

# Differentialgeometrie I

—

WS 24/25

Sebastian Goette

Die Differentialgeometrie ist Geometrie mit Methoden der Analysis. Man erweitert den Begriff der Differenzierbarkeit auf Mannigfaltigkeiten. In der Riemannschen Geometrie tragen Mannigfaltigkeiten zusätzlich Riemannsche Metriken. Für diese Riemannschen Mannigfaltigkeiten existieren verschiedene Krümmungsgrößen. Weiterhin lassen sich Geodätische (lokal kürzeste Verbindungskurven zwischen zwei Punkten) durch eine bestimmte Differentialgleichung zweiter Ordnung beschreiben. Dies führt zu Fragestellungen nach Zusammenhängen zwischen Topologie der Mannigfaltigkeit, Krümmung und dem globalen Verhalten von Geodätischen. Ziel der Vorlesung ist es, die oben genannten Begriffe einzuführen, und ein paar dieser Zusammenhänge herauszuarbeiten.

In der Vorlesung werden wir die beiden folgenden Themengebiete behandeln.

- (1) **Riemannsche Mannigfaltigkeiten.** Wir definieren den Begriff der Riemannschen Mannigfaltigkeit, und lernen verschiedene Krümmungsbegriffe kennen. Außerdem betrachten wir Überlagerungen und die Fundamentalgruppe. Danach erinnern wir uns an die Bogenlänge von Kurven auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten und betrachten Variationsformeln für die Bogenlänge. Dabei sehen wir, dass kürzeste Kurven zwischen zwei Punkten einer bestimmten Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen. Das führt uns auf den Begriff der Geodätischen. Im Rest der Vorlesung betrachten wir das globale Verhalten von Geodätischen auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Zunächst benutzen wir Geodätische, um Normalkoordinaten und Exponentialabbildung einzuführen. Die Frage, ob Geodätische global existieren, führt auf den Begriff der geodätischen Vollständigkeit.
- (2) **Vergleichssätze.** Das globale Verhalten von Geodätischen auf einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit wird von ihrer Krümmung bestimmt. Wir werden sehen, dass Mannigfaltigkeiten nichtpositiver Schnittkrümmung sphärisch sind, d.h., eine universelle Überlagerung besitzen, die diffeomorph zum  $\mathbb{R}^n$  ist. Auf der anderen Seite haben vollständige Mannigfaltigkeiten, deren Ricci-Krümmung größer als eine positive Konstante ist, stets beschränkten Durchmesser und endliche Fundamentalgruppe. Danach setzen wir das Volumenwachstum geodätischer Bälle in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit in Beziehung zu ihrer Ricci-Krümmung. Zum Schluss beweisen wir einige Ungleichungen für geodätische Dreiecke in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit.

## Riemannsche Mannigfaltigkeiten

In diesem Kapitel führen wir zunächst die grundlegenden Definitionen differenzierbarer und Riemannscher Mannigfaltigkeiten ein. Anschließend lernen wir die zwei Variationsformeln für die Bogenlänge und Geodätische kennen. Die geodätische Exponentialabbildung liefert uns nicht nur geodätische Normalkoordinaten, sondern auch den Begriff der geodätischen Vollständigkeit. Am Ende dieses Kapitels geben wir noch einen Überblick über die Fundamentalgruppe und Überlagerungen von Mannigfaltigkeiten.

### 1.1. Mannigfaltigkeiten

DEFINITION. Eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt  $m$ -dimensionale  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ , wenn es zu jedem Punkt  $x \in M$  eine Umgebung  $U$  von  $x$ , eine offene Teilmenge  $V \subset \mathbb{R}^m$  und einen  $C^k$ -Diffeomorphismus  $\varphi: U \rightarrow V$  mit

$$U \cap M = \varphi^{-1}(V \cap (\mathbb{R}^m \times \{o\}))$$

gibt.  $\varphi$  heißt Karte von  $M$ .

BEISPIEL.  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ist  $n$ -dimensionale  $C^\infty$  Untermannigfaltigkeit. Eine große Klasse von Untermannigfaltigkeiten liefert der Satz vom regulären Wert. Hierbei heißt  $y \in \mathbb{R}^m$  regulärer Wert von  $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $U$  offen), falls  $Df(x) = f'(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  surjektiv ist für alle  $x \in f^{-1}(\{y\})$ .

SATZ. Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $k \geq 1$  und  $y_0 \in \mathbb{R}^m$  ein regulärer Wert von  $f \in C^k(U, \mathbb{R}^m)$ . Dann ist  $f^{-1}(\{y_0\})$  eine  $(n - m)$  dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ .

1.1. BEISPIEL.  $GL(n, \mathbb{R})$ ,  $SL(n, \mathbb{R})$ ,  $O(n)$  und  $SO(n)$  sind  $C^\infty$  Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^{n^2}$ .

Wir ersetzen jetzt den Begriff der Untermannigfaltigkeit durch einen abstrakteren.

1.2. DEFINITION. Eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist ein Hausdorff-Raum  $M$  mit abzählbarer Basis, so dass jeder Punkt  $p \in M$  eine offene Umgebung  $U \subset M$  besitzt, die zu einer offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  homöomorph ist.

1.3. BEMERKUNG. Es folgen einige weitere Definitionen und Eigenschaften:

- (1) Ein *Hausdorff-Raum* ist ein topologischer Raum, in dem je zwei verschiedene Punkte disjunkte offene Umgebungen besitzen.
- (2) Eine *abzählbare Basis* eines topologischen Raumes  $X$  ist eine abzählbare Menge  $\mathcal{B}$  offener Teilmengen von  $X$ , so dass jede offene Menge als Vereinigung von Mengen  $U \in \mathcal{B}$  geschrieben werden kann.
- (3) Ein Homöomorphismus  $\varphi: X \rightarrow Y$  von topologischen Räumen ist eine stetige Abbildung, für die eine stetige Umkehrabbildung existiert.
- (4) Eine ( $n$ -dimensionale) *Karte* von  $M$  ist ein Homöomorphismus  $\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi$ , wobei  $U^\varphi \subset M$  und  $V^\varphi \subset \mathbb{R}^n$  offen seien. Eine *Karte* um  $p \in M$  ist eine Karte  $\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi$  mit  $p \in U^\varphi$ .
- (5) Ein ( $n$ -dimensionaler) *Atlas* von  $M$  ist eine Menge  $\mathcal{A}$  von Karten von  $M$ , so dass die Definitionsbereiche der Karten ganz  $M$  überdecken. Eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit

ist somit ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis, der einen  $n$ -dimensionalen Atlas besitzt.

- (6) Aus der „Invarianz des Gebietes“ folgt, dass die Dimension eine Invariante ist. Wenn ein topologischer Raum einen  $m$ - und einen  $n$ -dimensionalen Atlas besitzt, gilt also  $m = n$ .
- (7) Seien schließlich  $\varphi, \psi$  Karten in einem Atlas  $\mathcal{A}$ , dann heißt die Abbildung

$$\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U^\varphi \cap U^\psi) \rightarrow \psi(U^\varphi \cap U^\psi)$$

ein *Kartenwechsel* im Atlas  $\mathcal{A}$ . Man beachte, dass  $\psi \circ \varphi^{-1}$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  auf eine andere homöomorph abbildet. Man kann also fragen, ob der Kartenwechsel  $\psi \circ \varphi^{-1}$  ein  $\mathcal{C}^k$ -Diffeomorphismus ist.

- (8) Aus dem lokalen Umkehrsatz folgt, dass eine  $\mathcal{C}^k$ -Abbildung zwischen offenen Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ , die eine  $\mathcal{C}^1$ -Umkehrabbildung besitzt, bereits ein  $\mathcal{C}^k$ -Diffeomorphismus ist.

1.4. DEFINITION. Sei  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , und sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Ein  $\mathcal{C}^k$ -Atlas auf  $M$  ist ein Atlas  $\mathcal{A}$  auf  $M$ , dessen Kartenwechsel  $\psi \circ \varphi^{-1}$  jeweils  $\mathcal{C}^k$ -Diffeomorphismen sind für alle  $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$ .

Ein  $\mathcal{C}^k$ -Atlas heißt *maximal*, wenn er in keinem anderen  $\mathcal{C}^k$ -Atlas echt enthalten ist.

Eine  $n$ -dimensionale  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit ist ein Paar aus einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  und einem maximalen  $\mathcal{C}^k$ -Atlas von  $M$ . Eine  $\mathcal{C}^\infty$ -Mannigfaltigkeit heißt auch *differenzierbare Mannigfaltigkeit*.

1.5. BEMERKUNG. Man kann leicht zeigen, dass jeder  $\mathcal{C}^k$ -Atlas  $\mathcal{A}$  von  $M$  in genau einem maximalen  $\mathcal{C}^k$ -Atlas enthalten ist, nämlich in

$$\{ \psi: U^\psi \rightarrow V^\psi \text{ Karte von } M \mid \psi \circ \varphi^{-1} \text{ ist } \mathcal{C}^k\text{-Diffeomorphismus für alle } \varphi \in \mathcal{A} \} .$$

Es reicht also, einen beliebigen  $\mathcal{C}^k$ -Atlas auf  $M$  anzugeben. In der Praxis möchte man oft so wenig Karten wie nötig benutzen.

In diesem Sinne liefern zwei  $\mathcal{C}^k$ -Atlanten  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{A}'$  von  $M$  die gleiche  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit, wenn sie in dem gleichen maximalen Atlas enthalten sind. Das gilt genau dann, wenn die Kartenwechsel  $\psi \circ \varphi^{-1}$  für alle  $\varphi \in \mathcal{A}$  und  $\psi \in \mathcal{A}'$  jeweils  $\mathcal{C}^k$ -Diffeomorphismen sind.

1.6. BEISPIEL. (1)  $\mathbb{R}^n$  ist  $n$ -dimensionale  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit für alle  $k$  mit Atlas  $\{\text{id}_{\mathbb{R}^n}\}$ .

Genauso ist jede offene Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit mit Atlas  $\{\text{id}_U\}$ .

- (2) Die  $n$ -dimensionale Kugel  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$  ist eine  $n$ -dimensionale  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit für alle  $k$ . Die stereographischen Projektionen an den Punkten  $\pm e_{n+1}$  bilden einen Atlas  $\{\varphi_+, \varphi_-\}$  mit

$$\varphi_\pm: S^n \setminus \{\pm e_{n+1}\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{1 \mp x_{n+1}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} .$$

Die Umkehrabbildungen werden gegeben durch

$$\varphi_\pm^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{1}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1} \begin{pmatrix} 2y_1 \\ \vdots \\ 2y_n \\ \pm y_1^2 \pm \dots \pm y_n^2 \mp 1 \end{pmatrix},$$

also erhalten wir als Kartenwechsel zum Beispiel

$$\varphi_- \circ \varphi_+^{-1}: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{y_1^2 + \dots + y_n^2} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} .$$

Es ist jetzt leicht zu sehen, dass dieser und alle anderen Kartenwechsel  $\mathcal{C}^\infty$ -Diffeomorphismen sind.

- 1.7. BEMERKUNG. (1) Sei  $0 \leq l \leq k$ , und sei  $(M, \mathcal{A})$  eine  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit, dann ist  $M$  trivialerweise auch eine  $\mathcal{C}^l$ -Mannigfaltigkeit, wobei der maximale  $\mathcal{C}^k$ -Atlas automatisch zu einem (im allgemeinen nicht maximalen)  $\mathcal{C}^l$ -Atlas wird.
- (2) Die Umkehrung ist nicht trivial: sei  $1 \leq l \leq k$ , und sei  $(M, \mathcal{A})$  ein  $\mathcal{C}^l$ -Mannigfaltigkeit. Nach einem Resultat von Whitney enthält  $\mathcal{A}$  einen  $\mathcal{C}^k$ -Atlas, ja sogar einen Atlas mit reell analytischen Kartenwechseln, siehe [GKM], §1.1.1. Wir werden solche reell analytischen Mannigfaltigkeiten jedoch nicht weiter betrachten, da  $\mathcal{C}^\infty$ -Mannigfaltigkeiten für alle folgenden Konstruktionen genau das richtige Maß an Flexibilität bieten.
- (3) Nicht jede topologische (also  $\mathcal{C}^0$ -)Mannigfaltigkeit  $M$  trägt einen  $\mathcal{C}^k$ -Atlas mit  $k \geq 1$ , und wenn doch, kann es verschiedene, nicht diffeomorphe  $\mathcal{C}^k$ -Strukturen auf  $M$  geben, beispielsweise 28 verschiedene solche Strukturen auf  $S^7$ , oder überabzählbar viele auf  $\mathbb{R}^4$ .

Wir wollen auch Untermannigfaltigkeiten betrachten.

1.8. DEFINITION. Sei  $(N, \mathcal{A})$  eine  $n$ -dimensionale  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit. Eine  $m$ -dimensionale  $\mathcal{C}^k$ -Untermannigfaltigkeit von  $N$  ist eine Teilmenge  $M \subset N$ , so dass zu jedem  $p \in M$  eine Karte  $\varphi \in \mathcal{A}$  mit

$$\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi \subset \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad M \cap U^\varphi = \varphi^{-1}(V^\varphi \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}))$$

existiert. Eine solche Karte  $\varphi$  heißt *Untermannigfaltigkeitskarte* von  $M$  in  $N$ .

- 1.9. BEMERKUNG. (1) Jede  $\mathcal{C}^k$ -Untermannigfaltigkeit  $M$  von  $N$  ist selbst eine  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit. Dazu versehen wir  $M$  zunächst mit der Unterraumtopologie, dann erbt  $M$  die Hausdorff-Eigenschaft und eine abzählbare Basis von  $N$ . Als  $\mathcal{C}^k$ -Atlas wählen wir

$$\{ \varphi|_{U^\varphi \cap M}: U^\varphi \cap M \rightarrow V^\varphi \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^m \mid \varphi \text{ ist Untermannigfaltigkeitskarte} \} .$$

- (2) Insbesondere ist jede  $\mathcal{C}^k$ -Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  eine  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit. Die Umkehrung ist ein weiterer **Satz von Whitney**: *jede  $m$ -dimensionale  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit  $M$  ist diffeomorph zu einer Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$* . Dabei kann  $n = 2m + 1$  gewählt werden (sogar  $n = 2m$ , falls  $M$  kompakt ist), siehe [GKM], §1.1.6.

1.10. DEFINITION. Seien  $(M, \mathcal{A})$ ,  $(N, \mathcal{A}')$  zwei  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung  $F: M \rightarrow N$  heißt  $\mathcal{C}^k$ -differenzierbar, wenn sie stetig ist und die Abbildungen

$$F^{\varphi, \psi} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U^\varphi \cap F^{-1}U^\psi)}: \varphi(U^\varphi \cap F^{-1}U^\psi) \rightarrow V^\psi$$

für alle Karten  $\varphi \in \mathcal{A}$  und  $\psi \in \mathcal{A}'$  von der Klasse  $\mathcal{C}^k$  ist. Sie heißt  $\mathcal{C}^k$ -Diffeomorphismus, falls die Umkehrabbildung existiert und ebenfalls  $\mathcal{C}^k$ -differenzierbar ist.

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall, dann heißt eine  $\mathcal{C}^k$ -differenzierbare Abbildung  $\gamma: I \rightarrow M$  auch eine  $\mathcal{C}^k$ -Kurve in  $M$ . Eine  $\mathcal{C}^k$ -differenzierbare Abbildung  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt auch eine  $\mathcal{C}^k$ -Funktion auf  $M$ .

In Zukunft werden wir statt  $(M, \mathcal{A})$  einfach nur noch  $M$  schreiben. Wir schreiben  $\mathcal{C}^k(M, N)$  für die Menge der  $\mathcal{C}^k$ -differenzierbaren Abbildungen von  $M$  nach  $N$ , und  $\mathcal{C}^k(M) = \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R})$  für den Vektorraum der  $\mathcal{C}^k$ -differenzierbaren Funktionen auf  $M$ .

1.11. BEMERKUNG. Die  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeiten bilden die Objekte einer Kategorie, deren Morphismen von  $M$  nach  $N$  gerade durch  $\mathcal{C}^k(M, N)$  gegeben sind.

