

6. ÜBUNGSBLATT

DIFFERENTIALGEOMETRIE I

IM WS 2024/25 BEI PROF. DR. S. GOETTE

Abgabe Montag, den 25.11.24
14 Uhr (also vor der Vorlesung)
in den Briefkasten 3.19

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre
Abgabe

Aufgabe 1

Betrachten Sie die Kurve $\gamma(t) = (1 - \cos t, 1 - \sin t) \subset (B_1^2(0), g^{\text{hyp}})$ für $t \in (0, \pi/2)$.

- Berechnen Sie die Länge von γ bezüglich der hyperbolischen Metrik aus Beispiel 1.37 und geben Sie eine Parametrisierung an, die γ proportional zur hyperbolischen Bogenlänge parametrisiert.
- Stellen Sie die Geodätengleichung von $(B_1^2(0), g^{\text{hyp}})$ mit Hilfe von Aufgabe 3 von Blatt 4 als gewöhnliche Differentialgleichung in den kartesischen Koordinaten auf.
- Zeigen Sie, dass γ mit der Parametrisierung aus a) eine Geodätische ist.
- Zeigen Sie allgemeiner, dass alle Kreise, die den Rand S^1 des Poincaré-Ballmodells senkrecht schneiden, bei geeigneter Parametrisierung Geodätische im hyperbolischen Raum sind.

Aufgabe 2

Ein Großkreis auf S^2 ist $S^2 \cap E$ für eine Ebene E durch $0 \in \mathbb{R}^3$.

- Sei $c: [0, 2\pi] \rightarrow S^2 \cap E$ nach Bogenlänge parametrisiert. Zeigen Sie: Wenn wir c als Abbildung $c: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ auffassen, gilt $\dot{c}(t) \perp T_{c(t)}S^2$.
- Folgern Sie aus a), dass c eine Geodätische ist.

Aufgabe 3

Es sei ∇ ein beliebiger Zusammenhang auf einer Mannigfaltigkeit M , und es seien $p \in M$, $v \in T_pM$ beliebig. Wir betrachten $\iota_p: T_pM \rightarrow TM$ mit $\iota_p(v) = (p, v) \in TM$ und (vgl. Proposition 1.16) $\pi: TM \rightarrow M$ mit $\pi(p, v) = p$.

- Zeigen Sie, dass die Sequenz $0 \rightarrow \underbrace{T_p T_p M}_{\cong T_p M} \xrightarrow{d_v(\iota_p)} T_{(p,v)} TM \xrightarrow{d_{(p,v)}\pi} T_p M \rightarrow 0$ exakt ist, dass also $d_v(\iota_p)$ injektiv, $d_v\pi$ surjektiv ist, und dass im $d_v(\iota_p) = \ker d_v\pi$ gilt.

- (b) Einer Kurve $\gamma: I \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = p$ soll das Vektorfeld W längs γ zugeordnet werden, welches $W(0) = v$ und $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\gamma W = 0$ erfüllt. Man kann W als Kurve in TM auffassen. Zeigen Sie, dass die Zuordnung $[\gamma] \mapsto [W]$ eine wohldefinierte lineare Abbildung h von T_pM nach T_vTM liefert. Diese erfüllt $d\pi \circ h = id_{T_pM}$.
- (c) Zeigen Sie, dass die Abbildung $[V] \mapsto \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^\gamma V(0), \dot{\gamma}\right)$ für alle Kurven γ in M und alle Vektorfelder V mit $V(0) = v$ längs γ einen Vektorraumisomorphismus zwischen T_vTM und $T_pM \times T_pM$ definiert.

Beachten Sie: Die Abbildungen in b) und c) hängen von der Wahl von ∇ ab.

Aufgabe 4

Es sei $O(n)$ die Matrixgruppe mit der Metrik $g(V_A, V_B) = -\text{tr}(AB)$ aus Aufgabe 4 von Blatt 4. Für $A \in \mathfrak{so}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$ betrachte das Matrixexponential

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n \in M_n(\mathbb{R}).$$

Zeigen Sie:

- (a) Für alle $A \in \mathfrak{so}(n)$ gilt $\exp(A) \in O(n)$.
- (b) Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt
- $$\frac{d}{dt} \exp(tA) = V_A|_{\exp(tA)} \in T_{\exp(tA)}O(n).$$
- (c) Die Kurve $t \mapsto \exp(tA)$ ist eine Geodätische in $O(n)$.
- (d) Alle Kurven der Form $t \mapsto g \cdot \exp(tA)$ mit $g \in O(n)$ und $A \in \mathfrak{so}(n)$ sind Geodätische.

6. PRÄSENZAUFGABEN

DIFFERENTIALGEOMETRIE I

IM WS 2024/25 BEI PROF. DR. S. GOETTE

Aufgabe 1

Es sei X ein Vektorfeld auf M und $\Phi: W \rightarrow M$ mit $W \subset M \times \mathbb{R}$ ein Fluss von X , das heißt $M \times \{0\} \subset W$, und es gilt $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, t) = X_{\Phi(x, t)}$. Beweisen oder widerlegen Sie.

- (a) Wenn $X \in \mathfrak{X}^l(M)$, ist Φ von Klasse C^l .
- (b) Wenn Φ von Klasse C^l ist, ist $X \in \mathfrak{X}^l(M)$.
- (c) Für alle $s, t \in \mathbb{R}$, gilt $\Phi(\Phi(x, t), s) = \Phi(x, t + s)$.

Aufgabe 2

- (a) Geben Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichung mit Anfangswert an:

$$f'(t) = 3 \operatorname{sign}(f(t)) \cdot |f(t)|^{\frac{2}{3}} \quad \text{mit} \quad f(0) = y_0 \in \mathbb{R}$$

- (b) Warum existiert keine stetige Lösung $F: (-1, 1) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ von

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, t) = 3 \operatorname{sign}(F(x, t)) \cdot |F(x, t)|^{\frac{2}{3}} \quad \text{mit} \quad F(s, 0) = s?$$

Hinweis: Betrachten Sie vor allem den Fall $f(0) = 0$.