

# 13. ÜBUNGSBLATT

## DIFFERENTIALGEOMETRIE I

IM WS 2024/25 BEI PROF. DR. S. GOETTE

Abgabe Montag, den 3.2.24  
14 Uhr (also vor der Vorlesung)  
in den Briefkasten 3.19

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre  
Abgabe

**Falls Sie eine mündliche Prüfung als Prüfungs- oder Studienleistung ablegen möchten, kontaktieren Sie bitte Herrn Goette vor Ende der Vorlesungszeit, um einen Termin zu vereinbaren.**

### Aufgabe 1

Es sei eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit positiver Schnittkrümmung und ungerader Dimension. Zeigen Sie, dass  $M$  dann orientierbar sein muss.

### Aufgabe 2

Es sei  $\mathcal{A}$  ein Atlas von  $M$ . Wir bezeichnen die auf  $o(TM)$  induzierte Menge von Abbildungen  $\pm\tilde{\varphi}: U^\varphi \times \{\pm 1\} \rightarrow V^\varphi$  aus Bemerkung 2.32 mit  $\tilde{\mathcal{A}}$ . Zeigen Sie:

- (a) Es gibt eine Topologie auf  $o(TM)$ , so dass  $\tilde{\mathcal{A}}$  eine differenzierbare Struktur auf  $o(TM)$  definiert.
- (b) Es gibt eine Orientierung von  $o(TM)$ , so dass

$$d_{(p,o)}\pi: T_{(p,o)}o(TM) \rightarrow T_pM$$

für alle  $(p, o) \in o(TM)$  mit  $p \in M$  und  $o \in o(T_pM)$  die induzierte Orientierung von  $T_{(p,o)}o(TM)$  auf die Orientierung  $o$  von  $T_pM$  abbildet.

### Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  mit der Metrik aus Aufgabe 7 von Blatt 10 zu einer runden Sphäre vom Radius  $\frac{1}{2}$  isometrisch ist.

### Aufgabe 4

Finden Sie eine fixpunktfreie Isometrie

$$F: \mathbb{C}\mathbb{P}^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{2n-1}$$

mit  $F^2 = \text{id}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^{2n-1}}$ . Ist sie orientierungserhaltend?

*Hinweis:* Betrachten Sie im Fall  $n = 1$  die dazugehörige Abbildung  $S^2 \rightarrow S^2$ .

Bitte wenden für Präsenzaufgaben für die Tutorate.

# 13. PRÄSENZAUFGABEN

## DIFFERENTIALGEOMETRIE I

IM WS 2024/25 BEI PROF. DR. S. GOETTE

### Aufgabe 1

Beweisen oder widerlegen Sie:

- (a) Auf  $S^n$  ist das Konstruktionsproblem SSW eindeutig lösbar, wenn die dem gegebenen Winkel gegenüberliegende Seite die längere ist.
- (b) Auf  $S^n$  hat das Konstruktionsproblem SSW stets höchstens zwei Lösungen.
- (c) Auf Mannigfaltigkeiten mit  $K = 0$  ist das Konstruktionsproblem SSS eindeutig lösbar, falls die Dreiecksungleichungen alle erfüllt sind.
- (d) Auf Mannigfaltigkeiten mit Schnittkrümmung 0 gelten Sinussatz und Cosinussatz für minimale Dreiecke.

Bitte wenden für die Hausaufgaben.