Der Raum  $\mathcal{C}^k(M)$  trägt eine Algebren-Struktur, gegeben durch punktweise Multiplikation von Funktionen,

$$(f \cdot g)(p) = f(p) \cdot g(p) .$$

1.12. BEISPIEL. Für späteren Gebrauch konstruieren wir sogenannte „Abschneidefunktionen“, die nahe eines festen Punktes  $p \in M$  konstant 1 sind und außerhalb einer etwas größeren Umgebung von  $M$  verschwinden.

Betrachte dazu zunächst  $\vartheta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  mit

$$\vartheta(r) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{r}} & \text{für } r > 0, \text{ und} \\ 0 & \text{für } r \leq 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist beliebig oft differenzierbar, und es gilt

$$\vartheta(r) > 0 \iff r > 0.$$

Sei jetzt  $p \in M$ , und sei  $\varphi$  Karte um  $p$ , o.B.d.A. mit  $\varphi(p) = 0$ . Wähle  $0 < a < b$  so, dass  $\overline{B_b(0)} \subset V^\varphi$ , wobei

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| < r\}.$$

Der Überblick bezeichnet den topologischen Abschluss, also  $\overline{B_b(0)} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y| \leq b\}$ . Dann definiere eine Abschneidefunktion  $\rho \in \mathcal{C}^\infty(M)$  durch

$$\rho(q) = \begin{cases} \frac{\vartheta(b - |\varphi(q)|)}{\vartheta(b - |\varphi(q)|) + \vartheta(|\varphi(q)| - a)} & \text{für } q \in U^\varphi, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es folgt

$$\rho|_{\varphi^{-1}\overline{B_a(0)}} \equiv 1 \quad \text{und} \quad \rho|_{M \setminus \varphi^{-1}\overline{B_b(0)}} \equiv 0.$$

Insbesondere ist der Träger von  $\rho$  gerade

$$\text{supp}(\rho) := \overline{\{q \in M \mid \rho(q) \neq 0\}} = \varphi^{-1}\overline{B_b(0)}.$$

Als nächstes definieren wir das Tangentialbündel. Zunächst wollen wir Tangentialvektoren auf drei verschiedene Arten darstellen und uns überlegen, dass wir jedesmal die gleichen Objekte erhalten. Eine beliebige Karte  $\varphi$  schreiben wir als

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \vdots \\ \varphi^n \end{pmatrix} : U^\varphi \rightarrow V^\varphi \subset \mathbb{R}^n,$$

dann heißen die Funktionen  $\varphi^i : U^\varphi \rightarrow \mathbb{R}$  die *Koordinatenfunktionen* von  $\varphi$ .

1.13. DEFINITION. Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit mit  $k \geq 1$ , und sei  $p \in M$ .

(1) Ein *algebraischer Tangentialvektor* in  $p$  ist eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $\partial : \mathcal{C}^k(M) \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\partial(f \cdot g) = \partial f \cdot g(p) + f(p) \cdot \partial g \quad \text{für alle } f, g \in \mathcal{C}^k(M).$$

(2) Ein *physikalischer Tangentialvektor*  $(v_\varphi)_\varphi$  in  $p$  ordnet jeder Karte  $\varphi$  von  $M$  um  $p$  einen Vektor  $v_\varphi \in \mathbb{R}^n$  zu, so dass

$$v_\psi^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\psi^i \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} v_\varphi^j$$

für alle Karten  $\varphi, \psi$  um  $p$  und alle  $i = 1, \dots, n$  gilt.

(3) Ein *geometrischer Tangentialvektor* in  $p$  ist eine Äquivalenzklasse von Kurven  $\gamma : I \rightarrow M$  mit  $0 \in I \subset \mathbb{R}$  und  $\gamma(0) = p$  unter der Äquivalenzrelation

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff (\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$$

für eine Karte  $\varphi$  von  $M$  um  $p$ .

In (3) ist es egal, welche Karte  $\varphi$  wir wählen, denn  $\gamma_1 \sim \gamma_2$  gilt für eine bestimmte Karte  $\varphi$  genau dann, wenn es für alle Karten um  $p$  gilt.

Die algebraische Definition ist sowohl die eleganteste als auch die am schwierigsten zu verstehende.

1.14. PROPOSITION. *Sei  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit, sei  $p \in M$ , und sei  $\varphi$  eine Karte um  $p$ . Eine Abbildung  $\partial: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann ein algebraischer Tangentialvektor in  $p$ , wenn es einen Vektor  $V \in \mathbb{R}^n$  gibt, so dass*

$$\partial f = V_{\varphi(p)}(f \circ \varphi^{-1}) = d_{\varphi(p)}(f \circ \varphi^{-1})(V).$$

Man beachte, dass diese Proposition falsch ist für  $C^k$ -Mannigfaltigkeiten mit  $k < \infty$  ([GKM], §1.1.3).

BEWEIS. „ $\Leftarrow$ “ ist klar.

Zu „ $\Rightarrow$ “ zunächst ein paar Vorüberlegungen. Aus der Produktregel folgt für die konstante Funktion 1, dass

$$\partial 1 = \partial(1 \cdot 1) = \partial 1 \cdot 1 + 1 \cdot \partial 1 = 2 \partial 1 \implies \partial 1 = 0.$$

Wegen  $\mathbb{R}$ -Linearität folgt für die konstante Funktion  $p \mapsto r \in \mathbb{R}$ , dass

$$\partial r = r \cdot \partial 1 = 0. \quad (1.1)$$

Sei nun  $f$  beliebig, und sei  $\varphi$  Karte um  $p$ . O.B.d.A. gelte  $\varphi(p) = 0$  und  $B_1(0) \subset V^\varphi$ . Dann konstruieren wir zwei Abschneidefunktionen  $\rho_1, \rho_2 \in C^\infty(M)$  wie in Beispiel 1.12 mit

$$\begin{aligned} \rho_1|_{\varphi^{-1}B_{\frac{1}{4}}(0)} &\equiv 1, & \text{supp } \rho_1 &= \overline{\varphi^{-1}B_{\frac{1}{2}}(0)}, \\ \rho_2|_{\varphi^{-1}B_{\frac{1}{2}}(0)} &\equiv 1 & \text{und} & \text{supp } \rho_2 &= \overline{\varphi^{-1}B_{\frac{3}{4}}(0)}. \end{aligned}$$

Es folgt, dass  $\rho_1 = \rho_1 \cdot \rho_2$ , also

$$\partial \rho_1 = \partial(\rho_1 \cdot \rho_2) = \partial \rho_1 \cdot \rho_2(p) + \rho_1(p) \cdot \partial \rho_2 = \partial \rho_1 + \partial \rho_2 \implies \partial \rho_2 = 0.$$

Da wir zu jeder Abschneidefunktion  $\rho_2$  um  $p$  wie in Beispiel 1.12 eine Abschneidefunktion  $\rho_1$  um  $p$  mit  $\rho_2|_{\text{supp}(\rho_1)} = 1$  finden können, gilt  $\partial \rho = 0$  für jede Abschneidefunktion  $\rho$  um  $p$  und jeden algebraischen Tangentialvektor  $\partial$  im Punkt  $p$ .

Insbesondere gilt

$$\partial(\rho \cdot f) = \rho(p) \cdot \partial f + \partial \rho \cdot f(p) = \partial f. \quad (1.2)$$

Also hängt  $\partial f$  nur von dem Verhalten von  $f$  in einer kleinen Umgebung von  $p$  ab.

Sei jetzt  $\varphi$  eine Karte um  $p$  mit  $\varphi(p) = 0$ , und sei  $\rho$  eine Abschneidefunktion mit  $\text{supp}(\rho) \subset U^\varphi$ . Wir definieren Funktionen  $f_i: M \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\text{supp } f_i \subset U^\varphi$ ,

$$f_i(q) = \rho(q) \cdot \begin{cases} \frac{(f \circ \varphi^{-1})(0, \dots, 0, y^i, \dots, y^n) - (f \circ \varphi^{-1})(0, \dots, 0, y^{i+1}, \dots, y^n)}{y^i} & \text{falls } y^i \neq 0, \text{ und} \\ \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial y^i}(0, \dots, 0, y^{i+1}, \dots, y^n) & \text{für } y^i = 0. \end{cases}$$

für alle  $q \in U^\varphi$  und  $y = \varphi(q) \in V^\varphi$ . Insbesondere gilt

$$f_i(p) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})(x)}{\partial x^i} \Big|_{x=0}. \quad (1.3)$$

Man überzeugt sich leicht, dass  $f_i$  von der Klasse  $C^\infty$  ist (wäre  $f \in C^k(M)$ , so wäre im allgemeinen  $f_i \in C^{k-1}(M)$ , und der Beweis bräche hier zusammen). Aus  $y^i = \varphi^i(q)$  folgt

$$\rho \cdot f = f(p) \cdot \rho + \sum_{i=1}^n \varphi^i \cdot f_i$$

auf ganz  $U^\varphi$ .

Wir setzen die Funktionen  $\rho\varphi^i: U^\varphi \rightarrow \mathbb{R}$  auf ganz  $M$  fort. Aus (1.1), (1.2) und (1.3) erhalten wir jetzt

$$\begin{aligned} \partial f &= \partial(\rho^2 \cdot f) = f(p) \cdot \partial\rho^2 + \sum_{i=1}^n \partial((\rho\varphi^i) \cdot f_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \partial(\rho\varphi^i) \cdot f_i(p) + \underbrace{(\rho\varphi^i)(p)}_{=0} \cdot \partial f_i \right) = \sum_{i=1}^n \partial(\rho\varphi^i) \cdot \left. \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} \right|_{x=0} \\ &= d_0(f \circ \varphi^{-1})(v_\varphi), \end{aligned}$$

mit

$$v_\varphi = \begin{pmatrix} \partial(\rho\varphi^1) \\ \vdots \\ \partial(\rho\varphi^n) \end{pmatrix}. \quad \square$$

1.15. SATZ UND DEFINITION. Sei  $M$  eine  $C^k$ -Mannigfaltigkeit mit  $k \geq 1$ , dann existiert eine natürliche Bijektion zwischen den Mengen der physikalischen und der geometrischen Tangentialvektoren in  $p$ . Wir identifizieren beide Mengen und sprechen fortan nur noch vom Tangentialraum  $T_p M$  von  $M$  im Punkt  $p$ . Dieser Raum trägt eine natürliche Vektorraumstruktur aufgrund von Definition 1.13 (2).

Für alle  $k$  ist die natürliche Abbildung von  $T_p M$  in den Raum der algebraischen Tangentialvektoren injektiv, für  $k = \infty$  sogar bijektiv. In diesem Fall identifizieren wir alle drei Mengen.

BEWEIS. Wir rekapitulieren hier die „Übersetzungsvorschriften“ zwischen den drei Begriffen, da wir später häufiger zwischen den verschiedenen Interpretationen hin- und herwechseln wollen. Den formalen Beweis, dass die angegebenen Abbildungen jeweils wohldefinierte Bijektionen (Injektionen) sind, überlassen wir als Übung.

Sei zunächst  $k = \infty$  und  $\partial$  ein algebraischer Tangentialvektor in  $p$ , dann erhalten wir einen physikalischen Tangentialvektor  $v$  in  $p$  durch die Zuordnung

$$v_\varphi^i = \partial\varphi^i := \partial(\rho \cdot \varphi^i)$$

für eine geeignete Abschneidefunktion  $\rho$ . In der Tat folgt aus Proposition 1.14 für  $\varphi$  für jede andere Karte  $\psi$  um  $p$  die Bedingung 1.13 (2), denn

$$v_\psi^i = \partial\psi^i = d_{\varphi(p)}(\psi^i \circ \varphi^{-1})(V) = \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial(\psi^i \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} \right|_{\varphi(p)} \partial\varphi^j.$$

Sei jetzt  $k$  beliebig und  $\varphi$  eine Karte von  $M$  um  $p$ , dann definieren wir Richtungsableitungen bei  $p$  durch

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi^i}(p) := \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p)).$$

Sei nun  $v = (v_\varphi)_\varphi$  ein physikalischer Tangentialvektor, dann erhalten wir einen algebraischen Tangentialvektor

$$\partial := \sum_{i=1}^n v_\varphi^i \left. \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \right|_p.$$

Aufgrund der Transformationsvorschrift in Definition 1.13 (2) ist es egal, welche Karte  $\varphi$  wir zur Konstruktion von  $\partial$  heranziehen.



Sei wieder  $v$  ein physikalischer Tangentialvektor. Wir wählen eine Karte  $\varphi$  um  $p$  und erhalten für  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein eine Kurve

$$\gamma_\varphi: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U^\varphi \quad \text{mit} \quad \gamma_\varphi(t) = \varphi^{-1}(t \cdot v_\varphi).$$

Aufgrund der Transformationsvorschrift in Definition 1.13 (2) sind die Kurven  $\gamma_\varphi$  für alle Karten  $\varphi$  um  $p$  paarweise äquivalent im Sinne von Definition 1.13 (3), wir erhalten also einen geometrischen Tangentialvektor  $[\gamma_\varphi]$ .

Sei umgekehrt  $\gamma$  eine Kurve mit  $\gamma(0) = p$ , dann definiert

$$v_\varphi := (\varphi \circ \gamma)'(0)$$

einen physikalischen Tangentialvektor in  $p$  unabhängig von  $\gamma \in [\gamma]$ .

Sei wieder  $\gamma$  eine Kurve mit  $\gamma(0) = p$ , dann erhalten wir einen algebraischen Tangentialvektor  $\partial$  mit

$$\partial f = (f \circ \gamma)'(0)$$

Für die umgekehrte Abbildung gehen wir den Umweg über physikalische Tangentialvektoren.

Schließlich zur Vektorraumstruktur: Die algebraischen Tangentialvektoren bilden einen Vektorraum mit den Verknüpfungen

$$(\partial_1 + \partial_2)(f) = \partial_1 f + \partial_2 f \quad \text{und} \quad (r \cdot \partial)(f) = r \cdot (\partial f) \quad \text{für alle } r \in \mathbb{R}.$$

Analog bilden die physikalischen Tangentialvektoren einen Vektorraum mit

$$(v + w)_\varphi = v_\varphi + w_\varphi \quad \text{und} \quad (r \cdot v)_\varphi = r \cdot (v_\varphi) \quad \text{für alle } r \in \mathbb{R}.$$

Die obigen Operationen sind verträglich mit der Transformationsvorschrift in Definition 1.13 (2) und den obigen Bijektionen.  $\square$

1.16. PROPOSITION UND DEFINITION. *Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale  $C^k$ -Mannigfaltigkeit mit Atlas  $\mathcal{A}$ . Die Vereinigung*

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M = \{ (p, v) \mid p \in M, v \in T_p M \}$$

*trägt eine Topologie, so dass  $\mathcal{A} = \{ d\varphi \mid \varphi \text{ Karte von } M \}$  einen  $2n$ -dimensionalen  $C^{k-1}$ -Atlas auf  $TM$  definiert, wobei*

$$d\varphi: U^{d\varphi} := \bigcup_{p \in U^\varphi} T_p M \longrightarrow V^{d\varphi} := V^\varphi \times \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad (p, v) \mapsto (\varphi(p), v_\varphi).$$

*Die Mannigfaltigkeit  $TM$  heißt das Tangentialbündel von  $M$ , die  $C^{k-1}$ -Abbildung*

$$\pi: TM \longrightarrow M \quad \text{mit} \quad (p, v) \mapsto p$$

*heißt die (Fußpunkt-) Projektion.*

BEWEIS. Die Topologie auf  $TM$  wird wie folgt definiert: Eine Teilmenge  $U \subset TM$  heißt offen, wenn zu jedem Vektor  $(p, v) \in U$  eine Karte  $d\varphi$  um  $(p, v)$  mit  $\varphi \in \mathcal{A}$  existiert, so dass  $d\varphi(U \cap U^{d\varphi}) \subset \mathbb{R}^{2n}$  offen ist. Man überprüft leicht, dass

- (1) dadurch tatsächlich eine Topologie definiert wird,
- (2) die angegebene Topologie Hausdorffsch ist
- (3) und eine abzählbare Basis besitzt,
- (4) die Karten  $d\varphi$  tatsächlich Homöomorphismen sind,
- (5) und die Topologie nicht vom Atlas  $\mathcal{A}$ , sondern nur vom dazugehörigen maximalen Atlas abhängt.

