Seminar: Operaden in der Algebra, Topologie und Physik im Sommersemester 2022

Vortrag 1: Algebraische Strukturen

Material: [1, Kapitel 1]
Sprecher: Jonas/Thorsten
Datum: 18.10.
Viele Strukturen in der Algebra lassen sich durch Morphismen von Vektorräumen und Relationen zwischen diesen darstellen. Wir sind vor allem an assoziativen Algebren, kommutativen Algebren und Liealgebren interessiert. Diese Dartellung erlaubt uns, das dualisieren dieser Konzepte, was uns schließlich zu einem neuen Konzept führt: *koassoziativen Koalgebren*. Das Ziel dieses Vortrag ist es die oben genannten Konzepte einzuführen und und diese anhand von vielen Beispielen zu motivieren.

Vortrag 2: Monoidale Kategorien

Material: [1, Appendix B.1-B.3]
Sprecher: Jonas/Thorsten
Datum: 25.10.
Monoidale Kategorien sind eine Verallgemeinerung des Konzepts des Tensorprodukts in der Kategorie der Vektorräume. Für uns ist vor allem die Kategorie der Endofunktoren von Vektorräumen interessant. Ziel dieses Vortrags ist eine kurze Einführung in monoidale Kategorien erklärt am Beispiel von Endofunktoren.

Vortrag 3: Algebraische Operaden: Definitionen und erste Eigenschaften

Material: [1, Kapitel 5.1-5.3]
Sprecher: Jannis/Nico
Datum: 8.11.

Eine mögliche Weise (symmetrische) Operaden zu definieren ist mit Hilfe von sogenannten Schurmoduln. Diese sind Folgen von Moduln für alle symmetrischen Gruppen und bieten einen sehr einfachen Zugang zu symmetrischen Operaden. Ziel dieses Vortrags ist es Operaden zu definieren und deren Verbindung zu Schurmoduln aufzuzeigen. Als letztes zeigt man anhand von Beispielen was es bedeutet eine Algebra über einer Operade zu sein.

Vortrag 4: Algebraische Operaden: Erste Konstruktionen und die freie Operade

Material: [1, Kapitel 5.5-5.7]
Sprecher: Jannis/Nico
Datum: 15.11.

So wie es freie Objekte in der linearen Algbera, wie zum Beispiel frei erzeugte Vektorräume, freie Gruppen, etc, so gibt auch für jedes S-modul eine freie Operade. Diese wird durch eine universelle Eigenschaft eindeutig (bis auf Isomorphie) festgelegt. Mit Hilfe dieser lassen sich später für uns interessante Operaden definieren und viele Beispiel erhält man aus einer Quotientenkonstruktion aus einer freien Operade. Ziel dieses Vortrags ist es die freie Operade zu definieren, deren Existenz zu zeigen und mit hilfe von Quotientenkonstruktionen neue Operaden zu definieren.

Vortrag 5: Algebraische Operaden: Kooperaden und nicht-symmetrische Operaden

Material: [1, Kapitel 5.8, 5.9]
Sprecher: Chiara
Datum: 22.11.
Kooperaden verhalten sich zu Operaden wie Koalgebren zu Algebren und spielen eine herausragende Rolle in der Theorie der Koszuldualität von Operaden. Weitere interesante Objekte, die nicht in die klassische Definition einer Operade fallen sind sogenannte nicht-symmetrische Operaden. Ziel dieses Vortrags ist beide Objekte zu definieren und die korrespondierenden Eigenschaften von Operaden zu erklären.

Vortrag 6: Operadische homologische Algebra: Differenziell graduierte Operaden

Material: [1, Kapitel 6.1-6.4]
Sprecher: Marcel
Datum: 29.11.
Differenziell graduierte Operaden verallgemeinern Operaden in folgendem Sinne: man ersetzt ein S-Modul durch eine Folge von S-Moduln, die durch eine Folge von Morphismen verbunden sind, die sich zu 0 quadrieren. Dies führt uns zu einem der wohl bekanntesten Gebieten der Mathematik: *Kohomologie*. Diese erlaubt uns für jede Operade ein minimales Modell zu definieren. In diesem Vortrag ist das Ziel, diese beiden Konzepte zu verbinden und zu definieren was eine differenziell graduierte (dg) Kooperade ist, und ihre zugehörige Kohomologie. Als letztes definieren wir die Konvolutionsoperade einer Kooperade und einer Operade, die kanonischerweise eine dg Operaden, die eine zusätzliche dg Liealgebrastruktur besitzt.

