12. Übungsblatt
Differentialgeometrie I
im WS 2024/25 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Montag, den 27.1.25
14 Uhr (also vor der Vorlesung)
in den Briefkasten 3.19

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Abgabe

Bitte beachten Sie: Die Anmeldefrist für Prüfungen und Studienleistungen zu Vorlesungen endet am 24. 1. Es reicht nicht, die Übung nur zu belegen. Die Frist zur Evaluation endet am 26. 1.

Aufgabe 1

Beweisen Sie Folgerung 2.27: Sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit universeller Überlagerung $\pi : \tilde{M} \to M$. Sei $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \tilde{M}$ ein Weg, dessen Bild $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$ eine Schleife in M ist, d.h., es gilt $\gamma(0) = \gamma(1)$. Dann ist γ genau dann in M zusammenziehbar, wenn $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1)$.

Aufgabe 2

Es sei $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die Einheitssphäre.

(a) Zeigen Sie: Die Gruppe $\Gamma = \{1, -1\}$ wirkt frei, eigentlich diskontinuierlich und isometrisch auf S^n, so dass $S^n/\Gamma \cong \mathbb{RP}^n$.

(b) Bestimmen Sie den Schnittort, den tangentialen konjugierten Ort und den Injektivitätsradius von $\mathbb{RP}^n$.

(c) Finden Sie eine kürzeste geschlossene Geodätische in der nichttrivialen Konjugationsklasse in $\pi_1(\mathbb{RP}^n) \cong \Gamma$. Ist die Abschätzung in Lemma 2.28(1) optimal?

Aufgabe 3

Es sei M eine kompakte, vollständige Mannigfaltigkeit mit nichtpositiver Schnittkrümmung. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Hadamard-Cartan:

(a) Es gibt in M geschlossene Geodätische.

(b) Keine geschlossene Geodätische ist zusammenziehbar.

Aufgabe 4

Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Es sei $(e_1, \dots, e_n)$ eine lokale Orthonormalbasis von TM. Für $X \in \mathfrak{X}(M)$ definieren wir

$$\operatorname{div} \operatorname{ric}(X) = \sum_{i=1}^{n} \Big(e_i\big(\operatorname{ric}(e_i, X)\big) - \operatorname{ric}\big(\nabla_{e_i} e_i, X\big) - \operatorname{ric}\big(e_i, \nabla_{e_i} X\big) \Big).$$

Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{div} \operatorname{ric}$ ist ein $(1, 0)$-Tensor auf M.

(b) Für die Skalarkrümmung gilt

$$2 \operatorname{div} \operatorname{ric} = d \operatorname{scal}.$$

(c) Wenn es eine Funktion f gibt, so dass $\operatorname{ric} = f \cdot g$ gilt und $\dim M \geq 3$, dann ist f konstant.

Hinweis zu (b): Benutzen Sie die Identität aus Aufgabe 3 von Blatt 9.

Bitte wenden für Präsenzaufgaben für die Tutorate.

12. Präsenzaufgaben

Differentialgeometrie I

im WS 2024/25 bei Prof. Dr. S. Goette

Aufgabe 1

Beweisen oder widerlegen Sie.

(a) Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\mathrm{ric} \leq (n-1)\kappa$ und $(\overline{M}_\kappa, \bar{g})$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung κ. Für $p \in M$ und $\bar{p} \in \overline{M}_\kappa$ ist die Funktion $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ mit $f(r) = \mathrm{vol}\big(B_r^M(p)\big) \,/\, \mathrm{vol}\big(B_r^{\overline{M}_\kappa}(\bar{p})\big)$ monoton nicht fallend.

(b) Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\mathrm{ric} \leq (n-1)\kappa > 0$. Dann ist der konjugierte Radius von M mindestens $\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$.

(c) Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\mathrm{ric} \geq (n-1)\kappa$ und $(\overline{M}_\kappa, \bar{g})$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung κ. Für $p \in M$ und $\bar{p} \in \overline{M}_\kappa$ ist die Funktion $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ mit $f(r) = \mathrm{vol}\big(B_r^M(p)\big) \,/\, \mathrm{vol}\big(B_r^{\overline{M}_\kappa}(\bar{p})\big)$ monoton nicht steigend.

(d) Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\mathrm{ric} \geq (n-1)\kappa > 0$. Dann ist der konjugierte Radius von M höchstens $\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$.

Aufgabe 2

Es sei A ein $(2,0)$-Tensor und $(e_1, \ldots, e_n)$ ein lokaler orthonormaler Rahmen. Zeigen Sie, dass $\sum_{i=1}^n A(e_i, e_i)$ nicht von der Wahl des Rahmens $(e_1, \ldots, e_n)$ abhängt und global definiert ist.

Bitte wenden für die Hausaufgaben.