Man muss auch zeigen, dass  $\{d\varphi \mid \varphi \in \mathcal{A}\}$  einen Atlas bildet. Die Überdeckungseigenschaft ist klar. Die Kartenwechsel haben die Gestalt

$$(d\psi \circ (d\varphi)^{-1})(x, v) = ((\psi \circ \varphi^{-1})(x), d_x(\psi \circ \varphi^{-1})(v)) .$$

Da  $\psi \circ \varphi^{-1}$  eine  $\mathcal{C}^k$ -Abbildung ist, ist  $d(\psi \circ \varphi^{-1})$  eine  $\mathcal{C}^{k-1}$ -Abbildung, und das gleiche gilt dann auch für  $d\psi \circ (d\varphi)^{-1}$ . Somit haben wir einen  $\mathcal{C}^{k-1}$ -Atlas für  $TM$  konstruiert.  $\square$

Sei jetzt  $F: M \rightarrow N$  eine  $\mathcal{C}^k$ -Abbildung zwischen  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeiten mit  $k \geq 1$ . Dann induziert  $F$  eine Abbildung  $dF: TM \rightarrow TN$ . Wir geben drei Konstruktionen dieser Abbildung an. Für  $p \in M$  definieren wir zunächst  $d_p F: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ .

- (1) Falls  $k = \infty$  und  $\partial \in T_p M$  ein algebraischer Tangentialvektor ist, dann definiere

$$(d_p F(\partial))(f) = \partial(f \circ F) \quad \text{für alle } f \in \mathcal{C}^\infty(N) .$$

- (2) Sei  $\varphi$  Karte von  $M$  um  $p$  und  $\psi$  Karte von  $N$  um  $F(p)$ , und sei  $v \in T_p M$  physikalischer Tangentialvektor. In der Notation von Definition 1.10 definiere

$$(d_p F(v))_\psi = dF^{\varphi, \psi}_{\varphi(p)}(v_\varphi) \in T_{F(p)} N .$$

- (3) Sei schließlich  $\gamma: I \rightarrow M$  eine Kurve mit  $\gamma(0) = p$  und  $[\gamma]$  der dazugehörige geometrische Tangentialvektor. Dann definiere

$$d_p F([\gamma]) = [F \circ \gamma] \in T_{F(p)} N .$$

In den Konstruktionen (2) und (3) ist wieder Wohldefiniertheit zu beweisen. Insgesamt definieren wir schließlich

$$dF: TM \rightarrow TN \quad \text{durch} \quad dF(p, v) = d_p F(v) \quad \text{für alle } (p, v) \in TM .$$

1.17. BEMERKUNG. Auf den ersten Blick sieht es so aus, als würde  $dF$  lediglich Vektoren von  $M$  nach  $N$  transportieren. Wir schauen uns drei Spezialfälle an, um zu sehen, dass  $F$  dabei tatsächlich abgeleitet wird. Eine offene Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^n$  ist eine glatte Mannigfaltigkeit, und ihr Tangentialbündel ist  $TU \cong U \times \mathbb{R}^n$ , dabei dürfen wir uns Vektoren im Punkt  $x \in U$  wie in der Schule als „Pfeile mit Startpunkt  $x$ “ vorstellen. Am einfachsten sieht man das mit Definition 1.13 (3) oder (2) zur Karte  $\text{id}_U$ .

- (1) Es sei  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine  $\mathcal{C}^k$ -Funktion im Sinne der Analysis II, dann ist  $F$  auch  $\mathcal{C}^k$  in unserem Sinne, dazu betrachte die Karten  $\varphi = \text{id}_U$  und  $\psi = \text{id}_{\mathbb{R}^m}$ . In diesen Karten ist  $dF^{\varphi, \psi}_{\varphi(x)} = dF_x \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  nach (2) einfach die Jacobi-Matrix von  $F$  im Punkt  $x \in U$ . Insbesondere hängt  $dF_x$  nur noch  $\mathcal{C}^{k-1}$  von  $x$  ab.
- (2) Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall mit  $0 \in I$  und  $\gamma: I \rightarrow M$  eine  $\mathcal{C}^k$ -Kurve. Als Basisvektor von  $T_0 I \cong \mathbb{R}$  nehmen wir den Vektor  $\partial_t$ , der in der Karte  $d\text{id}_I$  dem Element  $(0, 1) \in I \times \mathbb{R}$  entspricht. Als „geometrischer Tangentialvektor“ wird er von der Identität  $\text{id}_I$  dargestellt. Dann ist  $d_0 \gamma(\partial_t) = [\gamma \circ \text{id}_I] = [\gamma]$  gerade der von  $\gamma$  beschriebene geometrische Tangentialvektor. In Zukunft schreiben wir dafür kurz  $\dot{\gamma}(0) \in T_{\gamma(0)} M$ .
- (3) Sei schließlich  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  eine reellwertige Funktion und  $v \in T_p M$ . Im Punkt  $f(p) \in \mathbb{R}$  haben wir wieder den Tangentialvektor  $\partial_t$  wie oben. Jetzt gilt  $d_p f(v) = v(f) \cdot \partial_t$ , dabei ist  $v(f)$  die Richtungsableitung nach  $v$  im Sinne von Definition 1.13 (1).

1.18. SATZ UND DEFINITION. Sei  $F: M \rightarrow N$  eine  $\mathcal{C}^k$ -Abbildung zwischen  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeiten mit  $k \geq 1$ . Dann definieren die drei obigen Konstruktionen dieselbe faserweise lineare  $\mathcal{C}^{k-1}$ -Abbildung  $dF: TM \rightarrow TN$ , das Differential von  $F$ .

Die Zuordnung  $M \mapsto TM$  und  $F \mapsto dF$  definiert einen Funktor von der Kategorie der  $\mathcal{C}^k$ - ( $\mathcal{C}^\infty$ -) Mannigfaltigkeiten in die Kategorie der  $\mathcal{C}^{k-1}$ - ( $\mathcal{C}^\infty$ -) Mannigfaltigkeiten.

BEWEIS. Man sieht leicht, dass die obigen drei Konstruktionen wohldefiniert und mit den Abbildungen aus dem Beweis von Satz 1.15 verträglich sind. Hieraus folgt, dass (1)–(3) die gleiche Abbildung  $d_p F: T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$  für alle  $p \in M$ , und damit auch die gleiche Abbildung  $dF: TM \rightarrow TN$  definieren.

Um zu zeigen, dass  $dF$  von der Klasse  $\mathcal{C}^{k-1}$  ist betrachten wir beliebige Karten  $\varphi$  von  $M$  und  $\psi$  von  $N$ . Nach Definition 1.16 und obiger Konstruktion (2) erhalten wir

$$\begin{aligned} dF^{d\varphi, d\psi}(x, v_\varphi) &= (d\psi \circ dF \circ (d\varphi)^{-1})(x, v_\varphi) = (d\psi \circ dF)(p, v) \\ &= (F^{\varphi, \psi}(x), dF^{\varphi, \psi}_x(v_\varphi)) \end{aligned}$$

mit  $x = \varphi(p)$  und  $v_\varphi = d\varphi(v)$ . Somit ist  $dF$  in den Karten  $d\varphi$  von  $TM$  und  $d\psi$  von  $TN$  durch die Abbildung

$$dF^{d\varphi, d\psi} = (F^{\varphi, \psi}, dF^{\varphi, \psi}): V^{d\varphi} \rightarrow V^{d\psi}$$

gegeben. Da  $F^{\varphi, \psi}$  von der Klasse  $\mathcal{C}^k$  ist, ist  $dF^{\varphi, \psi}$  von der Klasse  $\mathcal{C}^{k-1}$ , also ist  $dF$  eine  $\mathcal{C}^{k-1}$ -Abbildung.

Funktorialität folgt aus

- (1)  $did_M = id_{TM}$  für alle  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeiten  $M$ , und
- (2) (*Kettenregel*)  $d(F \circ G) = dF \circ dG$  für alle  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeiten  $L, M, N$  und alle Abbildungen  $F: M \rightarrow N$  und  $G: L \rightarrow M$ .

Diese Aussagen überlassen wir dem Leser als Übung. □

1.19. DEFINITION. Sei  $M$  eine  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit mit Tangentialbündel  $\pi: TM \rightarrow M$  und  $\ell \leq k-1$ . Ein  $\mathcal{C}^\ell$ -Vektorfeld auf  $M$  ist eine  $\mathcal{C}^\ell$ -Abbildung  $X: M \rightarrow TM$ , so dass  $\pi \circ X = id_M$ . Der Raum aller  $\mathcal{C}^\ell$ -Vektorfelder auf  $M$  wird mit  $\mathfrak{X}^\ell(M)$  oder mit  $\Gamma(TM)$  bezeichnet.

Mit anderen Worten: Ein Vektorfeld  $X$  ordnet jedem Punkt  $p \in M$  einen Vektor  $X_p \in T_p M$  zu, denn  $(\pi \circ X)(p) = \pi(X_p) = p$ . Diese Abbildung ist von der Klasse  $\mathcal{C}^\ell$  im Sinne der Definitionen 1.10 und 1.16.

- 1.20. BEISPIEL. (1) Sei  $e_1, \dots, e_n$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^n$ . Dann erhalten wir Vektorfelder  $e_1, \dots, e_n$  auf der  $\mathcal{C}^\infty$ -Mannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^n$ . Für  $x \in \mathbb{R}^n$  realisieren wir den Vektor  $e_i|_x \in T_x \mathbb{R}^n$  geometrisch durch die Kurve

$$t \mapsto x + t \cdot e_i,$$

physikalisch durch den Vektor

$$(e_i|_p)_{id} = e_i$$

in der Karte  $id: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , und algebraisch durch die Richtungsableitung

$$f \mapsto \partial_i f(x) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x).$$

- (2) Sei  $\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi \subset \mathbb{R}^n$  eine Karte von  $M$ , dann ist  $U^\varphi \subset M$  eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Im Beweis von Satz 1.15 haben wir Vektorfelder  $\frac{\partial}{\partial \varphi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^n} \in \mathfrak{X}^{k-1}(U^\varphi)$  definiert. In der Karte  $\varphi$  erhalten wir einfach

$$\left( d\varphi \circ \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \circ \varphi^{-1} \right)(x) = d\varphi \left( \varphi^{-1}(x), \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_{\varphi^{-1}(x)} \right) = (x, e_i).$$

- 1.21. BEMERKUNG. (1)  $\mathfrak{X}^\ell(M)$  ist ein reeller Vektorraum, da sich Vektorfelder mit Skalaren aus  $\mathbb{R}$  multiplizieren und punktweise addieren lassen.

(2)  $\mathfrak{X}^\ell(M)$  ist ein  $\mathcal{C}^\ell(M)$ -Modul, dabei sei

$$(fX)_p = (f \cdot X)_p = f(p) \cdot X_p \in T_p M$$

für alle  $f \in \mathcal{C}^\ell(M)$ ,  $X \in \mathfrak{X}^\ell(M)$  und alle  $p \in M$ . Da  $\mathcal{C}^k(M) \subset \mathcal{C}^\ell(M)$ , ist  $\mathfrak{X}^\ell(M)$  erst recht ein  $\mathcal{C}^k(M)$ -Modul.

(3) Man kann Funktionen nach Vektorfeldern ableiten und erhält eine Ableitung  $d: \mathcal{C}^{\ell+1}(M) \times \mathfrak{X}^\ell(M) \rightarrow \mathcal{C}^\ell(M)$  mit

$$df(X) := X(f), \quad \text{mit} \quad d_p f(X) = X_p(f) \in \mathbb{R}$$

für alle  $f \in \mathcal{C}^{\ell+1}(M)$ ,  $X \in \mathfrak{X}^\ell(M)$  und alle  $p \in M$ . Hierbei haben wir benutzt, dass jeder (physikalische oder geometrische) Tangentialvektor wie im Beweis von Satz 1.15 einen algebraischen Tangentialvektor, also eine Richtungsableitung definiert. Es gilt dann die Produktregel

$$X(f \cdot g) = X(f) \cdot g + f \cdot (X(g)) \quad \text{für alle } f, g \in \mathcal{C}^{\ell+1}(M) \text{ und alle } X \in \mathfrak{X}^\ell(M).$$

(4) Die beiden Verknüpfungen aus (2) und (3) hängen wie folgt zusammen:

$$(f \cdot X)(g) = f \cdot (X(g)) \quad \text{für alle } f \in \mathcal{C}^\ell(M), g \in \mathcal{C}^{\ell+1}(M) \text{ und alle } X \in \mathfrak{X}^\ell(M).$$

1.22. BEMERKUNG. Eine *Derivation* auf einer  $\mathbb{k}$ -Algebra  $\mathbb{k}$  ist eine  $\mathbb{k}$ -lineare Abbildung

$$\mathcal{D}: A \rightarrow A$$

die eine Produktregel erfüllt:

$$\mathcal{D}(f \cdot g) = \mathcal{D}f \cdot g + f \cdot \mathcal{D}g \quad \text{für alle } f, g \in A.$$

Sei  $M$  eine  $\mathcal{C}^\infty$ -Mannigfaltigkeit, so kann man wie im Beweis von Satz 1.15 zeigen, dass der  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -Modul  $\mathfrak{X}^\infty(M)$  isomorph zum  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -Modul der Derivationen auf  $\mathcal{C}^\infty(M)$  ist (vergleiche Bemerkung 1.21 (3)). Entscheidend ist die Beobachtung, dass für alle  $p \in M$  gilt

$$(\mathcal{D}(f \cdot g))(p) = (\mathcal{D}f)(p) \cdot g(p) + f(p) \cdot (\mathcal{D}g)(p),$$

somit ist  $\mathcal{D}_p = \mathcal{D}(\cdot)(p)$  ein (algebraischer) Tangentialvektor am Punkt  $p$ . Wir erhalten also eine „algebraische“ Beschreibung von Vektorfeldern.

Als „physikalisches Vektorfeld“ möchten wir induzierte Vektorfelder auf den Bildbereichen der Karten betrachten. Dazu brauchen wir einen neuen Begriff. Wenn  $X$  ein Vektorfeld auf  $M$  ist, und  $\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi$  eine Karte, dann ist  $d\varphi \circ X$  eine Abbildung  $U^\varphi \rightarrow TV^\varphi = V^\varphi \circ \mathbb{R}^m$ , aber noch kein Vektorfeld auf  $V^\varphi$ .

1.23. DEFINITION. Sei  $F: M \rightarrow N$  eine  $\mathcal{C}^k$ -Abbildung zwischen  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeiten. Zwei Vektorfelder  $X \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$  und  $Y \in \mathfrak{X}^{k-1}(N)$  heißen *F-verwandt*, wenn das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{dF} & TN \\ X \uparrow & & \uparrow Y \\ M & \xrightarrow{F} & N, \end{array}$$

kommutiert, d.h., wenn  $d_p F(X_p) = Y_{F(p)}$  für alle  $p \in M$  gilt.

Sei  $F: M \rightarrow N$  wie oben. Wenn  $X \in \mathfrak{X}^\ell(M)$  vorgegeben ist, ist nicht klar, dass ein  $F$ -verwandtes  $Y \in \mathfrak{X}^\ell(N)$  existiert. Sei umgekehrt  $Y$  gegeben, dann ist auch nicht klar, dass ein  $F$ -verwandtes  $X$  existiert.

1.24. BEISPIEL. Sei  $\iota: M \rightarrow N$  die Inklusionsabbildung einer  $C^k$ -Untermannigfaltigkeit. Zu einem Vektorfeld  $Y \in \mathfrak{X}^{k-1}(N)$  existiert genau dann ein  $\iota$ -verwandtes  $X \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$ , wenn  $Y$  tangential an  $M$  ist, siehe Übungen. Später sehen wir, dass sich umgekehrt jedes  $X \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$  zu einem  $\iota$ -verwandten  $Y$  fortsetzen lässt, wenn  $M \subset N$  abgeschlossen ist.

Außerdem sind die Koordinatenvektorfelder  $\frac{\partial}{\partial \varphi^i}$  aus Beispiel 1.20 (2)  $\varphi$ -verwandt mit den Standardbasisvektorfeldern  $e_i$  auf  $V^\varphi$ .

1.25. BEMERKUNG. Sei  $X \in \mathfrak{X}^\ell(M)$  ein Vektorfeld und  $\varphi$  eine Karte von  $M$ , dann erhalten wir eine  $C^\ell$ -Abbildung

$$X_\varphi = d\varphi \circ X \circ \varphi^{-1}: V^\varphi \rightarrow V^{d\varphi} = V^\varphi \times \mathbb{R}^n.$$

Wir nennen  $X_\varphi$  das *Vektorfeld  $X$  in den Koordinaten  $\varphi$* . Es ist  $\varphi$ -verwandt zur Einschränkung  $X|_{U^\varphi}$ . Äquivalent dazu sind  $X$  und  $X_\varphi$  verwandt unter  $\varphi^{-1}$ .