Vortrag 7: Operadische homologische Algebra: Bar- und Cobarkonstruktionen

Material: [1, Kapitel 6.5-6.7]
Sprecher: Nelson
Datum: 6.12.
Die Barkonstruktion ist ein Funktor, der jeder dg Operade eine dg Kooperade zuordnet. Ein adjungierter Funktor dazu ist die so genannte Cobarkonstruktion. Diese beiden Operationen führen uns zu universellen Twist morphismen, der Koszulbedingung und dem Vergleichslemma. Beide Konstruktionen haben äquivalente in verschiedenen Teilgebieten der Mathematik, zum Beispile in der algebraischen Topologie entspircht die Cobarkonstruktion der Konstruktion eines klassifizierenden Raumes.

Vortrag 8: Koszuldualität von Operaden: Quadratische und Koszuloperaden

Material: [1, Kapitel 7.1-7.4]
Sprecher: Paul

Datum: 13.12.
Eine große Beispielklasse von Operaden sind quadratische Operaden. Unsere üblichen Verdächtigen: kommutative, assoziative und Lielagebren sind genau von dieser Form. Eine quadratische Operade kann zusätzlich noch die *Koszulbedingung* erfüllen. Wenn das der Fall ist, dann kann man sehr einfach ein minimales Model angeben.

Vortrag 9: Koszuldualität von Operaden: Koszulbedingung für Beispielklassen und Gegenbeispiele

Material: [1, Kapitel 7.5-7.8]
Sprecher: Jonas/Thorsten
Datum: 20.12.
Nicht jede quadratische Operade ist Koszul und eine Möglichkeit dies zu beweisen sind so genannte erzeugende Potenzreihen. Ziel dieses Vortrags ist quadratische Operaden zu betrachten die die Koszulbedingung nicht erfüllen und bEispielklassen anzugeben, die die Koszulbedingung erfüllen.

Vortrag 10: Homotopie operadische Algebren: Definition, Morphismen und Transfer

Material: [1, Kapitel 11.1-11.3]
Sprecher: Jannek
Datum: 10.1.
Eine Koszuloperade definiert eine Kategorie von Algebren: die Algebren von ihrer Koszulauflösung. Ziel dieses Vortrags ist es zu erklären wie diese Kategorie aussieht, also Objekte und Morphismen und zum Schluss eines der wichtigsten Theoreme der homologischen Algebra zu beweisen: das Homotopietransfertheorem.

Vortrag 11: Homotopie operadische Algebren: Inverse ∞-Morphismen, quasi-Isomorphismen und Homotopieoperaden

Material: [1, Kapitel 11.4, 11.5]
Sprecher: Jonas/Thorsten
Datum: 17.1.
Die Kategorie von Homotopiealgebren über einer Koszuloperade besitzt wesentlich mehr Morphismen als die Kategorie der Algebren über der Operade selbst. Ziel dieses Vortrags ist es diese genauer zu beschreiben und die Definition von in vielen Fällen besseren Äquivalenzen als Isomorphismen zu geben: quasi-Isomorphismen. Als letzten soll nun ein Ausblick gegeben werden: man lockert die Definition einer Operade und betrachtet die definierenden Eigenschaften nur noch bis auf Homotopie.

Vortrag 12: Fallbeispiel 1: (z.B.) Die Rolle von L_∞-Algebren und Morphismen in der Deformationstheorie

Material:-
Sprecher: Jonas/Thorsten
Datum: 24.1.

Vortrag 13: Fallbeispiel 2: (z.B.) Die Rolle von E_∞-Algebren in der Topologie

Material:-
Sprecher: Jonas/Thorsten
Datum: 31.1.

Vortrag 14: Fallbeispiel 3: (z.B.)...

Material:-
Sprecher: Jonas/Thorsten
Datum: 7.2.

References

[1] J.-L. Loday, B. Vallette: *Algebraic Operads*, Springer 2012