5. ÜBUNGSBLATT
DIFFERENTIALGEOMETRIE I
IM WS 2024/25 BEI PROF. DR. S. GOETTE

Abgabe Montag, den 18.11.24
14 Uhr (also vor der Vorlesung)
in den Briefkasten 3.19

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Abgabe

Aufgabe 1

Es sei $G = SU(2)$ die Lie-Gruppe der speziell-unitären 2×2-Matrizen und $\mathfrak{su}(2) = T_eG = \big\{ A \in M_2(\mathbb{C}) \;\big|\; A + A^* = 0 \text{ und } \operatorname{tr}(A) = 0 \big\}$, dabei bezeichne $\operatorname{tr}(X)$ die Spur der Matrix X. Für alle $A \in \mathfrak{su}(2)$ sei V_A das Vektorfeld aus Aufgabe 2 von Blatt 3. Zeigen Sie:

(a) Jedes Element $g \in SU(2)$ wird durch seine erste Spalte eindeutig bestimmt. Insbesondere gibt es einen Diffeomorphismus $F\colon G \to S^3 \subset \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ mit $F(g) = g \cdot e_1$, wobei $e_1 \in \mathbb{C}^2$ den ersten Einheitsvektor bezeichne;

(b) Es gibt ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf G, so dass $\langle V_A, V_B \rangle_g = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(A^*B)$ für alle $g \in G$;

(c) Der obige Diffeomorphismus F ist eine Riemannsche Isometrie;

(d) Stellen Sie den Riemannschen Krümmungstensor $R_{V_A,V_B}V_C$ mit Hilfe von Aufgabe 4(b) von Blatt 4 dar.

Aufgabe 2

Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und für alle Ebenen $E \subset T_pM$ sei die Schnittkrümmung $K_p(E)$ bekannt. Bestimmen Sie den Krümmungstensor $g\,(R_{v,w}x, y)$ für alle $v, w, x, y \in T_pM$. *Hinweis:* Bestimmen Sie $g\left(R_{e_i,e_j}e_k, e_l\right)$ für eine gegebene Orthonormalbasis $(e_i)_{i=1}^{\dim M}$ zunächst für den Fall $i = l, j = k$, dann für den Fall $j = k$ und dann allgemein.

Aufgabe 3

(a) Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass es eine Orthonormalbasis $(e_i)_{i=1}^{\dim M}$ von T_pM gibt, so dass der Riccitensor bezüglich der Basis (e_i) Diagonalgestalt besitzt, also $\operatorname{ric}(e_i, e_j) = \rho_i\delta_{ij}$.

(b) Bestimmen Sie für eine dreidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit die Koeffizienten $g\left(R_{e_i,e_j}e_k, e_l\right)$ des Riemannschen Krümmungstensors aus den Koeffizienten der Riccikrümmung $\operatorname{ric}(e_i, e_j)$ in der Basis aus a).

Aufgabe 4

Seien M, N zwei glatte Mannigfaltigkeiten mit Atlanten $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Zeigen Sie:

(a) Das kartesische Produkt $M \times N$ trägt eine Topologie, so dass $\left\{\varphi \times \psi : U^\varphi \times U^\psi \to V^\varphi \times V^\psi \mid \varphi \in \mathcal{A}, \psi \in \mathcal{B}\right\}$ einen Atlas bildet.

(b) $T(M \times N)$ und $TM \times TN$ in natürlicher Weise diffeomorph.

Bitte wenden für Präsenzaufgaben für die Tutorate.

5. Präsenzaufgaben
Differentialgeometrie I
im WS 2024/25 bei Prof. Dr. S. Goette

Aufgabe 1

Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Die Lie-Klammer ist ein $(2,0)$-Tensor auf jeder Mannigfaltigkeit.

(b) Auf Matrixgruppen gibt es einen $(2,0)$-Tensor T, so dass $T(V_A, V_B) = [V_A, V_B]$ für alle Vektorfelder V_A, V_B wie in Aufgabe 2 von Blatt 3 gilt.

(c) Sei M eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Dann wird der Krümmungstensor bereits durch die Skalarkrümmung bestimmt.

(d) Es gibt eine C^∞-Kurve $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, deren Bild genau der Rand des Einheitsquadrates $[0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 2

Wir definieren auf $\mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\}$ für $Z \in \mathbb{C}^{n+1}$ und Vektoren $V, W \in T_Z\left(\mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\}\right)$ die Abbildung

$$g_Z(V, W) := \frac{\operatorname{Re}\langle \widetilde{V}, \widetilde{W} \rangle}{\|Z\|^2}$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das komplexe Standardskalarprodukt ist und $\widetilde{V}, \widetilde{W}$ die Projektionen von V bzw. W auf den Unterraum, der zu Z und iZ orthogonal ist.

(a) Zeigen Sie, dass dies eine Riemannsche Metrik $g^{\mathbb{CP}^n}$ auf $\mathbb{CP}^n$ induziert.

(b) Bestimmen Sie die Matrix $g_Z^{\varphi_1}$ in der Karte φ_1 aus Aufgabe 1 von Blatt 3.

Bitte wenden für die Hausaufgaben.