Es seien  $X_\varphi^1, \dots, X_\varphi^n: V^\varphi \rightarrow \mathbb{R}$  die Koordinatenfunktion von  $X_\varphi$ , dann erhalten wir mit den Vektorfeldern aus Beispiel 1.20 (2), dass

$$X|_{U^\varphi} = \sum_{i=1}^n (X_\varphi^i \circ \varphi) \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi^i}.$$

Als  $C^\ell(U^\varphi)$ -Modul ist  $\mathfrak{X}^\ell(U^\varphi)$  also frei mit der Basis  $\frac{\partial}{\partial \varphi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^n}$ . Auf beliebigen  $C^k$ -Mannigfaltigkeiten ist  $\mathfrak{X}^\ell(M)$  im allgemeinen jedoch kein freier  $C^\ell(M)$ -Modul.

Wir können  $X_\varphi^i$  bestimmen, indem wir die Koordinatenfunktionen  $\varphi^i$  ableiten, denn

$$X|_{U^\varphi}(\varphi^i) = \sum_{j=1}^n (X_\varphi^j \circ \varphi) \cdot \frac{\partial \varphi^i}{\partial \varphi^j} = \sum_{j=1}^n (X_\varphi^j \circ \varphi) \cdot \frac{\partial(\varphi^i \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} = X_\varphi^i \circ \varphi,$$

also folgt

$$X_\varphi^i = (X|_{U^\varphi}(\varphi^i)) \circ \varphi^{-1}.$$

Es gibt auch eine „geometrische“ Beschreibung von Vektorfeldern mit Hilfe von Flüssen. Hierbei löst man eine zum Vektorfeld  $X \in \mathfrak{X}^\ell(M)$  assoziierte gewöhnliche Differentialgleichung auf  $M$  und erhält dadurch eine Schar von Integralkurven auf  $M$ , deren Geschwindigkeitsvektor an jeder Stelle gleich  $X$  ist.

Wir wollen jetzt eine Lie-Algebren-Struktur auf  $\mathfrak{X}^\infty(M)$  einführen. Die Lie-Klammer ist später wichtig bei der Definition 1.40 des Levi-Civita-Zusammenhangs und bei der Definition 1.46 des Riemannschen Krümmungstensors.

1.26. DEFINITION. Eine *Lie-Klammer* auf einem  $\mathbb{k}$ -Vektorraum  $V$  ist eine Abbildung

$$[\cdot, \cdot]: V \times V \rightarrow V$$

mit den Eigenschaften

- (1) *Linearität*:  $[au + bv, w] = a[u, w] + b[v, w]$  für alle  $a, b \in K$  und  $u, v, w \in V$ ;
- (2) *Antisymmetrie*:  $[u, v] = -[v, u]$  für alle  $v, w \in V$ ;
- (3) *Jacobi-Identität*: für alle  $u, v, w \in V$  gilt

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0.$$

Das Paar  $(V, [\cdot, \cdot])$  heißt dann eine *Lie-Algebra*.

Aus (1) und (2) folgt Bilinearität.

1.27. BEISPIEL. Auf den Raum  $M_n(K)$  der  $n \times n$ -Matrizen über einem Körper  $\mathbb{k}$  ist eine Lie-Klammer definiert durch

$$[A, B] = AB - BA.$$

Die Jacobi-Identität folgt aus der Assoziativität des Matrixproduktes. Eine analoge Definition funktioniert auf jeder assoziativen Algebra.

Die obige Lie-Klammer auf  $M_n(\mathbb{k})$  lässt sich auf einige interessante Unterräume wie die Räume  $\mathfrak{o}(n) \subset M_n(\mathbb{R})$  der schiefsymmetrischen oder  $\mathfrak{u}(n) \subset M_n(\mathbb{C})$  der antiselbstadjungierten Matrizen einschränken.

Wir beginnen mit einer „algebraischen“ Beschreibung der Lie-Klammer auf Vektorfeldern. Sei  $M$  eine glatte (also  $C^\infty$ -) Mannigfaltigkeit, und seien  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Wir definieren den Operator

$$[X, Y]: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M) \quad \text{durch} \quad [X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

für alle  $f \in C^\infty(M)$ . Man kann nachrechnen, dass  $[X, Y]: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  wieder eine Derivation auf  $M$ , also ein Vektorfeld ist, siehe Übungen. Im Folgenden konstruieren wir eine Lie-Klammer auf  $\mathfrak{X}^{k-1}(M)$  auch für den Fall  $k < \infty$ .

1.28. SATZ UND DEFINITION. *Zu jeder  $C^k$ -Mannigfaltigkeit mit  $k \geq 2$  und  $\ell \leq k - 1$  existiert genau eine Lie-Klammer  $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{X}^\ell(M) \times \mathfrak{X}^\ell(M) \rightarrow \mathfrak{X}^{\ell-1}(M)$  mit folgenden Eigenschaften.*

- (1) *Für alle  $X, Y \in \mathfrak{X}^\ell(M)$  und alle Funktionen  $f \in C^k(M)$  gilt*

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \in C^{\ell-1}(M).$$

- (2) *Sei  $M = \mathbb{R}^n$  und seien  $X, Y$  Vektorfelder auf  $\mathbb{R}^n$ , aufgefasst als  $C^\ell$ -Abbildungen  $X, Y: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dann gilt*

$$[X, Y] = X(Y) - Y(X): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

*wobei  $X(Y)$  die komponentenweise Ableitung von  $Y$  nach  $X$  bezeichne.*

- (3) *Sei  $F: M \rightarrow N$  eine  $C^k$ -Abbildung und  $X, Y \in \mathfrak{X}^\ell(M)$  seien  $F$ -verwandt zu  $V, W \in \mathfrak{X}^\ell(N)$ , dann ist  $[X, Y]$  auch  $F$ -verwandt zu  $[V, W]$ .*

- (4) *Falls  $\ell \geq 2$ , so gilt die Jacobi-Identität*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \in \mathfrak{X}^{\ell-2}(M) \quad \text{für alle } X, Y, Z \in \mathfrak{X}^\ell(M).$$

Falls  $k = \infty$ , so bildet  $(\mathfrak{X}^\infty(M), [\cdot, \cdot])$  eine Lie-Algebra. Wir nennen  $[\cdot, \cdot]$  auch im Fall  $k < \infty$  eine Lie-Klammer auf  $\mathfrak{X}^\ell(M)$ , auch wenn die Werte im Allgemeinen nicht wieder in  $\mathfrak{X}^\ell(M)$  liegen. Wir müssen verschiedene  $\ell$  zulassen, um die Jacobi-Identität (4) überhaupt formulieren zu können.

BEWEIS. Wir folgern die Eindeutigkeit aus (2) und (3). Wir benutzen dazu die „physikalische Darstellung“ in Bemerkung 1.25 und die Überlegung in Beispiel 1.24. Wenn die Lie-Klammer existiert, ist das Vektorfeld

$$[X, Y]_\varphi = [X_\varphi, Y_\varphi] = X_\varphi(Y_\varphi) - Y_\varphi(X_\varphi) \in \mathfrak{X}^{k-2}(V_\varphi) \quad (*)$$

zu  $[X, Y]$  verwandt unter  $\varphi^{-1}$ , siehe Bemerkung 1.25. Damit ist  $[X, Y]|_{U_\varphi}$  eindeutig bestimmt. Somit ist  $[X, Y]$  auf jedem Kartengebiet festgelegt, also eindeutig.

Zur Existenz müssen wir zeigen, dass die obigen Konstruktionen zu verschiedenen Karten  $\varphi, \psi$  zusammenpassen, das heißt, dass  $[X_\varphi, Y_\varphi]$  und  $[X_\psi, Y_\psi]$  zum gleichen Vektorfeld auf  $U_\varphi \cap U_\psi$  verwandt sind. Man überlegt sich, dass das äquivalent ist dazu, dass

$$[X_\varphi, Y_\varphi]|_{\varphi(U_\varphi \cap U_\psi)} \quad \text{und} \quad [X_\psi, Y_\psi]|_{\psi(U_\varphi \cap U_\psi)}$$

$\psi \circ \varphi^{-1}$ -verwandt sind.

Allgemeiner sei  $F: U \rightarrow V$  eine  $C^k$ -Abbildung zwischen offenen Teilmengen  $U \subset \mathbb{R}^m$  und  $V \subset \mathbb{R}^n$ , und  $X, Y \in \mathfrak{X}^\ell(U)$  seien  $F$ -verwandt zu  $V, W \in \mathfrak{X}^\ell(V)$ . Wir definieren  $[X, Y]$  und  $[V, W]$

durch (2) und zeigen, dass dann  $[X, Y]$  zu  $[V, W]$  verwandt ist. Mit den Definitionen (1), (2) des Differentials und Definition 1.23 erhalten wir

$$\begin{aligned}
[V, W]_{F(x)} &= V_{F(x)}(W) - W_{F(x)}(V) = (dF_x(X_x))(W) - (dF_x(Y_x))(V) \\
&= X_x(W \circ F) - Y_x(V \circ F) = X_x(dF \circ Y) - Y_x(dF \circ X) \\
&= \sum_{i,j=1}^m X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial F}{\partial x^j} \cdot Y^j \right) - \sum_{i,j=1}^m Y^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{\partial F}{\partial x^i} \cdot X^i \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^m X^i(x) \cdot \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j} \cdot Y^j + \frac{\partial F}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \right) - \sum_{i,j=1}^m Y^j(x) \cdot \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^j \partial x^i} \cdot X^i + \frac{\partial F}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \quad (**) \\
&= \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial F}{\partial x^j} \cdot \left( X^i \cdot \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^j \cdot \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) = dF_x([X, Y]_x).
\end{aligned}$$

Dabei haben wir den Satz von Schwarz benutzt, wonach zweite partielle Ableitungen im  $\mathbb{R}^m$  kommutieren. Mit der obigen Überlegung folgt jetzt die Existenz eines globalen Vektorfeldes  $[X, Y]$  auf  $M$ .

Um (3) zu beweisen, sei  $F: M \rightarrow N$  eine  $C^k$ -Abbildung,  $\varphi$  sei Karte von  $M$  und  $\psi$  sei Karte von  $N$ . Wegen (\*\*) sind die Vektorfelder

$$[X_\varphi, Y_\varphi]|_{\varphi(F^{-1}(U_\psi))} = [X, Y]_\varphi|_{\varphi(F^{-1}(U_\psi))} \quad \text{und} \quad [V_\psi, W_\psi] = [V, W]_\psi$$

verwandt unter der Abbildung  $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ . Da das für alle Paare von Karten  $(\varphi, \psi)$  gilt, ist  $[X, Y]$  zu  $[V, W]$   $F$ -verwandt.

Für  $C^\ell$ -Vektorfelder  $X, Y$  auf  $U \subset \mathbb{R}^n$  folgt aus der Produktregel und dem Satz von Schwarz aus der Analysis II, dass

$$\begin{aligned}
X(Y(f)) - Y(X(f)) &= \sum_{i,j=1}^n \left( X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left( Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) - Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left( X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \right) \\
&= \dots = (X(Y) - Y(X))(f).
\end{aligned}$$

Also gilt (1) auf offenen Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ , und wegen (3) auch allgemein.

Mit (1) und der Injektivitätsaussage aus Satz 1.15 folgt (4), da

$$\begin{aligned}
&([X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]])(f) \\
&= X(Y(Z(f))) - X(Z(Y(f))) - Y(Z(X(f))) + Z(Y(X(f))) \pm \dots = 0. \quad \square
\end{aligned}$$

1.29. BEISPIEL. Sei  $\varphi$  eine Karte von  $M$ . Die Koordinatenvektorfelder  $\frac{\partial}{\partial \varphi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^n}$  auf  $U^\varphi \subset M$  und die Standardbasisfelder  $e_1, \dots, e_n$  auf  $V^\varphi \subset \mathbb{R}^n$  sind nach Beispiel 1.24  $\varphi$ -verwandt. Da  $[e_i, e_j] = 0$ , folgt mit Satz 1.28 (3), dass

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \varphi^i}, \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right] = 0 \in \mathfrak{X}(U^\varphi).$$

Insbesondere können wir zweite Ableitungen bezüglich einer festen Karte  $\varphi$  für alle  $f$  auf  $M$  definieren durch

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^i \partial \varphi^j} := \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \frac{\partial f}{\partial \varphi^j} = \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \frac{\partial f}{\partial \varphi^i} = \frac{\partial^2 (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i \partial x^j} \circ \varphi.$$

Mit anderen Worten: die Ableitungen nach Koordinatenvektorfeldern zu einer festen Karte vertauschen. In diesem Sinne gilt ein „Satz von Schwarz“ auch auf Mannigfaltigkeiten.

Umgekehrt kann man zeigen: Seien  $X_1, \dots, X_n$  Vektorfelder auf  $M$ , deren Lie-Klammern auf einer Umgebung  $U$  von  $p \in M$  verschwinden, so dass  $X_{1,p}, \dots, X_{n,p}$  eine Basis von  $T_p M$  bilden, dann existiert eine Karte  $\varphi$  mit  $U^\varphi \subset U$ , so dass  $X_i|_{U^\varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$ .

1.30. BEMERKUNG. Auch für die Lie-Klammer gelten Produktregeln, nämlich

$$[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X \quad \text{und} \quad [X, fY] = X(f)Y + f[X, Y]$$

für alle  $f \in \mathcal{C}^{k-1}(M)$  und alle  $X, Y \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$ . Zum Beweis berechne etwa

$$\begin{aligned} [X, fY](h) &= X(fY(h)) - fY(X(h)) \\ &= X(f)Y(h) + fX(Y(h)) - fY(X(h)) = (X(f)Y + f[X, Y])(h). \end{aligned}$$

Indem man  $h = \varphi^1, \dots, \varphi^n$  wählt, erhält man die Komponenten von  $[X, fY]$  und  $X(f) \cdot Y + f \cdot [X, Y]$  bezüglich einer Karte  $\varphi$ , und damit Gleichheit der Vektorfelder. Alternativ benutze die Injektivität der natürlichen Abbildung von  $T_p M$  in den Raum der algebraischen Tangentialvektoren in  $p$ .

## 1.2. Riemannsche Metriken

In diesem Abschnitt definieren wir Riemannsche Metriken und leiten daraus den Riemannschen Krümmungstensor ab. Der Krümmungstensor ist die entscheidende lokale Größe der Riemannschen Geometrie. In späteren Abschnitten werden wir uns globale Eigenschaften Riemannscher Mannigfaltigkeiten ansehen; einige dieser Eigenschaften lassen sich bereits aus der Riemannschen Krümmung ableiten.

Zur Motivation: in der linearen Algebra ergeben sich geometrische Begriffe wie Längen von Vektoren und Winkel zwischen Vektoren in einem  $\mathbb{R}$ - (oder  $\mathbb{C}$ - oder  $\mathbb{H}$ -) Vektorraum  $V$  aus einem Skalarprodukt auf  $V$ . In der Riemannschen Geometrie definieren wir entsprechend Skalarprodukte auf allen Tangentialräumen einer Mannigfaltigkeit  $M$ .

1.31. DEFINITION. Sei  $M$  eine  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit mit  $k \geq 1$ . Eine *Riemannsche* ( $\mathcal{C}^{k-1}$ -) Metrik  $g$  auf  $M$  ordnet jedem  $p \in M$  ein Skalarprodukt  $g_p$  auf dem Vektorraum  $T_p M$  zu, so dass für je zwei Vektorfelder  $X, Y \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$  die Funktion

$$g(X, Y) \quad \text{mit} \quad (g(X, Y))(p) = g_p(X_p, Y_p)$$

von der Klasse  $\mathcal{C}^{k-1}$  ist. Eine *Riemannsche* ( $\mathcal{C}^k$ -) *Mannigfaltigkeit* ist ein Paar  $(M, g)$  aus einer  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit und einer Riemannschen  $\mathcal{C}^{k-1}$ -Metrik  $g$  auf  $M$ .

