10. ÜBUNGSBLATT
DIFFERENTIALGEOMETRIE I
IM WS 2024/25 BEI PROF. DR. S. GOETTE

Abgabe Mittwoch, den 8.1.25
14 Uhr (also vor der Vorlesung)
in den Briefkasten 3.19

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Abgabe

Auf diesem Blatt finden Sie einige Bonusaufgaben, d.h. um die 33% der Punkte zu erreichen, benötigen Sie nur 13 Punkte. Sie können aber bis zu 80 Punkte bekommen, wenn Sie alle Aufgaben lösen.

Aufgabe 1

Es seien M und N Riemannsche Mannigfaltigkeiten, $p \in M$ und $q \in N$. Diese sollen die Schnittorte $C_M(p)$ und $C_N(q)$ besitzen, sowie die tangentialen konjugierten Orte K_M^p und K_N^q. Zeigen Sie, dass auf $M \times N$ gilt:

(a) $C^{M\times N}((p,q)) = (M \times C^N(q)) \cup (C^M(p) \times N)$

(b) $K_{(p,q)}^{M\times N} = (T_pM \times K_q^N) \cup (K_p^M \times T_qN)$

Aufgabe 2

Fassen Sie die hyperbolische Ebene als Teilmenge $B_1(0) \subset \mathbb{C}$ auf. Zeigen Sie, dass die Möbiustransformationen $F_A(z) = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$ für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(1,1)$, d.h., $|a|^2 = |b|^2 + 1$ Isometrien der hyperbolischen Ebene sind.
Hinweis: Rechnen Sie komplex und benutzen Sie, dass $g_z(u,v) = \frac{4}{(1-|z|^2)^2}\mathrm{Re}(\overline{u}v)$ ist.

Aufgabe 3

Betrachte $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Zeigen Sie:

(a) Sei $\gamma\colon M \to M$ eine Isometrie einer zusammenhängenden vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g). Dann wird γ bereits festgelegt durch $\gamma(p) \in M$ und $d\gamma_p\colon T_pM \to T_{\gamma(p)}$ für einen beliebigen Punkt $p \in M$.

(b) Jede orientierungserhaltende Isometrie von S^{2k} hat einen Fixpunkt.

(c) Jede orientierungsumkehrende Isometrie von S^{2k-1} hat einen Fixpunkt.

Aufgabe 4

Betrachte $S^{2k-1} \subset \mathbb{R}^{2k}$ und

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 & & & \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \cos\alpha_k & -\sin\alpha_k \\ & & & \sin\alpha_k & \cos\alpha_k \end{pmatrix}.$$

Unter welchen Bedingungen erzeugt die Drehung $g\colon S^{2k-1} \to S^{2k-1}$ mit $g(p) = A \cdot p$ eine Gruppe Γ, die frei und eigentlich diskontinuierlich auf S^{2k-1} wirkt?

Aufgabe 5

Es sei (M, g) eine zusammenhängende vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, und $\gamma\colon M \to M$ eine Riemannsche Isometrie. Es bezeichne $M^\gamma = \{p \in M \mid \gamma(p) = p\}$ die Fixpunktmenge von M. Zeigen Sie:

(a) Sei $p \in M^\gamma$ und $v \in T_pM$ mit $d\gamma_p(v) = v$, dann verläuft die Geodätische $c_v\colon \mathbb{R} \to M$ ganz in M^γ.

(b) Sei v wie oben. Die Ableitung $d\gamma$ bildet parallele Vektorfelder längs c_v auf parallele Vektorfelder ab.

(c) Die Abbildung $t \mapsto d\gamma_{c_v(t)} \in \mathrm{End}(T_{c_v(t)}M)$ ist parallel längs c_v, das heißt, für alle Vektorfelder X längs c_v gilt $\nabla^c_{\frac{\partial}{\partial t}} d\gamma(X) = d\gamma \nabla^c_{\frac{\partial}{\partial t}} X$.

(d) M^γ ist eine Untermannigfaltigkeit von M.

Aufgabe 6

Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $N \subset M$ eine totalgeodätische Untermannigfaltigkeit, das heißt, die Inklusionsabbildung $\iota\colon N \to M$ bildet Geodätische in N bezüglich der Metrik $\iota^* g$ auf Geodätische in M ab. Es seien X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(M)$ an N tangentiale Vektorfelder, das heißt, sie sind ι-verwandt zu Vektorfeldern $X|_N$, $Y|_N$, $Z|_N \in \mathfrak{X}(N)$. Zeigen Sie:

(a) Seien ∇^{TM}, ∇^{TN} die Levi-Civita-Zusammenhänge zu g beziehungsweise $\iota^* g$, dann gilt $\nabla^{TN}_{X|_N} Y|_N = (\nabla^{TM}_X Y)|_N$.

