3. Übungsblatt
Differentialgeometrie I
im WS 2024/25 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Montag, den 4.11.24
14 Uhr (also vor der Vorlesung)
in den Briefkasten 3.19

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Abgabe

Aufgabe 1

Sei $\mathbb{CP}^n = \{[v] \mid v \in \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\}\}$, wobei $v \sim w \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $v = \lambda \cdot w$.

(a) Wir definieren auf $\mathbb{CP}^n$ eine Topologie durch

$$U \in \mathbb{CP}^n \text{ offen } \Leftrightarrow \left\{v \in \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \mid [v] \in U\right\} \subset \mathbb{C}^{n+1} \text{ offen},$$

d.h., die Quotiententopologie der Projektion $\mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{CP}^n$ mit $v \mapsto [v]$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{CP}^n$ mit dieser Topologie Hausdorff ist und eine abzählbare Basis besitzt.

(b) Finden Sie $n+1$ Karten analog zu denen für $\mathbb{RP}^n$ aus Aufgabe 2 von Blatt 1.

(c) Zeigen Sie, dass die Karten aus b) einen C^∞-Atlas von $\mathbb{CP}^n$ bilden.

Aufgabe 2

Betrachten Sie $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ als Untermannigfaltigkeit der Kodimension 0. Zu $A \in M_n(\mathbb{R})$ definiere das Vektorfeld $V_A \in \mathfrak{X}(G)$ durch

$$V_A(g) = (g, g \cdot A) \in TG \cong G \times M_n(\mathbb{R}),$$

wobei "$\cdot$". Matrizenmultiplikation bezeichne.

(a) Für $h \in G$ definiere $\ell_h : G \to G$ durch $\ell_h(g) = hg$. Zeigen Sie, dass V_A für jedes A zu sich selbst ℓ_h-verwandt ist für alle $h \in G$.

(b) Zeigen Sie $[V_A, V_B] = V_{AB-BA}$ für alle $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

Aufgabe 3

Es sei $\varphi(g) = g^T g$ eine Abbildung der invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen in die symmetrischen Matrizen. Zeigen Sie, dass

(a) φ eine Submersion ist, also $d_x\varphi$ an jeder Stelle surjektiv ist.

(b) $\mathrm{O}(n)$ eine $\frac{n(n-1)}{2}$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M_n ist. *(Hinweis: Benutzen Sie den Satz vom regulären Wert.)*

(c) der Tangentialraum $T_g\mathrm{O}(n) = \left\{A \in M_n \mid g^T A + A^T g = 0\right\}$ ist.

Aufgabe 4

Es sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit und $\mathcal{D}\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ eine Derivation. Dann ist $\mathcal{D}_p \in T_pM$ ein algebraischer Tangentialvektor für alle $p \in M$, wobei $\mathcal{D}_p f = (\mathcal{D}f)(p)$. Zeigen Sie:

(a) Durch $p \mapsto \mathcal{D}_p \in TM$ wird ein C^∞-Vektorfeld auf M definiert.

(b) Seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, dann ist $[\![X, Y]\!]\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ eine Derivation, wobei

$$[\![X, Y]\!](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

(c) Sei $F\colon M \to N$ eine glatte Abbildung, und $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ sowie $V, W \in \mathfrak{X}(N)$ seien jeweils F-verwandt. Folgern Sie, dass $[\![X, Y]\!]$ und $[\![V, W]\!]$ dann auf F-verwandt sind.

Bitte wenden für Präsenzaufgaben für die Tutorate.

3. Präsenzaufgaben

Differentialgeometrie I

im WS 2024/25 bei Prof. Dr. S. Goette

Aufgabe 1

Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Es sei $F\colon M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen C^∞-Mannigfaltigkeiten, und $X \in \mathfrak{X}(M)$ sowie $Y \in \mathfrak{X}(N)$ seien F-verwandt. Dann gilt $Y(f) = X(f \circ F)$ für alle $f \in C^\infty(N)$.

(b) Es sei $\iota\colon M \to \mathbb{R}^n$ die Inklusionsabbildung einer C^∞-Untermannigfaltigkeit. Seien $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ tangential an M, das heißt, es existieren ι-verwandte Vektorfelder zu X und Y auf M. Dann ist auch $X(Y) \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ tangential an M.

(c) Es seien $\iota\colon M \to \mathbb{R}^n$, X, Y wie oben, dann ist $X(Y) - Y(X)$ tangential an M.

Aufgabe 2

Betrachten Sie $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Es bezeichne $F_\theta\colon S^2 \to S^2$ die Drehung um die z-Achse mit dem Winkel $\theta \in \mathbb{R}$.

(a) Beschreiben Sie F_θ in der stereographischen Projektion.

(b) Zu jedem Punkt $x \in S^2$ gibt es eine Kurve $\gamma_x\colon \mathbb{R} \to S^2$ mit $\gamma_x(t) = F_t(x)$. Zeigen Sie, dass die Zuordnung $x \mapsto \dot\gamma_x(0)$ ein Vektorfeld auf S^2 definiert.

(c) Können Sie dieses Vektorfeld mit Hilfe des Kreuzprodukts im $\mathbb{R}^3$ beschreiben?

(d) Stellen Sie dieses Vektorfeld in der stereographischen Projektion dar.

Bitte wenden für die Hausaufgaben.