8. ÜBUNGSBLATT
DIFFERENTIALGEOMETRIE I
IM WS 2024/25 BEI PROF. DR. S. GOETTE

Abgabe Montag, den 9.12.24
14 Uhr (also vor der Vorlesung)
in den Briefkasten 3.19

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Abgabe

Aufgabe 1

Wir nennen eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) symmetrisch, wenn es für jeden Punkt $p \in M$ eine Isometrie $I_p \colon M \to M$ mit $I_p(p) = p$ und $D_p I_p = -\operatorname{id}_{T_pM}$ gibt.

(a) Zeigen Sie: Sei $v \in T_pM$ so, dass $\exp_p v = q$ existiert. Betrachten Sie $\gamma \colon [-1, 1] \to M$ mit $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ und zeigen Sie, dass γ eine Geodätische von $I_p(q)$ nach q ist mit $\gamma(-t) = I_p(\gamma(t))$.

(b) Benutzen Sie a) für (p, q) sowie (q, p), um zu zeigen, dass sich γ als Geodätische auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen lässt.

(c) Folgern Sie, dass symmetrische Räume vollständig sind.

(d) Zeigen Sie, dass es zu zwei beliebigen Punkten $p, q \in M$ immer eine Riemannsche Isometrie $\Phi \colon M \to M$ mit $\Phi(p) = q$ gibt.

Aufgabe 2

Zeigen Sie die Vollständigkeit von zwei der drei folgenden Riemannschen Mannigfaltigkeiten:

(a) des euklidischen Raums $(\mathbb{R}^n, g^{\mathrm{eukl}})$,

(b) der Sphäre (S^n, g^{sph}) und

(c) des hyperbolischen Raums (H^n, g^{hyp}).

Aufgabe 3

Sei M eine C^k-Mannigfaltigkeit und $X \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$ mit $k \geq 2$.

(a) Beweisen Sie die Existenz einer Teilmenge $V \subset M \times \mathbb{R}$ und einer Abbildung $\Phi_X \in C^{k-1}(V; M)$ mit $(p, t) \mapsto \Phi_X^t(p)$ für alle $(p, t) \in V$, so dass

  (i) Für alle $p \in M$ ist $\{t \mid (p, t) \in V\}$ ein Intervall I_p mit $0 \in I_p$ und es gilt $\Phi_X^0(p) = p$ für alle $p \in M$,

  (ii) $\frac{\partial}{\partial t} \Phi_X^t(p) = X_{\Phi_X^t(p)}$ für alle $(p, t) \in V$, und

(iii) wenn $W \subset M \times \mathbb{R}$ und $\Psi\colon W \to M$ ebenfalls (i) und (ii) erfüllen, dann gilt $W \subset V$ und $\Psi = \Phi_X|_W$.

(b) Zeigen Sie: Wenn $(p, s) \in V$ und $(\Phi_X^s(p), t) \in V$, dann auch $(p, s+t) \in V$ und $\Phi_X^t(\Phi_X^s(p)) = \Phi_X^{s+t}(p)$.

Hinweis: Benutzen Sie die Eindeutigkeitsaussage im Satz von Picard-Lindelöf.

Aufgabe 4

Seien M, X wie in Aufgabe 3. Zeigen Sie: Wenn M kompakt ist, gilt $V = M \times \mathbb{R}$.
Hinweis: Argumentieren Sie wie in Bemerkung 1.74 (2).

Bitte wenden für Präsenzaufgaben für die Tutorate.

8. Präsenzaufgaben
Differentialgeometrie I
im WS 2024/25 bei Prof. Dr. S. Goette

Aufgabe 1

Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\gamma\colon [a, c] \to M$ eine Geodätische. Es sei $b \in [a, c]$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Wenn $\gamma|_{[a,b]}$ und $\gamma|_{[b,c]}$ kürzeste Verbindungen ihrer Endpunkte sind, dann gilt das auch für γ.

(b) Wenn γ kürzeste Verbindung ihrer Endpunkte ist, dann sind auch $\gamma|_{[a,b]}$ und $\gamma|_{[b,c]}$ kürzeste Verbindungen ihrer Endpunkte.

Aufgabe 2

Seien M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p, q \in M$ und $\gamma\colon [a, b] \to M$ eine (nicht notwendig reguläre oder injektive) Kurve mit $\gamma(a) = p$ und $\gamma(b) = q$ sowie $L(\gamma) = d(p, q)$. Zeigen Sie, dass dann eine Geodätische c und eine monoton steigende Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ existieren, so dass $\gamma(t) = c(f(t))$.

Bitte wenden für die Hausaufgaben.