11. Übungsblatt
Differentialgeometrie I
im WS 2024/25 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Montag, den 20.1.25
14 Uhr (also vor der Vorlesung)
in den Briefkasten 3.19

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Abgabe

Aufgabe 1

Es sei $\omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ das n-dimensionale Volumen der Einheitssphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, und M_κ^n bezeichne eine vollständige, einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung κ.

(a) Sei $\kappa \in \mathbb{R}$ und $r > 0$. Berechnen Sie mit Aufgabe 2 von Blatt 7 das $(n-1)$-dimensionale Volumen $\mathrm{vol}^{n-1}\left(\partial B_r(p)\right)$ der Menge $\partial B_r(p) \subset M_\kappa^n$ für ein $p \in M_\kappa^n$.

(b) Berechnen Sie das n-dimensionale Volumen $\mathrm{vol}^n\left(B_r(p)\right)$ in M_κ^n mit Hilfe der Formel

$$\mathrm{vol}^n\left(B_r(p)\right) = \int_0^r \mathrm{vol}^{n-1}\left(\partial B_s(p)\right) ds.$$

(c) Begründen Sie obige Formel.

Aufgabe 2

Unter den Voraussetzungen des Satzes von Rauch gelte $\|V(t_0)\| = \|\overline{V}(t_0)\|$ für ein $t_0 \in (0, L]$. Beweisen Sie:

(a) $\|V(t)\| = \|\overline{V}(t)\|$ für alle $t \in [0, t_0]$.

(b) $K(\mathrm{span}\{\dot{c}(t), V(t)\}) = K(\mathrm{span}\{\dot{\overline{c}}(t), \overline{V}(t)\})$ für alle $t \in [0, t_0]$.

(c) $\frac{V}{\|V\|}$ und $\frac{\overline{V}}{\|\overline{V}\|}$ sind parallele Vektorfelder entlang c bzw. $\overline{c}$.

Aufgabe 3

Sei M eine Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K(E) \leq \kappa \leq 0$ für alle Ebenen $E \subset TM$. Präzisieren und zeigen Sie folgende Aussage:

> Ein kleines Dreieck in M hat höchstens so große Winkel wie ein Dreieck mit den gleichen Seitenlängen in M_κ^n.

Hinweis: In M_κ^n gilt im Fall $\kappa < 0$ der Seitenkosinussatz $c_\kappa(c) = c_\kappa(a)c_\kappa(b) + \kappa s_\kappa(a)s_\kappa(b)\cos\gamma$ mit $c_\kappa(x) = \cosh(\sqrt{-\kappa}x)$ und $s_\kappa(x) = \frac{\sinh(\sqrt{-\kappa}x)}{\sqrt{-\kappa}}$.

Aufgabe 4

Wir betrachten $\mathbb{C}P^n$ mit der Metrik aus den Aufgaben 7, 8 von Blatt 10. Berechnen Sie wie in Aufgabe 1 oben

(a) das $(2n-1)$-dimensionale Volumen $\mathrm{vol}^{n-1}(\partial B_r(p))$ und

(b) das $2n$-dimensionale Volumen $\mathrm{vol}^n(B_r(p)$

für alle $r > 0$. Verwenden Sie dazu die Schnittkrümmung aus Aufgabe 8(d) von Blatt 10.

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass Multiplikation mit i ein paralleler Endomorphismus von $T\mathbb{C}P^n$ ist.

Bitte wenden für Präsenzaufgaben für die Tutorate.

11. Präsenzaufgaben

Differentialgeometrie I

im WS 2024/25 bei Prof. Dr. S. Goette

Aufgabe 1

Seien (M, g) und (N, h) zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Wir betrachten die Produktmannigfaltigkeit $W = M \times N$ mit der Produktmetrik

$$G((v_1, u_1), (v_2, u_2)) = g(v_1, v_2) + h(u_1, u_2)$$

für $(v_i, u_i) \in T(M \times N) = TM \times TN$ (vgl. Aufgabe 4 von Blatt 5).

(a) Wenn M und N beide positive Schnittkrümmung haben, gilt dies dann auch für W?

(b) Wenn M und N beide positive Ricci-Krümmung haben, gilt dies dann auch für W?

Bitte wenden für die Hausaufgaben.