7. Übungsblatt

Differentialgeometrie I

im WS 2024/25 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Montag, den 2.12.24
14 Uhr (also vor der Vorlesung)
in den Briefkasten 3.19

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Abgabe

Aufgabe 1

Geben Sie eine Formel für Riemannsche Normalkoordinaten $\exp_p^{-1} : U \to V \subset \mathbb{R}^2$ an

(a) auf S^2 für $p = e_3$, und

(b) im Poincaré-Ballmodell $(B_1^2(0), g_{\mathrm{hyp}})$ mit $p = 0$.

Geben Sie eine Formel für g in diesen Koordinaten an.

Hinweis: Sie dürfen Aufgaben 1 und 2 von Blatt 6 verwenden.

Aufgabe 2

Es sei (M, g) eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung K und $c\colon [a, b] \to M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische auf M.

(a) Es sei $(e_1, \dots, e_n)$ eine Orthonormalbasis von $T_{c(0)}M$ mit $e_1 = \dot{c}(0)$. Zeigen Sie: Es gibt Vektorfelder $e_i \in \mathfrak{X}(c)$ mit $e_i(0) = e_i$ und $\nabla^c_{\frac{\partial}{\partial t}} e_i = 0$. Diese Vektorfelder heißen “parallel längs c”.

(b) Für alle $t \in [a, b]$ gilt $g_{c(t)}(e_i(t), e_j(t)) = \delta_{ij}$.

(c) Es sei $Y(t) = \sum_{i=1}^n y^i(t) e_i(t) \in \mathfrak{X}(c)$. Übersetzen Sie die Jacobi-Differentialgleichungen in ein Differentialgleichungssystem in den y^i.

(d) Finden Sie Lösungen der Jacobi-Differentialgleichung mit $y^i(0) = 0$ für alle i, und $\dot{y}^i(0)$ beliebig.

Aufgabe 3

Es sei $V = \frac{\partial \bar{c}}{\partial s}$ das Jacobifeld zu der geodätischen Variation

$$\bar{c}\colon (s, t) \mapsto \exp_p\left(t(v + sw)\right), \quad v, w \in T_pM$$

der Geodätischen c.

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Näherung gilt:

$$\langle V(t), V(t)\rangle = |w|^2 t^2 - \frac{1}{3}\langle R_{w,\dot{c}}\dot{c}, w\rangle t^4 + O(t^5).$$

(b) Bestimmen Sie damit die zweiten Ableitungen der Metrik in Normalkoordinaten im Nullpunkt.

Aufgabe 4

Wir betrachten auf dem $\mathbb{R}^n$ die Funktionen

$$g_{jk}(x) = \delta_{jk} - \frac{1}{3} \sum_{i,l} T_{ijkl} x^i x^l,$$

mit $T_{ijkl} = T_{ikjl} \in \mathbb{R}$ und $i, j, k, l = 1, \ldots, n$. Die x^k seien die k-ten Koordinatenfunktionen des $\mathbb{R}^n$.

(a) Warum liefern die g_{jk} in einer Umgebung um die 0 die Komponenten einer Riemannschen Metrik?

(b) Bestimmen Sie die Christoffelsymbole Γ_{ij}^k und die Komponenten des Krümmungstensors R im Punkt 0.

(c) Zeigen Sie: Genau dann, wenn T_{ijkl} die Symmetrien des Krümmungstensors erfüllt, gilt am Punkt 0, dass $T_{ijkl} = \langle R_{e_i, e_j} e_k, e_l \rangle$.

Bitte wenden für Präsenzaufgaben für die Tutorate.

7. Präsenzaufgaben
Differentialgeometrie I
im WS 2024/25 bei Prof. Dr. S. Goette

Aufgabe 1

Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Es sei (M, g) eine vollständige Riemannssche Mannigfaltigkeit. Dann existiert $C > 0$, so dass der Injektivitätsradius $\rho(p)$ in jedem Punkt p mindestens C beträgt.

(b) Für alle $p \in M$ und alle $u, v, w \in T_pM$ gilt $g_{\exp_p(u)}(d_u \exp_p(v), d_u \exp_p(w)) = g_p(v, w)$.

Aufgabe 2

Es sei (M, g) eine Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung K. Zeigen Sie, dass $R_{u,v}w = K(g(v, w)u - g(u, w)v)$.

Bitte wenden für die Hausaufgaben.