2. ÜBUNGSBLATT

DIFFERENTIALGEOMETRIE I

IM WS 2024/25 BEI PROF. DR. S. GOETTE

Abgabe Monntag, den 28.10.24
10 Uhr (also vor der Vorlesung)
in den Briefkasten 3.19

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Abgabe

Aufgabe 1

Es sei $v \in T_pS^2$ der Vektor, welcher bezüglich der Karte $\varphi_+ : S^2 \setminus \{e_3\} \to \mathbb{R}^2$ der stereographischen Projektion die Gestalt $\frac{1}{\sqrt{2}-1}\binom{-1}{1}$ mit dem Fußpunkt $\varphi_+(p) = \frac{1}{2-\sqrt{2}}\binom{1}{1}$ besitzt.

(a) Beschreiben und skizzieren Sie eine Kurve auf S^2, die v als Geschiwindigkeitsvektor besitzt.

(b) Bestimmen den Fußpunkt und die Darstellung von v bezüglich der Karte φ_-.

(c) Wie wirkt v als Richtungsableitung auf die Funktionen $f_i : S^2 \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f_i(x) = x_i$ für $i = 1, 2, 3$, für alle $x \in \mathbb{R}^3$?

Aufgabe 2

Definieren Sie noch einmal die Homomorphismen aus der Vorlesung vom physikalischen in den geometrischen Tangentialraum und den in umgekehrter Richtung. Zeigen Sie, dass diese wohldefiniert und zueinander invers sind.

Aufgabe 3

Zeigen Sie für eine C^k-Abbildung $F : M \to N$:

(a) Das physikalische Differential ist wohldefiniert;

(b) Das geometrische Differential ist wohldefiniert;

(c) Beide Konstruktionen liefern die gleiche Abbildung $dF : TM \to TN$.

Aufgabe 4

Wir betrachten die Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}P^n$ mit dem Atlas $\mathcal{A}$ aus Aufgabe 2 von Blatt 1.

(a) Wie verhalten sich die Koordinaten $v^j_{\varphi_i}$ von Vektoren $v \in T\mathbb{R}P^n$ unter Kartenwechseln?

(b) Geben Sie einen Atlas von $T\mathbb{R}P^n$ und die zugehörigen Kartenwechsel an.

Bitte wenden für Präsenzaufgaben für die Tutorate.

2. Präsenzaufgaben
Differentialgeometrie I
im WS 2024/25 bei Prof. Dr. S. Goette

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie, dass das Differential der Identität id: $M \to M$ an jedem Punkt $p \in M$ ebenfalls die Identität id: $T_pM \to T_pM$ ist.

(b) Beweisen Sie für zwei C^k-Abbildungen $F : M \to N$ und $G : L \to M$ die Kettenregel:

$$d(F \circ G) = dF \circ dG : TL \to TN$$

Hinweis: Benutzen Sie jeweils nur eine der drei möglichen Darstellungen von Tangentialvektoren.

Aufgabe 2

Betrachte $M = \mathbb{R}^2$ und

$$\mathcal{A} = \{\varphi_b \colon \mathbb{R} \times \{b\} \to \mathbb{R} \mid b \in \mathbb{R},\ \varphi_b(x, b) = x\}.$$

Gibt es eine Topologie auf M, für die $\mathcal{A}$ ein C^∞-Atlas ist? Ist M mit dieser Topologie und dem C^∞-Atlas $\mathcal{A}$ eine Mannigfaltigkeit?

Aufgabe 3

Es sei $y \in \mathbb{R}$ ein regulären Wert von $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, und es sei $M = f^{-1}(y) \subset \mathbb{R}^n$. Überlegen Sie sich, dass

$$\{(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid f(x) = y, d_x f(v) = 0\}$$

das Tangentialbündel von M beschreibt. Wie sieht es im Spezialfall $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aus?

Bitte wenden für die Hausaufgaben.