Eine *Riemannsche Isometrie* von  $(M, g)$  nach  $(N, h)$  ist ein Diffeomorphismus  $F: M \rightarrow N$  mit  $F^*h = g$ , d.h., für alle  $p \in M$  und alle  $v, w \in T_p M$  gilt

$$g(v, w) = (F_p^*h)(v, w) = h(d_p F(v), d_p F(w)).$$

Sei  $\varphi$  eine Karte von  $M$ , dann heißt die Funktion  $g^\varphi: V^\varphi \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  mit

$$g_x^\varphi = (g_{ij}^\varphi(x))_{i,j} = \left( g_{\varphi^{-1}(x)} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi^i}, \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right) \right)_{i,j}$$

die *Darstellung* von  $g$  in der Karte  $\varphi$ . Das Inverse der Matrix  $g_x^\varphi = (g_{ij}^\varphi(x))_{i,j}$  wird mit  $(g_\varphi^{ij}(x))_{i,j}$  bezeichnet.

Insbesondere ist  $\varphi: (U^\varphi, g|_{U^\varphi}) \rightarrow (V^\varphi, g^\varphi)$  eine Riemannsche Isometrie. Man überlegt sich leicht (etwa mit Hilfe von Abschneidefunktionen), dass die  $g_{ij}^\varphi$  genau dann für alle Karten  $\varphi$  von der Klasse  $\mathcal{C}^{k-1}$  sind, wenn  $g$  selbst von der Klasse  $\mathcal{C}^{k-1}$  ist.

1.32. BEISPIEL. Sei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Standard-Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$ . Der *n-dimensionale Euklidische Raum* ist definiert als  $(\mathbb{R}^n, g^{\text{eukl}})$  mit  $g_x^{\text{eukl}} = \langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $T_x \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ .



Zur Konstruktion Riemannscher Metriken können wir eine Partition der Eins verwenden. Sei dazu  $\mathcal{A}$  ein  $\mathcal{C}^k$ -Atlas auf  $M$ . Eine  $\mathcal{C}^k$ -Partition der Eins zum Atlas  $\mathcal{A}$  ist eine Familie  $(\rho_i)_{i \in I}$  von  $\mathcal{C}^k$ -Funktionen auf  $M$  mit folgenden Eigenschaften:

- (1) Zu jedem  $i \in I$  existiert eine Karte  $\varphi_i \in \mathcal{A}$ , so dass  $\text{supp}(\rho_i) \subset U^{\varphi_i}$ .
- (2) Jeder Punkt in  $M$  besitzt eine Umgebung, auf der fast alle  $\rho_i$  verschwinden.
- (3) Es gilt  $\rho_i \geq 0$  für alle  $i \in I$  auf ganz  $M$  und

$$\sum_{i \in I} \rho_i = 1 .$$

Wegen (2) ist die Summe in (3) endlich. Eine solche  $\mathcal{C}^k$ -Partition der Eins existiert auf jeder  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit, wobei  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .

Auf jeder Teilmenge  $V^\varphi \subset \mathbb{R}^n$  haben wir die Euklidische Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  aus Beispiel 1.32. Auf  $M$  definieren wir  $g$  durch

$$g_p(v, w) = \sum_{i \in I} \rho_i(p) \langle v_{\varphi_i}, w_{\varphi_i} \rangle$$

für alle  $p \in M$  und  $v, w \in T_p M$ . Wegen (1) ist jeder Summand wohldefiniert, wegen (2) ist die Summe lokal endlich und daher  $g$  von der Klasse  $\mathcal{C}^{k-1}$ , und wegen (3) ist  $g_p$  positiv definit für alle  $p \in M$ . Also trägt jede  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit mit  $k \geq 1$  eine Riemannsche  $\mathcal{C}^{k-1}$ -Metrik, für  $\dim M \geq 1$  gibt es sogar überabzählbar viele verschiedene.

Weitere Riemannsche Mannigfaltigkeiten erhalten wir zum Beispiel als Riemannsche Untermannigfaltigkeiten.

**1.33. PROPOSITION.** *Sei  $M \subset N$  eine  $\mathcal{C}^k$ -Untermannigfaltigkeit mit  $k \geq 1$ . Dann ist  $T_p M$  ein linearer Unterraum von  $T_p N$  für alle  $p \in M$ .*

**BEWEIS.** Sei  $\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi$  eine Untermannigfaltigkeitskarte von  $M$  in  $N$  um  $p \in M$  wie in Definition 1.8. Dann ist  $\varphi|_{U^\varphi \cap M}: U^\varphi \cap M \rightarrow V^\varphi \cap \mathbb{R}^m$  eine Karte von  $M$ . Vom „physikalischen“ Standpunkt aus erhalten wir

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \subset & T_p N \\ d\varphi|_{U^\varphi \cap M} \downarrow & & \downarrow d\varphi \\ \mathbb{R}^m & \subset & \mathbb{R}^n \end{array} \quad \square$$

**1.34. DEFINITION.** Sei  $M \subset N$  eine  $\mathcal{C}^k$ -Untermannigfaltigkeit der Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(N, \bar{g})$ . Dann ist die *induzierte Riemannsche Metrik*  $g = \bar{g}|_{TM}$  auf  $M$  gegeben durch  $g_p = \bar{g}|_{T_p M}$  für alle  $p \in M$ . Eine *Riemannsche Untermannigfaltigkeit* von  $(N, \bar{g})$  ist ein Paar  $(M, g)$ , wobei  $M \subset N$  Untermannigfaltigkeit und  $g$  die induzierte Metrik ist.

Man überprüft leicht, dass  $g$  dann wieder eine Riemannsche  $\mathcal{C}^{k-1}$ -Metrik ist.

Nach dem Satz von Whitney aus Bemerkung 1.9 (2) ist jede Mannigfaltigkeit diffeomorph zu einer Untermannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^N$  und trägt daher die induzierte Metrik. Wir erhalten also einen weiteren Beweis für die Existenz Riemannscher Metriken auf  $M$ .

**1.35. BEMERKUNG.** Es gilt der **Satz von Nash:** *Jede  $m$ -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit ist isometrisch zu einer Riemannschen Untermannigfaltigkeit des  $n$ -dimensionalen Euklidischen Raumes, für  $n$  hinreichend groß.* Dieser Satz ist weitaus schwieriger zu beweisen als der analoge Satz von Whitney für differenzierbare Mannigfaltigkeiten aus Bemerkung 1.9.

**1.36. BEISPIEL.** Die *runde  $n$ -Sphäre* ist die Riemannsche Untermannigfaltigkeit  $(S^n, g^{\text{sph}})$  des Euklidischen Raumes  $(\mathbb{R}^{n+1}, g^{\text{eukl}})$  mit  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  wie in Beispiel 1.6.

Um  $g^{\text{sph}}$  bezüglich der stereographischen Projektionen  $\varphi_\pm$  auszudrücken, bilden wir zwei Vektoren  $v, w \in \mathbb{R}^n$  mit Hilfe von  $d_x(\varphi_\pm^{-1})$  nach  $T_{\varphi_\pm^{-1}(x)} S^n \subset T_p \mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$  ab und berechnen dann

ihr Euklidisches Skalarprodukt. Wir haben diese Rechnung für den Fall  $n = 2$  in der elementaren Differentialgeometrie durchgeführt. Das Ergebnis war

$$g_x^{\text{sph}, \varphi_{\pm}}(v, w) = \langle d(\varphi_{\pm}^{-1})_x(v), d(\varphi_{\pm}^{-1})_x(w) \rangle = \frac{4}{(|x|^2 + 1)^2} \langle v, w \rangle .$$

1.37. BEISPIEL. Auch der hyperbolische Raum aus der elementaren Differentialgeometrie hat ein  $n$ -dimensionales Analogon. Das *Poincarésche Ballmodell* des  $n$ -dimensionalen hyperbolischen Raumes hat die Gestalt  $(B_1^n(0), g^{\text{hyp}})$ , mit

$$g_x^{\text{hyp}}(v, w) = \frac{4}{(1 - |x|^2)^2} \langle v, w \rangle .$$

Als nächstes betrachten wir den Levi-Civita-Zusammenhang einer Riemannschen Mannigfaltigkeit.

1.38. DEFINITION. Sei  $M$  eine  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit mit  $k \geq 2$ . Ein  $(\mathcal{C}^{k-2})$  *Zusammenhang* auf  $TM$  ist eine Abbildung

$$\nabla: \mathfrak{X}^{k-2}(M) \times \mathfrak{X}^{k-1}(M) \rightarrow \mathfrak{X}^{k-2}(M) \quad \text{mit} \quad (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

mit folgenden Eigenschaften:

(1)  $\mathcal{C}^{k-2}(M)$ -Linearität im ersten Argument:

$$\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z \quad \text{für alle } X, Y \in \mathfrak{X}^{k-2}(M), Z \in \mathfrak{X}^{k-1}(M) \text{ und } f, g \in \mathcal{C}^{k-2}(M) ,$$

(2)  $\mathbb{R}$ -Linearität im zweiten Argument:

$$\nabla_X(rY + sZ) = r\nabla_X Y + s\nabla_X Z \quad \text{für alle } X \in \mathfrak{X}^{k-2}(M), Y, Z \in \mathfrak{X}^{k-1}(M) \text{ und alle } r, s \in \mathbb{R} ,$$

(3)  $\mathcal{C}^{k-1}(M)$ -Derivativität im zweiten Argument:

$$\nabla_X(fY) = X(f) \cdot Y + f\nabla_X Y \quad \text{für alle } X \in \mathfrak{X}^{k-2}(M), Y \in \mathfrak{X}^{k-1}(M) \text{ und alle } f \in \mathcal{C}^{k-1}(M) .$$

Ein Zusammenhang leitet also ein Vektorfeld nach einem anderen ab.

1.39. BEISPIEL. Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, seien  $X, Y: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  Vektorfelder auf  $U$ . Die komponentenweise Ableitung

$$\nabla_X Y = X(Y)$$

definiert offensichtlich einen Zusammenhang auf  $TU = U \times \mathbb{R}^n$ . Dieser Zusammenhang hat die folgenden Eigenschaften:

$$[X, Y] = X(Y) - Y(X) \quad \text{und} \quad X(g^{\text{eukl}}(Y, Z)) = g^{\text{eukl}}(X(Y), Z) + g^{\text{eukl}}(Y, X(Z)) .$$

Leider lässt sich auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit nicht so einfach ein Zusammenhang angeben wie auf dem  $\mathbb{R}^n$ . Wir werden stattdessen die beiden obigen Eigenschaften benutzen, um zumindest auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten einen eindeutigen Zusammenhang zu definieren.

1.40. DEFINITION. Sei  $M$  eine  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit mit  $k \geq 2$ . Ein Zusammenhang  $\nabla$  auf  $TM$  heißt

(1) *torsionsfrei*, wenn

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \in \mathfrak{X}^{k-2}(M) \quad \text{für alle } X, Y \in \mathfrak{X}^{k-1}(M), \text{ und}$$

(2) *Riemannsch* oder *metrisch* bezüglich einer Riemannschen Metrik  $g$  auf  $M$ , wenn

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \in \mathcal{C}^{k-2}(M) \quad \text{für alle } X, Y, Z \in \mathfrak{X}^{k-1}(M) .$$

Ein torsionsfreier, Riemannscher Zusammenhang bezüglich einer Riemannschen Metrik  $g$  heißt *Levi-Civita-Zusammenhang* von  $(M, g)$ .

Wir werden bald sehen, dass es auf jeder Riemannschen Mannigfaltigkeit genau einen solchen Levi-Civita-Zusammenhang gibt. Vorher benötigen wir jedoch noch ein wenig Technik. Wir verallgemeinern das Lemma von Riesz auf Vektorfelder.

1.41. LEMMA. Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit, und sei  $\alpha: \mathfrak{X}^{k-1}(M) \rightarrow \mathcal{C}^\ell(M)$  eine  $\mathcal{C}^{k-1}(M)$ -lineare Abbildung mit  $\ell \leq k-1$ . Dann existiert genau ein Vektorfeld  $X \in \mathfrak{X}^\ell(M)$ , so dass

$$\alpha(Y) = \langle X, Y \rangle \in \mathcal{C}^\ell(M) \quad \text{für alle } Y \in \mathfrak{X}^{k-1}(M).$$

BEWEIS. Sei  $\varphi$  eine Karte von  $M$ . Für jedes  $p \in U^\varphi$  existiert eine Abschneidefunktion  $\rho \in \mathcal{C}^k(M)$  mit  $\rho(p) = 1$  und mit Träger in  $U^\varphi$ . Für alle  $Y \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$  folgt

$$(\alpha(\rho Y))(p) = \rho(p) (\alpha(Y))(p) = (\alpha(Y))(p),$$

also hängt  $\alpha(Y)|_{U^\varphi}$  nur von  $Y|_{U^\varphi}$  ab. Aus  $Y = \sum_{i=1}^n (Y^i \circ \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi^i} = \sum_{i=1}^n Y(\varphi^i) \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$  folgt

$$\alpha(Y)|_{U^\varphi} = \alpha\left(\sum_{i=1}^n Y(\varphi^i) \frac{\partial}{\partial \varphi^i}\right) = \sum_{i=1}^n Y(\varphi^i) \alpha\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}\right).$$

Da  $g_p$  nicht ausgeartet ist, existiert nach dem Lemma von Riesz für alle  $p$  ein eindeutig bestimmter Vektor

$$X_p^\varphi = \sum_{i,j=1}^n g_\varphi^{ij}(\varphi(p)) \alpha\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}\bigg|_p\right) \frac{\partial}{\partial \varphi^j}\bigg|_p,$$

so dass

$$\langle X_p^\varphi, Y_p \rangle = \sum_{i,j,k=1}^n g_\varphi^{ij}(\varphi(p)) \alpha\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}\bigg|_p\right) g_{jk}^\varphi(\varphi(p)) Y(\varphi^k) = \alpha_p(Y),$$

und  $X_p^\varphi$  hängt  $\mathcal{C}^\ell$ -differenzierbar von  $p \in U^\varphi$  ab.

Sei  $\psi$  eine weitere Karte, so folgt

$$\langle X^\varphi - X^\psi, Y \rangle|_{U^\varphi \cap U^\psi} = \alpha(Y) - \alpha(Y) = 0 \quad \text{für alle } Y \in \mathfrak{X}^{k-1}(M),$$

also gilt  $X^\varphi = X^\psi$  auf  $U^\varphi \cap U^\psi$ , und wir erhalten ein globales Vektorfeld  $X \in \mathfrak{X}^\ell(M)$  mit  $X|_{U^\varphi} = X^\varphi$  und

$$\alpha(Y) = \langle X, Y \rangle \in \mathcal{C}^\ell(M) \quad \text{für alle } Y \in \mathfrak{X}^{k-1}(M).$$

Aus dem gleichen Argument folgt auch die Eindeutigkeit von  $X$ . □

1.42. SATZ. Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann gibt es genau einen Levi-Civita-Zusammenhang  $\nabla$  auf  $TM$ . Es gilt die Koszul-Formel

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) \\ + g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) + g([Z, X], Y).$$

BEWEIS. Wir beweisen zunächst die Koszul-Formel. Dann folgern wir mit Lemma 1.41, dass für alle  $X, Y \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$  genau ein Vektorfeld  $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}^{k-2}(M)$  existiert, das die Koszul-Formel erfüllt. Zum Schluss zeigen wir, dass  $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$  tatsächlich einen Levi-Civita-Zusammenhang definiert. Wegen der Koszul-Formel ist dieser aber auch eindeutig.

Die Koszul-Formel ergibt sich sofort als Summe der Gleichungen

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) &= X(g(Y, Z)) , \\ g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) &= Y(g(Z, X)) , \\ -g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) &= -Z(g(X, Y)) , \\ g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_Y X, Z) &= g([X, Y], Z) , \\ -g(\nabla_Y Z, X) + g(\nabla_Z Y, X) &= -g([Y, Z], X) \\ \text{und } g(\nabla_Z X, Y) - g(\nabla_X Z, Y) &= g([Z, X], Y) , \end{aligned}$$

die sich daraus ergeben, dass  $\nabla$  Riemannsch und torsionsfrei sein soll. Man sieht leicht, dass das Vektorfeld  $\nabla_X Y$  — falls es existiert — durch die Koszulformel eindeutig bestimmt ist.

