9. Übungsblatt
Differentialgeometrie I
im WS 2024/25 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Montag, den 16.12.24
14 Uhr (also vor der Vorlesung)
in den Briefkasten 3.19

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Abgabe

Aufgabe 1

Sei M eine vollständige, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie: Wenn es einen Punkt $p \in M$ gibt, so dass es entlang jeder Geodätischen durch p einen zu p konjugierten Punkt gibt, dann ist M kompakt.

Aufgabe 2

Sei (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und q im Schnittort von p. Zeigen Sie: Der Punkt q ist längs der kürzesten Geodätischen zu p konjugiert oder es gibt zwei Kürzeste von p nach q. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Sei γ eine kürzeste Geodätische mit $\gamma(0) = p$, $\gamma(t_0) = q$. Betrachten Sie kürzeste Geodätische γ_i von p nach $\gamma(t_0 + \epsilon_i)$ für eine positive Nullfolge ϵ_i. Zeigen Sie, dass die Geodätische c_v mit $c_v(0) = p$ und $v = \dot{c}_v(0)$ Häufungspunkt von $\dot{\gamma}_i(0)$ Kürzeste von p nach q ist. Im Fall $c_v \neq \gamma$ gibt es zwei Kürzeste von p nach q.

(b) Zeigen Sie im Fall $c_v = \gamma$, dass $d\exp_p$ am Punkt $t_0 v$ nicht regulär sein kann. Konstruieren Sie daraus ein Jacobifeld V entlang γ mit $V(0) = 0 = V(t_0)$. In diesem Fall ist also q längs γ zu p konjugiert.

Aufgabe 3

Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir definieren $\nabla R \colon \mathfrak{X}(M)^4 \to \mathfrak{X}(M)$ für X, Y, Z, $W \in \mathfrak{X}(M)$ durch

$$(\nabla_X R)_{Y,Z} W = \nabla_X (R_{Y,Z} W) - R_{\nabla_X Y, Z} W - R_{Y, \nabla_X Z} W - R_{Y,Z} \nabla_X W \ .$$

Zeigen Sie:

(a) ∇R ist ein $(4, 1)$-Tensor.

(b) Für alle X, Y, Z, $W \in \mathfrak{X}(M)$ gilt

$$(\nabla_X R)_{Y,Z} W + (\nabla_Y R)_{Z,X} W + (\nabla_Z R)_{X,Y} W = 0 \ .$$

Zusatzfrage: Welche Eigenschaften von ∇ und R haben Sie im Beweis benutzt?

Aufgabe 4

Es sei (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\nabla R = 0$. Zeigen Sie, dass es zu jedem Punkt $p \in M$ einen Radius $r > 0$ und eine Isometrie $I_p \colon B_r(p) \to B_r(p)$ mit $I_p(p) = p$ und $D_p I_p = -\mathrm{id}_{T_p M}$ gibt.

Hinweis: Schreiben Sie dazu die Jacobifeld-Gleichung in einer Basis aus parallelen Vektorfeldern längs Geodätischer durch p.

Bitte wenden für Präsenzaufgaben für die Tutorate.

9. Präsenzaufgaben
Differentialgeometrie I
im WS 2024/25 bei Prof. Dr. S. Goette

Aufgabe 1

Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Der konjugierte Radius einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit ist immer kleiner oder gleich als der Durchmesser.

(b) Der konjugierte Radius einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit ist immer größer oder gleich als der Durchmesser.

Aufgabe 2

Es sei $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ der reell projektive Raum von Blatt 1 und $\pi : S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ durch $p \mapsto [p]$ gegeben.

(a) Zeigen Sie: Es gibt eine Riemannsche Metrik g auf $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, so dass $d_p\pi : T_pS^n \to T_{[p]}\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ für alle $p \in S^n$ eine lineare Isometrie ist.

(b) Beweisen Sie: Sei $c : \mathbb{R} \to S^n$ Geodätische, dann ist auch $\pi \circ c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ Geodätische, und alle Geodätischen auf $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ haben diese Form.

(c) Bestimmen Sie für $p = [e_1] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ den Schnittort und den konjugierten Ort.

Bitte wenden für die Hausaufgaben.