1. ÜBUNGSBLATT
DIFFERENTIALGEOMETRIE I
IM WS 2024/25 BEI PROF. DR. S. GOETTE

Abgabe Montag, den 21.10.24 nach der Vorlesung,
in den Briefkasten [redacted] 3.19

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Abgabe

Aufgabe 1

Sei $c \in \mathbb{R}$ und $M_k^n(c) = \left\{(x_1, \ldots, x_{n+k}) \in \mathbb{R}^{n+k} \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=n+1}^{n+k} x_i^2 = c\right\}$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $c \neq 0$ ist $M_k^n(c)$ eine Mannigfaltigkeit. Was ist die Dimension von $M_k^n(c)$?

(b) $M_k^n(0)$ ist keine Mannigfaltigkeit, falls $n, k \geq 1$.

Aufgabe 2

Sei $\mathbb{R}P^n = \{[v] \mid v \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}\}$, wobei $v \sim w \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $v = \lambda \cdot w$. Zeigen Sie: $\mathbb{R}P^n$ ist eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Hilfe folgender Karten:

$$\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n, [(x_1, \ldots, x_{n+1})] \mapsto \frac{1}{x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}),$$
$$U_i = \{[(x_1, \ldots, x_{n+1})] \mid x_i \neq 0\} \subset \mathbb{R}P^n.$$

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen wohldefiniert und glatt sind:

(a) $\mathbb{R} \to S^1 \subset \mathbb{C}$ mit $t \mapsto e^{2\pi i t}$

(b) $S^1 \subset \mathbb{C} \to S^1 \subset \mathbb{C}$ mit $z \mapsto z^n$.

Aufgabe 4

Seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Zeigen Sie:

(a) X ist zusammenhängend $\Rightarrow \operatorname{Im}(f) \subset Y$ ist zusammenhängend.

(b) X ist kompakt und Y Hausdorff $\Rightarrow f(X) \subset Y$ ist kompakt.

(c) Folgern Sie, dass S^n und $\mathbb{R}^n$ nicht homöomorph sind.

Bitte wenden für Präsenzaufgaben für die Tutorate.

Präsenzaufgaben
Differentialgeometrie I
im WS 2024/25 bei Prof. Dr. S. Goette

Aufgabe 1

Wiederholen Sie die Aussagen des Satzes über implizite Funktionen und des Satzes über lokale Umkehrfunktion aus der Analysis.
Sind die Rangbedingungen jeweils notwendig? Überlegen Sie sich, ob es Beispiele gibt, bei denen die Ableitung nicht invertierbar ist, es aber trotzdem eine (lokale) Umkehrfunktion gibt.

Aufgabe 2

Zeigen Sie: $\mathbb{R}P^n$ (vgl. Definition in Aufgabe 2 der Hausaufgaben) ist Hausdorffraum mit abzählbarer Basis.

Aufgabe 3

Seien $0 < r < R$ gegeben. Gesucht ist eine C^∞-Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\} \to \mathbb{R}$$

mit regulärem Wert 0, so dass $f^{-1}(0)$ die Menge aller Punkte im Raum beschreibt, die Abstand r zu einem Kreis von Radius R in der $x - y$-Ebene haben.

(a) Finden Sie solch eine Funktion.

(b) Gibt es auch eine solche C^∞-Funktion auf ganz $\mathbb{R}^3$?

Bitte wenden für die Hausaufgaben.