Wir beweisen  $\mathcal{C}^{k-2}$ -Linearität der Abbildung

$$Z \mapsto X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) + g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) + g([Z, X], Y) .$$

In der Tat gilt

$$\begin{aligned} X(g(Y, fZ)) + Y(g(fZ, X)) - fZ(g(X, Y)) + g([X, Y], fZ) - g([Y, fZ], X) + g([fZ, X], Y) \\ = X(f)g(Y, Z) + fX(g(Y, Z)) + Y(f)g(Z, X) + fY(g(Z, X)) - fZ(g(X, Y)) \\ + f g([X, Y], Z) - Y(f)g(Z, X) - f g([Y, Z], X) - X(f)g(Z, Y) + f g([Z, X], Y) \\ = f \cdot (X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) + g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) + g([Z, X], Y)) . \end{aligned}$$

Aus Lemma 1.41 folgt die Existenz eines Vektorfeldes  $\nabla_X Y$ , das der Koszul-Formel genügt.

Analog zur obigen Rechnung beweisen wir

$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y \quad \text{und} \quad \nabla_X(fY) = X(f)Y + f \nabla_X Y ,$$

es folgt, dass  $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$  ein Zusammenhang ist.

Aus der Koszul-Formel folgt auch

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle + 2\langle \nabla_X Z, Y \rangle &= 2X\langle Y, Z \rangle \\ \text{und } 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle - 2\langle \nabla_Y X, Z \rangle &= 2\langle [X, Y], Z \rangle , \end{aligned}$$

also ist  $\nabla$  Riemannsch und torsionsfrei. Insgesamt existiert also der Levi-Civita-Zusammenhang und ist durch die Koszul-Formel eindeutig festgelegt.  $\square$

1.43. BEMERKUNG. Es sei  $(M, g)$  Riemannsche Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  mit der Euklidischen Metrik. Seien  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , dann können wir  $Y$  auffassen als Abbildung  $Y: M \rightarrow \mathbb{R}^N$  mit

$$p \mapsto Y(p) \in T_p M \subset T_p \mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^N .$$

Es sei  $X(Y): M \rightarrow \mathbb{R}^N$  die komponentenweise Ableitung. Dann wird der Levi-Civita-Zusammenhang auf  $M$  eindeutig festgelegt durch die Gleichung

$$g(\nabla_X Y, Z) = \langle X(Y), Z \rangle$$

für alle  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  (Übung).

1.44. DEFINITION. Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, sei  $\varphi$  eine Karte von  $M$ , und sei  $\nabla$  ein Zusammenhang auf  $TM$ . Dann heißen die Koeffizienten  ${}^\varphi \Gamma_{ij}^k: V^\varphi \rightarrow \mathbb{R}$  in

$$\nabla \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \frac{\partial}{\partial \varphi^j} = \sum_{k=1}^n ({}^\varphi \Gamma_{ij}^k \circ \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi^k}$$

für  $i, j = 1, \dots, n$  die *Christoffel-Symbole* von  $\nabla$  bezüglich  $\varphi$ .

1.45. BEMERKUNG. Die Koordinatenfelder an der Stelle  $p \in U^\varphi$  bilden eine Basis von  $T_pM$ . Außerdem kann man für jedes  $p \in U^\varphi$  mit Hilfe einer geeigneten Abschneidefunktion wie im Beweis von Proposition 1.14 zeigen, dass  $(\nabla_X Y)_p$  nur von  $X|_{U^\varphi}$  und  $Y|_{U^\varphi}$  abhängt. Daher ist die Definition der  ${}^\varphi\Gamma_{ij}^k$  sinnvoll.

Der Zusammenhang  $\nabla$  ist auf  $U^\varphi$  durch Angabe aller  ${}^\varphi\Gamma_{ij}^k$  eindeutig beschrieben. Aus Definition 1.38 folgern wir, dass für beliebige Vektorfelder  $X$  und  $Y$  auf  $M$  gilt:

$$\begin{aligned}\nabla_X Y|_{U^\varphi} &= \sum_{i,k=1}^n \nabla_{X(\varphi^i) \frac{\partial}{\partial \varphi^i}} \left( Y(\varphi^k) \frac{\partial}{\partial \varphi^k} \right) \\ &= \sum_{i,k=1}^n X(\varphi^i) \left( \frac{\partial(Y(\varphi^k))}{\partial \varphi^i} + \sum_{j=1}^n Y(\varphi^j) ({}^\varphi\Gamma_{ij}^k \circ \varphi) \right) \frac{\partial}{\partial \varphi^k}.\end{aligned}$$

1.46. DEFINITION. Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit  $k \geq 3$ , dann heißt die Abbildung  $R: \mathfrak{X}^{k-2}(M) \times \mathfrak{X}^{k-2}(M) \times \mathfrak{X}^{k-1}(M) \rightarrow \mathfrak{X}^{k-3}(M)$  mit

$$(X, Y, Z) \mapsto R_{X,Y}Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

der *Riemannsche Krümmungstensor* von  $(M, g)$ .

Wir wollen kurz erläutern, warum  $R$  ein „Tensor“ genannt wird. Der Einfachheit halber definieren wir aber nur  $(a, 0)$ - und  $(a, 1)$ -Tensoren.

1.47. DEFINITION. Sei  $M$  eine differenzierbare  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit mit  $k \geq 1$ , und sei  $a \in \mathbb{N}_0$ . Ein  $(a, 0)$ -Tensor der Klasse  $\mathcal{C}^l$  ist eine  $\mathcal{C}^k$ -multilineare Abbildung  $S: \mathfrak{X}^{k-1}(M)^a \rightarrow \mathcal{C}^l(M)$ . Ein  $(a, 1)$ -Tensor der Klasse  $\mathcal{C}^l$  ist eine  $\mathcal{C}^k$ -multilineare Abbildung  $S: \mathfrak{X}^{k-1}(M)^a \rightarrow \mathfrak{X}^l(M)$ .

1.48. BEISPIEL. (1) Eine  $\mathcal{C}^l$ -Funktion ist ein  $(0, 0)$ -Tensor.

(2) Ein  $\mathcal{C}^l$ -Vektorfeld ist ein  $(0, 1)$ -Tensor.

(3) Eine Riemannsche Metrik ist ein symmetrischer  $(2, 0)$ -Tensor der Klasse  $\mathcal{C}^{k-1}$ .

1.49. LEMMA. Sei  $S$  ein  $(a, b)$ -Tensor mit  $b = 0$  oder  $1$ , seien  $X_1, \dots, X_a \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$ , und sei  $p \in M$ . Dann hängt  $S(X_1, \dots, X_a)(p)$  nur von  $X_1|_p, \dots, X_a|_p \in T_pM$  ab, wir erhalten also eine  $\mathbb{R}$ -multilineare Abbildung  $S_p: (T_pM)^a \rightarrow \mathbb{R}$  bzw.  $\rightarrow T_pM$ .

Da Tensoren also bereits punktweise multilinear sind, erhalten wir insbesondere  $\mathcal{C}^r$ -Multilinearität  $\mathfrak{X}^r(M) \rightarrow \mathcal{C}^r(M)$  bzw.  $\mathfrak{X}^r(M)$  für alle  $0 \leq r \leq l$ .

BEWEIS. Sei  $\varphi$  eine Karte von  $M$ , dann existiert zu jedem  $p \in U^\varphi$  eine Abschneidefunktion  $\rho$  wie im Beweis von Lemma 1.41. Aus Multilinearität folgt

$$S(\rho X_1, \dots, \rho X_a)(p) = \rho(p)^a S(X_1, \dots, X_a)(p) = S(X_1, \dots, X_a)(p),$$

also hängt  $S(\rho X_1, \dots, \rho X_a)|_{U^\varphi}$  nur von  $X_1|_{U^\varphi}, \dots, X_a|_{U^\varphi} \in \mathfrak{X}(U^\varphi)$  ab.

Einschränken auf  $U^\varphi$  ist also möglich und liefert

$$\begin{aligned}S(X_1, \dots, X_a)(p) &= S\left(\sum_{i_1=1}^n \rho X_1(\varphi^{i_1}) \frac{\partial}{\partial \varphi^{i_1}}, \dots, \sum_{i_a=1}^n \rho X_a(\varphi^{i_a}) \frac{\partial}{\partial \varphi^{i_a}}\right)(p) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_a=1}^n X_{1,p}(\varphi^{i_1}) \cdots X_{a,p}(\varphi^{i_a}) \cdot S\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^{i_a}}\right)(p). \quad \square\end{aligned}$$

1.50. BEMERKUNG. Aus dem obigen Beweis folgt für einen  $(a, 0)$ -Tensor  $S$  sofort

$$S(X_1, \dots, X_a)|_{U^\varphi} = \sum_{i_1, \dots, i_a=1}^n X_1(\varphi^{i_1}) \cdots X_a(\varphi^{i_a}) \cdot ({}^\varphi S_{i_1, \dots, i_a} \circ \varphi)$$

mit  ${}^\varphi S_{i_1, \dots, i_a} \in \mathcal{C}^l(V^\varphi)$  für alle Indexkombinationen. Einen  $(a, 1)$ -Tensor  $S$  können wir noch weiter zerlegen in

$$S(X_1, \dots, X_a)|_{U^\varphi} = \sum_{i_1, \dots, i_a=1}^n \sum_{j=1}^n X_1(\varphi^{i_1}) \cdots X_a(\varphi^{i_a}) \cdot ({}^\varphi S_{i_1, \dots, i_a}^j \circ \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi^j}.$$

1.51. SATZ. *Sei  $M$  eine Riemannsche  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit mit  $k \geq 3$ . Dann ist  $R$  ein  $(3, 1)$ -Tensor der Klasse  $\mathcal{C}^{k-3}$ .*

BEWEIS. Wir müssen zeigen, dass  $R_{X,Y}Z$  in jedem Argument  $\mathcal{C}^{k-1}$ -linear ist.

Sei also  $f \in \mathcal{C}^{k-1}(M)$  und  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$ , dann folgt

$$\begin{aligned} R_{fX,Y}Z &= \nabla_{fX} \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_{fX} Z - \nabla_{[fX,Y]} Z \\ &= f \nabla_X \nabla_Y Z - Y(f) \nabla_X Z - f \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{Y(f)} X Z - f \nabla_{[X,Y]} Z \\ &= f R_{X,Y} Z. \end{aligned}$$

Außerdem gilt offensichtlich

$$R_{X,fY}Z = -R_{fY,X}Z = -f R_{Y,X}Z = f R_{X,Y}Z.$$

Für das letzte Argument müssen wir etwas mehr rechnen:

$$\begin{aligned} R_{X,Y}(fZ) &= \nabla_X(Y(f)Z + f \nabla_Y Z) - \nabla_Y(X(f)Z + f \nabla_X Z) - [X,Y](f)Z - f \nabla_{[X,Y]} Z \\ &= X(Y(f))Z + Y(f) \nabla_X Z + X(f) \nabla_Y Z + f \nabla_X \nabla_Y Z \\ &\quad - Y(X(f))Z - X(f) \nabla_Y Z - Y(f) \nabla_X Z - f \nabla_Y \nabla_X Z \\ &\quad - [X,Y](f)Z - f \nabla_{[X,Y]} Z \\ &= f R_{X,Y} Z. \end{aligned} \quad \square$$

Der Riemannsche Krümmungstensor enthält sehr viel geometrische Information über die globale Gestalt der Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$ . Bevor wir geometrische Größen aus dem Krümmungstensor herauslesen können, müssen wir erst seine wichtigsten algebraischen Eigenschaften verstehen.

1.52. SATZ. *Der Riemannsche Krümmungstensor hat die folgenden Symmetrien.*

- (1) *Schiefsymmetrie:*  $R_{X,X}Z = 0$ ,
- (2) *erste Bianchi-Identität:*  $R_{X,Y}Z + R_{Y,Z}X + R_{Z,X}Y = 0$ ,
- (3) *Metrizität:*  $g(R_{X,Y}Z, Z) = 0$ ,
- (4) *Blocksymmetrie:*  $g(R_{X,Y}Z, W) = g(R_{Z,W}X, Y)$

für alle  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$ .

Beachte, dass nach Lemma 1.41 der 3-1-Tensor  $R$  und der 4-0-Tensor  $g(R, \cdot, \cdot, \cdot)$  genau die gleiche Information enthalten. Aus (1) bzw. (3) folgt wegen der Multilinearität auch

$$\begin{aligned} R_{X,Y}Z + R_{Y,X}Z &= R_{X+Y, X+Y}Z - R_{X,X}Z - R_{Y,Y}Z = 0 \\ \text{und } g(R_{X,Y}Z, W) + g(R_{X,Y}W, Z) &= 0. \end{aligned}$$

BEWEIS. Wegen Lemma 1.49 reicht es, die Behauptungen in allen Karten  $\varphi$  einzeln zu beweisen. Außerdem dürfen wir  $X, Y, Z, W \in \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^n} \right\}$  annehmen, da sich alle anderen Vektorfelder aus diesen linear kombinieren lassen. Insbesondere verschwinden dann alle Lie-Klammern gemäß Beispiel 1.29, was die Rechnungen etwas vereinfacht.

Behauptung (1) ist offensichtlich. Behauptung (2) folgt aus der Torsionsfreiheit von  $\nabla$ :

$$\begin{aligned} R_{X,Y}Z + R_{Y,Z}X + R_{Z,X}Y &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X + \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y \\ &= \nabla_Y [Z, X] + \nabla_Z [X, Y] + \nabla_X [Y, Z] = 0 \end{aligned}$$

nach Wahl der Vektorfelder  $X, Y, Z$ .

Behauptung (3) folgt, da  $\nabla$  metrisch ist:

$$\begin{aligned} g(R_{X,Y}Z, Z) &= g(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z, Z) \\ &= X(g(\nabla_Y Z, Z)) - g(\nabla_Y Z, \nabla_X Z) - Y(g(\nabla_X Z, Z)) + g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z) \\ &= \frac{1}{2} \left( X(Y(g(Z, Z))) - Y(X(g(Z, Z))) \right) = [X, Y](g(Z, Z)) = 0. \end{aligned}$$

Schließlich folgt Behauptung (4) rein algebraisch aus (1)–(3), denn

$$\begin{aligned} 2g(R_{X,Y}Z, W) &= -g(R_{Y,Z}X, W) - g(R_{Z,X}Y, W) + g(R_{X,Y}Z, W) \\ &= g(R_{Y,Z}W, X) + g(R_{Z,X}W, Y) - g(R_{X,Y}W, Z) \\ &= -g(R_{Z,W}Y, X) - g(R_{W,Y}Z, X) - g(R_{X,W}Z, Y) - g(R_{W,Z}X, Y) - g(R_{X,Y}W, Z) \\ &= 2g(R_{Z,W}X, Y) + \underbrace{g(R_{W,Y}X, Z) + g(R_{X,W}Y, Z) + g(R_{Y,X}W, Z)}_{=0}. \quad \square \end{aligned}$$

1.53. PROPOSITION. Sei  $(M, g)$  Riemannsche Mannigfaltigkeit, und sei  $\varphi$  eine Karte von  $M$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g_{\varphi}^{kl} \left( \frac{\partial g_{jl}^{\varphi}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}^{\varphi}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}^{\varphi}}{\partial x^l} \right) \\ \text{und} \quad \varphi R_{ijk}^l &= \frac{\partial \varphi \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} - \frac{\partial \varphi \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} + \sum_{m=1}^n (\varphi \Gamma_{im}^l \varphi \Gamma_{jk}^m - \varphi \Gamma_{jm}^l \varphi \Gamma_{ik}^m). \end{aligned}$$

BEWEIS. Wir benutzen die Formel im Beweis von Lemma 1.41, um die erste Gleichung aus der Koszul-Formel in Satz 1.42 herzuleiten. Die zweite Formel ist dann eine einfache Konsequenz aus der Definition von  $R$  und Bemerkung 1.45. Bei beiden Rechnungen nutzen wir wieder aus, dass die Lie-Klammern der Koordinatenfelder verschwinden.  $\square$

Nachdem wir den Krümmungstensor definiert haben, wollen wir aus ihm drei weitere Krümmungsgrößen ableiten.