(b) Seien R^M, R^N die Riemannschen Krümmungstensoren von M und N, dann gilt $R^N_{X|_N, Y|_N} Z|_N = (R^M_{X,Y} Z)|_N$.

(c) Ebenen $E \subset T_pN$ haben die gleiche Schnittkrümmung wie $d\iota_p(E) \subset T_pM$ für alle $p \in N$.

Aufgabe 7

Es sei $\mathbb{C}P^n$ wie in Aufgabe 1 von Blatt 3 definiert. Wir wollen eine Riemannsche Metrik auf $\mathbb{C}P^n$ konstruieren. Dazu bezeichne $q\colon S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ die Einschränkung der Quotientenabbildung $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P^n$ auf $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$.

(a) Es sei $p \in \mathbb{C}P^n$ und $x \in q^{-1}(\{p\}) \subset S^{2n+1}$. Zeigen Sie, dass $q^{-1}(p) = \{\, \lambda x \mid \lambda \in S^1 \subset \mathbb{C} \,\}$.

(b) Seien p, x wie in (a). Zeigen Sie, dass zu jedem $v \in T_p\mathbb{C}P^n$ ein eindeutiger Vektor $\bar{v}_x \in T_xS^{2n+1}$ mit $v \perp ix$ und $dq_x(\bar{v}_x) = v$ existiert.

(c) Seien p, x, v und $\bar{v}_x$ wie oben. Bestimmen Sie zu $\lambda \in S^1$ den entsprechenden Vektor $\bar{v}_{\lambda x} \in T_{\lambda x}S^{2n+1}$.

(d) Es sei $p = q(x) \in \mathbb{C}P^n$ und $\bar{v}_x$, $\bar{w}_x$ zu v, $w \in T_p\mathbb{C}P^n$ wie oben gegeben. Zeigen Sie, dass die Riemannsche Metrik $g_p(v, w) = \langle \bar{v}_x, \bar{w}_x \rangle$ nicht von der Wahl von $x \in q^{-1}(\{p\})$ abhängt.

Aufgabe 8

Wir betrachten $\mathbb{C}P^n$ mit der Riemannschen Metrik aus Aufgabe 7. Ziel ist es, die Schnittkrümmungen von $\mathbb{C}P^n$ ohne lokale Rechnungen zu bestimmen.

(a) Finden Sie zu jedem $p \in \mathbb{C}P^n$ und jedem $v \in T_p\mathbb{C}P^n$ eine Riemannsche Isometrie A von $\mathbb{C}P^n$ mit $B(p) = o = [1 : 0 : \cdots : 0]$ und $dB_p(v) = dq_{(1,0,\ldots,0)}(0, \|v\|, 0, \ldots, 0)$.

(b) Finden Sie eine Riemannsche Isometrie B von $\mathbb{C}P^n$ mit Fixpunktmenge $\mathbb{R}P^n$ und zeigen Sie, dass die obige Metrik auf $\mathbb{R}P^n$ die Standardmetrik induziert. Folgern Sie mit (a) und Aufgabe 5, dass für alle $p \in \mathbb{C}P^n$, alle $v \in T_p\mathbb{C}P^n$ und alle $t \in \mathbb{R}$ genau dann $c_v(t) = p$ gilt, wenn $t\|v\| \in \pi\mathbb{Z}$.

(c) Finden Sie eine Riemannsche Isometrie C von $\mathbb{C}P^n$ mit Fixpunktmenge $\mathbb{C}P^1$, und folgern Sie mit (b), dass $\mathbb{C}P^1$ zu einer runden Sphäre vom Radius $\frac{1}{2}$ isometrisch ist.

(d) Wir identifizieren $T_o\mathbb{C}P^n$ mit $\mathbb{C}^n$. Schließen Sie aus Aufgabe 6, dass eine reelle Ebene $E = \operatorname{span}(v, w) \subset T_o\mathbb{C}P^n$ Schnittkrümmung $K(E) = 1$ hat, wenn $v \perp w \perp iv$ gilt, und $K(E) = 4$, wenn $w = iv$.

(e) Benutzen Sie Aufgabe 6(b) und (c), um $K(E)$ für alle reellen Ebenen $E \subset T_o\mathbb{C}P^n$ zu bestimmen.