, 20, 31, 32, 39, 43, 47, 48, 50, 55, 85, 149
 Verklebungs-, 32, 50
 Zariski-, 45, 46
 zur Basis, 13, 20
 zur Subbasis, 13, 18, 36
 Torus, 83
 Clifford-, 70
 Totalraum, 100
 Transformation
 natürliche, 89, 185
 natürliche, 28
 Trivialisierung, 123
 lokale, 100

 Überdeckung
 offene, 22, 23, 66
 Teil-, 22
 überlagert
 gleichmäßig, 60, 72, 73, 75
 Überlagerung, 60, 61, 63, 70–78, 86, 99, 100
 n -zusammenhängende, 162
 normale, 74, 75–78
 universelle, 60, 70, 75–78, 86
 Umgebung, 4, 5, 39, 73
 kompakte, 24
 zusammenhängende, 35
 weg-, 35
 Umgebungsbasis, 31
 Umlaufzahl, 53
 Ungleichung
 Morse-, **201**
 Unterkategorie
 volle, 146
 Untermannigfaltigkeit, 39
 gerahmte, 123
 Unterraum, 20, 22, 149
 unzusammenhängend
 total, 35, 51

 Verbund, 136
 Vereinigung
 disjunkte, 29, 30, 49, 147
 Vererbung, 20, 32, 50, 74
 Verkettung, 6, 54, 56

 Weg, 34, 55, 56, 72
 Wirkung
 Gruppen-, 72, 74–78
 eigentlich diskontinuierliche, 73, 74–75
 freie, 73, 74–75
 Wort, 64
 gekürztes, 64
 reduziertes, 64, 65

 Zahl
 Betti-, 200
 dyadische, 10
 Euler-, 201
 Zelle, 41, 43, 157
 abgeschlossene, 41, 157
 zusammenhängend, 34, 50, 70–78, 86
 einfach, 59, 69, 70, 84
 semilokal, 75, 78
 lokal, 35
 n -, 102, 160
 weg-, 34, 50, 57, 59, 66–72, 80, 82, 84
 lokal, 35, 71–78
 Zusammenhangskomponente, 35, 78
 Weg-, 35, 51, 55, 71, 77, 88
 zusammenziehbar, 54, 55, 59, 60, 68, 69, 91, 186
 lokal, 78, 86
 Zykel, 193
 gerahmter, 127
 Zylinder, 167
 Abbildungs-, 112
 relativer, 160

reduzierter, 116, 173