1.54. DEFINITION. Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Krümmungstensor  $R$ , und sei  $p \in M$ .

- (1) Für jeden zweidimensionalen Unterraum  $E \subset T_p M$  mit Basis  $(v, w)$  ist die *Schnittkrümmung* definiert als

$$K_p(E) = \frac{g(R_{v,w}w, v)}{g(v, v)g(w, w) - g(v, w)^2} \in \mathbb{R}.$$

- (2) Sei  $e_1, \dots, e_n$  eine Orthonormalbasis von  $T_p M$ , dann ist die *Ricci-Krümmung* auf  $T_p M$  definiert als

$$\text{ric}_p(v, w) = \text{tr}(R_{\cdot, v}w) = \sum_{i=1}^n g(R_{v, e_i} e_i, w) \in \mathbb{R}.$$

- (3) Die *Skalarkrümmung* von  $M$  ist definiert als

$$\text{scal}(p) = \sum_{i=1}^n \text{ric}(e_i, e_i) = \sum_{i,j=1}^n g(R_{e_i, e_j} e_j, e_i) \in \mathbb{R}.$$

1.55. BEMERKUNG. (1) Wir müssen zeigen, dass die Schnittkrümmung wohldefiniert, das heißt unabhängig von der Basis ist. Man kann das durch Nachrechnen einsehen, oder aber wie folgt: Nach Satz 1.52 (1) und (3) sind für alle  $v, w \in E$  die  $(2, 0)$ -Tensoren

$$g(R_{\cdot, \cdot} w, v) \quad \text{und} \quad g(R_{v, w} \cdot, \cdot): E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

Determinantenfunktionen (alternierende Formen maximalen Grades) auf  $E$ . Sei also  $A \in GL(E)$ , dann gilt für die Basis  $(Av, Aw)$ , dass

$$g(R_{Av, Aw} Aw, Av) = \det A g(R_{Av, Aw} w, v) = (\det A)^2 g(R_{v, w} w, v).$$

Eine entsprechende Formel gilt für den Nenner

$$|v|^2 |w|^2 - \langle v, w \rangle^2 = (\langle \cdot, v \rangle \langle \cdot, w \rangle - \langle \cdot, w \rangle \langle \cdot, v \rangle)(v, w),$$

also ist  $K_p(E)$  von der Wahl der Basis unabhängig.

- (2) Man kann den Krümmungstensor aus der Schnittkrümmung zurückgewinnen (Übung).  
 (3) Auch Ricci- und Skalarkrümmung sind wohldefiniert, wie man (etwa für die Ricci-Krümmung) leicht überprüft: Sei etwa  $f_1, \dots, f_n$  eine weitere Orthonormalbasis von  $T_p M$ , dann existiert eine Matrix  $A \in O(n)$  mit

$$f_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij},$$

da  $A \cdot A^t$  die Einheitsmatrix ergibt. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n g(R_{v, f_k} f_k, w) &= \sum_{i, j, k=1}^n g(R_{v, a_{ik} e_i} a_{jk} e_j, w) \\ &= \sum_{i, j, k=1}^n a_{ik} a_{jk} g(R_{v, e_i} e_j, w) = \sum_{i=1}^n g(R_{v, e_i}, e_i, w) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung liefert die Wohldefiniertheit der Skalarkrümmung.

- (4) Wegen Satz 1.52 ist  $\text{ric}$  ein symmetrischer  $(2, 0)$ -Tensor.

Wir werden der Schnitt- und Riccikerümmung im Laufe der Vorlesung im Zusammenhang mit dem Verhalten von Geodätischen und Volumina von Bällen gelegentlich begegnen. Die Skalar-krümmung wird nicht auftauchen; sie spielt aber eine gewisse Rolle beim Studium von Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten.

### 1.3. Bogenlänge und Geodätische

In diesem Kapitel definieren wir die Bogenlänge von Kurven und den Riemannschen Abstandsbegriff auf Mannigfaltigkeiten. Wir sehen, dass kürzeste Kurven zwischen zwei Punkten einer bestimmten Differentialgleichung genügen, und nennen solche Kurven geodätische Linien.

Wir werden ab jetzt keinen Wert mehr auf die genaue Differenzierbarkeitsordnung legen. Außerdem werden wir die Abkürzungen

$$\langle v, w \rangle = g_p(v, w) \quad \text{und} \quad \|v\| = \sqrt{g_p(v, v)}$$

für alle  $p \in M$  und alle  $v, w \in T_p M$  verwenden, so lange Fußpunkt  $p$  und Metrik  $g$  aus dem Kontext klar sind. Wir erinnern uns an den Geschwindigkeitsvektor  $\dot{\gamma}(t) = [\gamma(\cdot - t)] \in T_{\gamma(t)} M$  einer Kurve.

1.56. DEFINITION. Eine (parametrisierte) Kurve  $\gamma: I \rightarrow M$  heißt *regulär*, wenn  $\dot{\gamma}(t) \neq 0 \in T_{\gamma(t)} M$  für alle  $t \in I$ . Eine *Parametertransformation* für  $\gamma$  ist ein Diffeomorphismus  $\vartheta: J \rightarrow I$  mit  $J \subset \mathbb{R}$ , in diesem Fall heißt  $\gamma \circ \vartheta: J \rightarrow M$  eine *Umparametrisierung* von  $M$ .



1.57. DEFINITION. Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $\gamma: I \rightarrow M$  eine Kurve, und sei  $[a, b] \subset I$ . Dann ist die *Bogenlänge* von  $\gamma|_{[a,b]}$  definiert als

$$L(\gamma|_{[a,b]}) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt .$$

Die Kurve  $\gamma$  heißt *nach Bogenlänge parametrisiert*, wenn  $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$  für alle  $t \in I$ .

1.58. BEMERKUNG. Im Euklidischen Raum definiert man die Bogenlänge einer Kurve als das Supremum aller Längen von approximierenden Polygonzügen. Anschließend zeigt man, dass für (stückweise) differenzierbare Kurven die Bogenlänge durch obiges Integral berechnet werden kann. Da die ursprüngliche Definition auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten nicht sinnvoll ist, verwenden wir hier den Integralausdruck.

Die folgenden Eigenschaften der Bogenlänge gelten auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit denselben Beweisen wie im euklidischen Raum.

- (1) Die Bogenlänge ist invariant unter Umparametrisierungen, also

$$L((\gamma \circ \vartheta)|_{[a,b]}) = L(\gamma|_{[\vartheta(a), \vartheta(b)]}) .$$

Das folgt unmittelbar aus der Integraltransmutationsformel.

- (2) Eine Kurve  $\gamma: I \rightarrow M$  ist genau dann nach Bogenlänge parametrisiert, wenn für alle  $a, b \in I$  mit  $a < b$  gilt, dass

$$L(\gamma|_{[a,b]}) = \int_a^b 1 dt = b - a .$$

- (3) Jede reguläre Kurve lässt sich nach Bogenlänge umparametrisieren. Dazu wählen wir eine Umparametrisierung  $\vartheta: J \rightarrow I$  mit

$$\vartheta^{-1}(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(s)\| ds ,$$

dann ist  $\vartheta \circ \gamma: J \rightarrow I$  nach Bogenlänge parametrisiert. Sei umgekehrt  $\vartheta': J' \rightarrow I$  eine weitere Umparametrisierung, so dass auch  $\vartheta' \circ \gamma$  nach Bogenlänge parametrisiert ist, dann existiert eine Konstante  $c$ , so dass  $\vartheta'(s) = \vartheta(c \pm s)$  für alle  $s \in J'$ .

Wir wollen als nächstes die „erste Variation“ der Bogenlänge berechnen. Gemeint ist dabei die erste Ableitung der Bogenlänge einer differenzierbaren Familie von Kurven. Um die zugehörige Rechnung durchzuführen, brauchen wir Vektorfelder und Zusammenhänge längs Abbildungen.

1.59. DEFINITION. Sei  $F: M \rightarrow N$  eine differenzierbare Abbildung, und sei  $\pi: TN \rightarrow N$  das Tangentialbündel von  $N$ . Ein *Vektorfeld längs  $F$*  ist eine differenzierbare Abbildung  $X: M \rightarrow TN$  mit  $\pi \circ X = F$ . Wir bezeichnen den Raum dieser Vektorfelder mit  $\mathfrak{X}(F)$ .

Wir haben Vektorfelder längs Abbildungen implizit kennengelernt, als wir in Definition 1.23 „ $F$ -verwandte Vektorfelder“ eingeführt haben. Man braucht sie zum Beispiel, wenn man Abbildungen differenzierbar abändern, das heißt, „variieren“ möchte.

1.60. BEMERKUNG. Vektorfelder längs  $F: M \rightarrow N$  haben ähnliche Eigenschaften wie gewöhnliche Vektorfelder, siehe Bemerkung 1.21.

- (1) Sei  $X \in \mathfrak{X}(M)$  und  $Y \in \mathfrak{X}(N)$ , dann sind  $dF \circ X$  und  $Y \circ F: M \rightarrow TN$  Vektorfelder längs  $F$ .  
(2) Der Raum  $\mathfrak{X}(F)$  bildet ein  $\mathcal{C}(M)$ -Modul mit

$$(fX)_p = f(p) X_p \in T_{F(p)}N$$

für alle  $f \in \mathcal{C}(M)$ ,  $X \in \mathfrak{X}(F)$  und alle  $p \in M$ .

(3) Ableiten liefert eine Abbildung  $\mathfrak{X}(F) \times \mathcal{C}^1(N) \rightarrow \mathcal{C}(M)$  mit

$$(X(f))_p = X_p(f) = df_{F(p)}(X_p)$$

für alle  $f \in \mathcal{C}^1(N)$ ,  $X \in \mathfrak{X}(F)$  und alle  $p \in M$ . Für alle  $f, h \in \mathcal{C}^1(N)$  und  $\mathfrak{X}(F)$  gilt die Produktregel

$$X(fh) = X(f) \cdot (h \circ F) + (f \circ F) \cdot X(h) \in \mathcal{C}(M).$$

(4) Sei  $\psi$  eine Karte von  $N$ , dann ist  $U := F^{-1}(U^\psi)$  offen in  $M$ , da  $F$  als differenzierbare Abbildung insbesondere stetig ist. Wie in Bemerkung 1.25 sehen wir für alle  $X \in \mathfrak{X}(F)$ , dass

$$X|_U = \sum_{i=1}^n \underbrace{X(\psi^i)}_{\in \mathcal{C}(U)} \cdot \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial \psi^i} \circ F \right)}_{\in \mathfrak{X}(F|_U)}.$$

1.61. DEFINITION. Ein *Zusammenhang längs  $F$*  ist eine Abbildung  $\nabla: \mathfrak{X}^{\ell-1}(M) \times \mathfrak{X}^\ell(F) \rightarrow \mathfrak{X}^{\ell-1}(F)$  mit den Eigenschaften

- (1)  $\mathcal{C}^{\ell-1}(M)$ -Linearität im ersten Argument,
- (2)  $\mathbb{R}$ -Linearität im zweiten Argument,
- (3)  $\mathcal{C}^\ell(M)$ -Derivatitivität im zweiten Argument:

$$\nabla_X(fY) = X(f) \cdot Y + f \nabla_X Y \quad \text{für alle } X \in \mathfrak{X}(M), Y \in \mathfrak{X}^\ell(F) \text{ und alle } f \in \mathcal{C}^\ell(M).$$

Die *Krümmung*  $R: \mathfrak{X}^{k-2}(M) \times \mathfrak{X}^{k-2}(M) \times \mathfrak{X}^{k-1}(F) \rightarrow \mathfrak{X}^{k-3}(F)$  eines Zusammenhangs  $\nabla$  längs  $F$  ist definiert als

$$R_{X,Y}Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \in \mathfrak{X}(F)$$

$$\text{für alle } X, Y \in \mathfrak{X}^{k-2}(M) \text{ und alle } Z \in \mathfrak{X}^{k-1}(F).$$

1.62. PROPOSITION UND DEFINITION. Sei  $\nabla^{TN}$  ein Zusammenhang auf  $TN$ , und sei  $F: M \rightarrow N$  eine  $\mathcal{C}^k$ -Abbildung, dann existiert genau ein Zusammenhang  $\nabla^F$  längs  $F$ , so dass

$$\nabla_X^F(Y \circ F) = \nabla_{dF \circ X}^{TN} Y \in \mathfrak{X}(F) \quad (1)$$

für alle  $X \in \mathfrak{X}(M)$  und alle  $Y \in \mathfrak{X}(N)$ . Er heißt der von  $\nabla^{TN}$  induzierte Zusammenhang längs  $F$ . Sei  $R^{TN}$  die Krümmung von  $\nabla^{TN}$ , dann hat  $\nabla^F$  für alle  $X, Y \in \mathfrak{X}^{k-2}(M)$ ,  $Z \in \mathfrak{X}^{k-1}(F)$  und alle  $p \in M$  die Krümmung

$$R_{X,Y}^F Z|_p = R_{dF_p(X_p), dF_p(Y_p)}^{TN} Z_p \in T_{F(p)}N. \quad (2)$$

BEWEIS. Wir beweisen zunächst Eindeutigkeit. Sei  $p \in M$ , sei  $\psi$  eine Karte von  $N$  um  $F(p)$ , und sei  $U = F^{-1}(U^\psi)$ . Mit Hilfe von Abschneidefunktionen auf  $M$  sehen wir, dass  $\nabla_X^F Y|_p$  für alle  $Y \in \mathfrak{X}(F)$  nur von  $Y|_U$  abhängt. Aus Bemerkung 1.60 (4), Definition 1.61 (3) und Eigenschaft (1) folgt

$$\begin{aligned} \nabla_X^F Y|_U &= \nabla_X^F \sum_{i=1}^n Y(\psi^i) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \psi^i} \circ F \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( X(Y(\psi^i)) \left( \frac{\partial}{\partial \psi^i} \circ F \right) + Y(\psi^i) \nabla_{dF \circ X}^{TN} \frac{\partial}{\partial \psi^i} \right). \end{aligned} \quad (*)$$

Also ist  $\nabla^F$  eindeutig.

Zur Existenz überprüfen wir zuerst, dass obige Formel (\*) für jede Karte  $\psi$  von  $N$  einen lokalen Zusammenhang längs  $F|_{F^{-1}(U^\psi)}$  mit der geforderten Eigenschaft definiert. Sei dann  $\varphi$  eine weitere Karte von  $N$ , dann stimmen aufgrund der obigen Eindeutigkeitsaussage die mit Hilfe von  $\varphi$

und  $\psi$  konstruierten Zusammenhang auf  $F^{-1}(U^\varphi \cap U^\psi)$  überein. Also erhalten wir eine Abbildung  $\nabla^F: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(F) \rightarrow \mathfrak{X}(F)$  durch Zusammensetzen der lokalen Definitionen. Wir müssen überprüfen, dass  $\nabla^F$  einen Zusammenhang längs  $F$  mit der Eigenschaft (1) definiert, aber diese Rechnungen wollen wir hier nicht durchführen.

Behauptung (2) rechnet man am einfachsten in lokalen Koordinaten nach. Sei dazu  $\varphi$  eine Karte von  $M$  um  $p$  und  $\psi$  eine Karte von  $N$  um  $F(p)$ . Schreibe

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi^a} = \sum_{i=1}^n \left( dF \circ \frac{\partial}{\partial \varphi^a} \right) (\psi^i) \left( \frac{\partial}{\partial \psi^i} \circ F \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\psi^i \circ F)}{\partial \varphi^a} \left( \frac{\partial}{\partial \psi^i} \circ F \right),$$

dann gilt wegen Eigenschaft (1), dass

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^a}}^F \left( \frac{\partial}{\partial \psi^j} \circ F \right) = \nabla_{\frac{\partial F}{\partial \varphi^a}}^{TN} \frac{\partial}{\partial \psi^j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\psi^i \circ F)}{\partial \varphi^a} \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial \psi^i}}^{TN} \frac{\partial}{\partial \psi^j} \right) \circ F.$$

Wir können jetzt die Krümmung berechnen und erhalten

$$\begin{aligned} R_{\frac{\partial}{\partial \varphi^a}, \frac{\partial}{\partial \varphi^b}}^F \left( \frac{\partial}{\partial \psi^k} \circ F \right) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^a}}^F \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\psi^j \circ F)}{\partial \varphi^b} \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial \psi^j}}^{TN} \frac{\partial}{\partial \psi^k} \circ F \right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^b}}^F \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\psi^i \circ F)}{\partial \varphi^a} \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial \psi^i}}^{TN} \frac{\partial}{\partial \psi^k} \circ F \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2(\psi^j \circ F)}{\partial \varphi^a \partial \varphi^b} \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial \psi^j}}^{TN} \frac{\partial}{\partial \psi^k} \circ F \right) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2(\psi^i \circ F)}{\partial \varphi^a \partial \varphi^b} \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial \psi^i}}^{TN} \frac{\partial}{\partial \psi^k} \circ F \right) \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial(\psi^i \circ F)}{\partial \varphi^a} \frac{\partial(\psi^j \circ F)}{\partial \varphi^b} \left( \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial \psi^i}}^{TN} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \psi^j}}^{TN} \frac{\partial}{\partial \psi^k} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial \psi^j}}^{TN} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \psi^i}}^{TN} \frac{\partial}{\partial \psi^k} \right) \circ F \right) \\ &= \sum_{i,j,l=1}^n \frac{\partial(\psi^i \circ F)}{\partial \varphi^a} \frac{\partial(\psi^j \circ F)}{\partial \varphi^b} \left( R_{\frac{\partial}{\partial \psi^i}, \frac{\partial}{\partial \psi^j}}^{TN} \frac{\partial}{\partial \psi^k} \circ F \right) = R_{\frac{\partial F}{\partial \varphi^a}, \frac{\partial F}{\partial \varphi^b}}^{TN} \frac{\partial}{\partial \psi^k}. \quad \square \end{aligned}$$

1.63. BEMERKUNG. Ab sofort sei stets  $\nabla^{TN}$  der Levi-Civita-Zusammenhang und  $\nabla^F$  der dadurch induzierte Zusammenhang längs einer Abbildung  $F$ . Wir haben die folgenden Eigenschaften.

