4. ÜBUNGSBLATT
DIFFERENTIALGEOMETRIE I
IM WS 2024/25 BEI PROF. DR. S. GOETTE

Abgabe Montag, den 11.11.24
14 Uhr (also vor der Vorlesung)
in den Briefkasten 3.19

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Abgabe

Aufgabe 1

Es sei $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und $\varphi\colon S^n \setminus \{e_{n+1}\} \to \mathbb{R}^n$ die stereographische Projektion. Stellen Sie die von der euklidischen Metrik $\langle , \rangle$ auf $\mathbb{R}^{n+1}$ induzierte Metrik g^{sph} bezüglich der Karte φ dar, das heißt, beweisen Sie die Formel in Beispiel 1.36.

Aufgabe 2

Es sei $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und $\varphi : S^n \setminus \{e_{n+1}\} \to \mathbb{R}^n$ die stereographische Projektion. Schreibe X_i für das Koordinatenvektorfeld $\frac{\partial}{\partial \varphi^i}$.

(a) Berechnen Sie $\nabla_{X_i} X_j$ mit Hilfe von Aufgabe 1 und stellen Sie es in der Basis $X_1, \dots, X_n$ dar, d.h., bestimmen Sie die Cristoffelsymbole bezüglich der Karte φ.

(b) Berechnen Sie $R_{X_i, X_j} X_k$.

Aufgabe 3

Es sei $\left(B_1^n(0), g^{\mathrm{hyp}}\right)$ das Poincare-Modell des hyperbolischen Raumes in n Dimensionen aus Beispiel 1.37. Bestimmen Sie den Levi-Civita-Zusammenhang ∇, indem Sie zunächst $g_p^{\mathrm{hyp}}\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right)$ ausrechnen und dann $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p$ in den $\frac{\partial}{\partial x^k}$ ausdrücken, d.h., bestimmen Sie die Christoffelsymbole Γ_{ij}^k bezüglich der Identität.

Aufgabe 4

Betrachten Sie die Mannigfaltigkeit $O(n)$ aus Aufgabe 3 von Blatt 3. Es sei $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ die Spur der Matrix $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Zu schiefsymmetrischen Matrizen $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ definieren wir Vektorfelder $V_A, V_B \in \mathfrak{X}(O(n))$ wie in Aufgabe 2 von Blatt 3. Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine Riemannsche Metrik g auf $O(n)$, so dass $g_p(V_A, V_B) = -\mathrm{tr}(AB)$ für alle schiefsymmetrischen Matrizen A, B und alle $p \in O(n)$.

(b) Für den Levi-Civita-Zusammenhang ∇ zur Metrik g gilt $\nabla_{V_A} V_B = \frac{1}{2} V_{AB-BA}$.

Bitte wenden für Präsenzaufgaben für die Tutorate.

4. Präsenzaufgaben
Differentialgeometrie I
im WS 2024/25 bei Prof. Dr. S. Goette

Aufgabe 1

Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Durch $(D_X Y)^\varphi = X^\varphi(Y^\varphi)$ für alle Karten φ einer Mannigfaltigkeit M und alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ wird ein Zusammenhang auf M definiert.

(b) Sei g eine Riemannsche Metrik auf M und $f \in C^\infty(M)$. Dann ist $f \cdot g$ ebenfalls eine Riemannsche Metrik auf M.

(c) Sei ∇ ein Zusammenhang auf M und $f \in C^\infty(M)$. Dann definiert $f \cdot \nabla_X Y$ für $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ebenfalls einen Zusammenhang auf M.

(d) Durch $D_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$ wird ein torsionfreier Zusammenhang auf M definiert.

Aufgabe 2

Es sei (M, g) eine Riemannsche Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ mit der Euklidischen Metrik und $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ Vektorfelder. Betrachten Sie Y als Abbildung

$$M \ni p \mapsto Y(p) \in T_pM \subset T_p\mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^N$$

mit Ableitung $X(Y) : M \to \mathbb{R}^N$, vgl. Bemerkung 1.43. Zeigen Sie:

(a) Es gibt ein eindeutigs Vektorfeld $Z \in \mathfrak{X}(M)$, so dass $\langle X(Y), W\rangle = \langle Z, W\rangle$ für alle $W \in \mathfrak{X}(M)$.

(b) Es gilt $\nabla_X Y = Z$ für den Levi-Civita-Zusammenhang auf M.

Bitte wenden für die Hausaufgaben.