(1) *Torsionsfreiheit*: es gilt

$$\nabla_X^F(dF \circ Y) - \nabla_Y^F(dF \circ X) = dF \circ [X, Y] \in \mathfrak{X}(F)$$

für alle  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Seien dazu  $\varphi$  und  $\psi$  Karten von  $M$  bzw.  $N$ , dann ist  ${}^\psi \Gamma_{ij}^k$  symmetrisch in  $i, j$  wegen der Torsionsfreiheit von  $\nabla$ . Wir sehen, dass

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^a}}^F \frac{\partial F}{\partial \varphi^b} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2(\psi^k \circ F)}{\partial \varphi^a \partial \varphi^b} \left( \frac{\partial}{\partial \psi^k} \circ F \right) + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial(\psi^i \circ F)}{\partial \varphi^a} \frac{\partial(\psi^j \circ F)}{\partial \varphi^b} \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial \psi^i}}^{TN} \frac{\partial}{\partial \psi^j} \circ F \right) \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^b}}^F \frac{\partial F}{\partial \varphi^a}, \end{aligned}$$

da der obige Ausdruck symmetrisch in  $a$  und  $b$  ist. Hieraus folgt die allgemeine Formel leicht mit der Produktregel für die Lie-Klammer aus Bemerkung 1.30.

(2) Der Zusammenhang ist auch *metrisch*:

$$X(\langle Y, Z \rangle) = \langle \nabla_X^F Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X^F Z \rangle$$

für alle  $X \in \mathfrak{X}(M)$  und alle  $Y, Z \in \mathfrak{X}(F)$ . Falls  $Y = V \circ F$  und  $Z = W \circ F$  mit  $V, W \in \mathfrak{X}(N)$  gilt, folgt das sofort aus

$$X(\langle Y, Z \rangle) = X(\langle V, W \rangle \circ F) = \langle \nabla_{dF \circ X} V, Z \rangle + \langle Y, \nabla_{dF \circ X} W \rangle = \langle \nabla_X^F Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X^F Z \rangle .$$

Für beliebige Vektorfelder gehen wir vor wie bei der Konstruktion von  $\nabla^F$  im Beweis von Proposition 1.62.

Im Falle einer Kurve  $F = \gamma$  sei stets

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial \gamma}{\partial t} \quad \text{und} \quad \ddot{\gamma} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial t} \in \mathfrak{X}(\gamma) .$$

Wir kommen nun zur ersten Variationsformel der Bogenlänge. Wir erinnern uns dazu an die Definition von Produktmannigfaltigkeiten aus den Übungen, mit

$$T(M \times N) = TM \times TN .$$

1.64. DEFINITION. Sei  $F: M \rightarrow N$  eine Abbildung. Eine *Variation von  $F$*  ist eine Abbildung  $\bar{F}: M \times I \rightarrow N$ , wobei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall mit  $0 \in I$  ist, so dass

$$\bar{F}(p, 0) = F(p) \quad \text{für alle } p \in M .$$

Wir schreiben  $F_s(p) = \bar{F}(p, s)$  für alle  $p \in M$  und  $s \in I$ . Das *Variationsvektorfeld* von  $\bar{F}$  ist definiert als

$$V = \frac{\partial \bar{F}}{\partial s} = d\bar{F} \circ \frac{\partial}{\partial s} \in \mathfrak{X}(\bar{F}) .$$

1.65. SATZ (Erste Variation der Bogenlänge). *Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $\gamma: I \rightarrow M$  nach Bogenlänge parametrisiert, und sei  $\bar{\gamma}: I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  eine Variation von  $\gamma$ . Dann gilt*

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} L(\gamma_s|_{[a,b]}) = \langle \dot{\gamma}(t), V(t) \rangle \Big|_{t=a}^b - \int_a^b \langle \ddot{\gamma}(t), V(t) \rangle dt .$$

Der erste Ausdruck gibt an, wie sehr sich die Kurve dadurch verkürzt oder verlängert, dass man Anfangs- und Endpunkt in Richtung der Kurve bewegt. Der zweite kommt daher, dass sich die Kurve bei Variation in Richtung ihres Krümmungsvektors  $\ddot{\gamma}$  verkürzt.

BEWEIS. Wir benutzen die Rechenregeln aus Bemerkung 1.63. Wenn  $\bar{\gamma}$  von der Klasse  $\mathcal{C}^2$  ist, dürfen wir in das Integral hinein differenzieren, und erhalten

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} L(\gamma_s|_{[a,b]}) &= \int_a^b \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \sqrt{\langle \dot{\gamma}(t, s), \dot{\gamma}(t, s) \rangle} dt \\ &= \int_a^b \frac{2 \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}^{\bar{\gamma}} \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t}, \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t}(t, 0) \right\rangle}{2 \left\langle \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t}(t, 0), \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t}(t, 0) \right\rangle} dt = \int_a^b \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}^{\bar{\gamma}} \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t}, \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t}(t, 0) \right\rangle dt \\ &= \int_a^b \left( \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s}, \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t}(t, 0) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial s}(t, 0), \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\bar{\gamma}} \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t} \right\rangle \right) dt \\ &= \langle \dot{\gamma}(t), V(t) \rangle \Big|_{t=a}^b - \int_a^b \langle \ddot{\gamma}(t), V(t) \rangle dt . \quad \square \end{aligned}$$

Wenn wir also Anfangs- und Endpunkt festhalten, verschwindet die erste Ableitung genau dann für alle Variationen von  $\gamma$ , wenn bereits die Differentialgleichung  $\ddot{\gamma} = 0$  gilt. Sollte es also eine kürzeste Verbindung von  $\gamma(a)$  nach  $\gamma(b)$  geben, so müsste sie diese Differentialgleichung erfüllen.

1.66. DEFINITION. Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine *geodätische Linie* oder kurz *Geodätische* auf  $(M, g)$  ist eine Kurve  $c: I \rightarrow M$ , die der Differentialgleichung  $\ddot{c} = 0$  genügt.

1.67. BEMERKUNG. Man beachte, dass wir nun nicht mehr fordern, dass eine Geodätische  $c$  nach Bogenlänge parametrisiert ist. Es gilt aber immerhin

$$\frac{\partial}{\partial t} \|\dot{c}(t)\|^2 = 2\langle \ddot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle = 0,$$

d.h., Geodätische sind *proportional zur Bogenlänge* parametrisiert.

1.68. BEISPIEL. Sei  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  Geodätische bezüglich der Euklidischen Standardmetrik, dann ist  $\ddot{c} = 0$ , somit  $\dot{c}$  konstant. Also existieren  $x_0, v \in \mathbb{R}^n$  mit

$$c(t) = x_0 + tv.$$

1.69. FOLGERUNG. *Es sei  $(M, g)$  Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $p, q \in M$ . Wenn es eine kürzeste  $C^2$ -Kurve  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  mit  $\gamma(a) = p$  und  $\gamma(b) = q$  gibt, dann ist  $\gamma$  bis auf Umparametrisierung eine Geodätische.*

BEWEIS. Sei  $\gamma$  eine Kurve in  $M$  mit  $\gamma(a) = p$  und  $\gamma(b) = q$ . Da die Bogenlänge von  $\gamma$  nach Bemerkung 1.58 (1) nicht von der Parametrisierung abhängt, dürfen wir annehmen, dass  $\gamma$  nach Bogenlänge parametrisiert ist.

Wir nehmen an, dass  $\ddot{\gamma}(t_0) \neq 0$  für ein  $t_0 \in [a, b]$ . Aufgrund der Stetigkeit von  $\ddot{\gamma}$  dürfen wir  $t_0 \in (a, b)$  annehmen. Wähle eine Karte  $\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi$  um  $\gamma(t_0)$ , ein Intervall  $I \subset (a, b) \cap \gamma^{-1}(U^\varphi)$  um  $t_0$  und eine Abschneidefunktion  $\rho: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  um  $t_0$  mit  $\text{supp } \rho \subset I$ . Dann können wir für  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein eine Variation  $\bar{\gamma}: [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$  von  $\gamma$  konstruieren, so dass  $\gamma_s(t) = \gamma(t)$  für alle  $t \in [a, b] \setminus I$  und

$$\varphi(\gamma_s(t)) = \varphi(\gamma(t)) + s \cdot \rho(t) \cdot (\ddot{\gamma}(t))_\varphi$$

für alle  $t \in I$ . Es gilt also insbesondere  $\gamma_s(a) = p, \gamma_s(b) = q$  für alle  $s$ , das Variationsfeld ist  $V = \rho \cdot \ddot{\gamma}$ , und

$$\int_a^b \langle \ddot{\gamma}(t), V(t) \rangle dt = \int_I \rho(t) \langle \ddot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t) \rangle dt > 0.$$

Aus der ersten Variationsformel aus Satz 1.65 folgt

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(\gamma_s) < 0,$$

und daher  $L(\gamma_s) < L(\gamma)$  für alle hinreichend kleinen  $s > 0$ . Also ist eine Kurve  $\gamma$  mit  $\ddot{\gamma}(t_0) \neq 0$  niemals kürzeste Verbindung ihrer Endpunkte.  $\square$

1.70. BEMERKUNG. Die Existenz einer kürzesten Verbindung zwischen  $p$  und  $q$  in  $M$  ist nicht selbstverständlich. Sei beispielsweise  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und nicht konvex, dann gibt es Punkte, die sich nicht durch eine kürzeste Kurve verbinden lassen. Etwa gibt es in  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  keine kürzeste Kurve von  $p$  nach  $-p$ , wobei  $p \neq 0$ .

#### 1.4. Exponentialabbildung und Jacobifelder

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass es durch jeden Punkt auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit in jeder Richtung eine maximale Geodätische gibt. Diese Tatsache benutzen wir, um die Exponentialabbildung zu konstruieren. Anschließend betrachten wir ihre Ableitung.

Wir beginnen mit der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen und der differenzierbaren Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.

1.71. DEFINITION. Es seien  $(M, d_M), (N, d_N)$  metrische Räume. Eine Abbildung  $F: M \rightarrow N$  heißt *Lipschitz-stetig* mit *Lipschitz-Konstante*  $\Lambda$  (kurz  $\Lambda$ -Lipschitz), wenn

$$d_N(F(p), F(q)) \leq \Lambda \cdot d_M(p, q)$$

für alle  $p, q \in M$  gilt. Sei  $X$  ein topologischer Raum, dann heißt  $F: M \times X \rightarrow N$  *Lipschitz-stetig in Richtung von  $M$*  mit Lipschitz-Konstante  $\Lambda$ , wenn für alle  $x \in X$  die Abbildung  $F(\cdot, x): M \rightarrow N$   $\Lambda$ -Lipschitz ist.

Wir nennen  $F: M \rightarrow N$  *lokal Lipschitz* (bzw.  $F: M \times X \rightarrow N$  *lokal Lipschitz in Richtung von  $M$* ), wenn für jeden Punkt  $p \in M$  ( $p \in M \times X$ ) eine Umgebung  $U$  von  $p$  und eine Konstante  $\Lambda$  existiert, so dass  $F|_U$  die entsprechende Eigenschaft besitzt.

- 1.72. BEMERKUNG. (1) Lokal Lipschitz-stetige Funktionen sind insbesondere stetig.  
 (2) Seien  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $V \subset \mathbb{R}^m$  offen und  $F \in \mathcal{C}^1(U; V)$ ; dann ist  $F$  lokal Lipschitz. Wenn

$$\Lambda = \sup_{p \in U} \|dF_p\|_{\text{op}} < \infty,$$

existiert und  $U$  konvex ist, ist  $\Lambda$  eine globale Lipschitz-Konstante für  $F$ .

1.73. SATZ (Picard-Lindelöf). *Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  offen mit  $U \times \{0\} \subset V$ , und es sei  $X: V \rightarrow \mathbb{R}^n$  lokal Lipschitz-stetig in Richtung  $\mathbb{R}^n$ .*

- (1) *Dann existieren eine unterhalbstetige Funktion  $t_+: U \rightarrow (0, \infty]$ , eine oberhalbstetige Funktionen  $t_-: U \rightarrow [-\infty, 0)$  und eine stetige Abbildung*

$$\begin{aligned} & F: W = \{ (p, t) \mid p \in U, t \in (t_-(p), t_+(p)) \} \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \text{mit} \quad & F(\cdot, 0) = \text{id}_U, \\ & (F(p, t), t) \in V \quad \text{für alle } (p, t) \in W, \\ \text{und} \quad & \frac{\partial F}{\partial t}(p, t) = X(F(p, t), t) \quad \text{auf ganz } W. \end{aligned} \quad (*)$$

- (2) *Wenn  $t'_-, t'_+$  und  $F': W' \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Eigenschaften aus (1) haben, gilt  $t_- \leq t'_-, t'_+ \leq t_+$  und  $F' = F|_{W'}$ .*  
 (3) *Wenn  $X \in \mathcal{C}^k(V)$  für  $1 \leq k \leq \infty$  gilt, dann gilt auch  $F \in \mathcal{C}^k(W)$ .*

BEWEIS. Wir zeigen zunächst lokale Existenz und Eindeutigkeit. Globale Existenz und Eindeutigkeit lassen sich daraus leicht ableiten.

Sei zunächst  $p \in U$ , dann existieren  $r > 0$ ,  $0 < C < \infty$  und  $0 < t_0 \leq \min\{\frac{r}{C}, \frac{1}{C}\}$ , so dass

$$\overline{B_{2r}(p)} \times [-t_0, t_0] \subset V, \quad (1.4)$$

$$|X|_{\overline{B_{2r}(p)} \times (-t_0, t_0)}| < C, \quad (1.5)$$

$$\text{und } \frac{C}{2} \text{ ist Lipschitz-Konstante für } X|_{\overline{B_{2r}(p)} \times \{t\}} \text{ für alle } t \in [-t_0, t_0]. \quad (1.6)$$

Aufgrund der Voraussetzungen des Satzes lassen sich die Annahmen (1.4)–(1.6) leicht erfüllen. Wir betrachten den Raum

$$\mathcal{C} = \{F \in \mathcal{C}^0(B_r(p) \times (-t_0, t_0); \overline{B_{2r}(p)}) \mid F(q, 0) = q \text{ für alle } q \in B_r(p)\}$$

mit der Supremumsmetrik. Für  $F \in \mathcal{C}$ ,  $q \in B_r(p)$  und  $t \in (-t_0, t_0)$  definiere

$$TF(q, t) = q + \int_0^t X(F(q, \tau), \tau) d\tau.$$

Dann ist  $TF: B_r(p) \times (-t_0, t) \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig mit  $TF(q, 0) = q$ , und aus (1.4) und (1.5) oben folgt

$$d(TF(q, t), p) \leq d(q, p) + t_0 \cdot C < 2r$$

für alle  $q \in B_r(p)$ ,  $t \in (-t_0, t_0)$ , so dass  $TF \in \mathcal{C}$ .

Der Operator  $T$  wirkt außerdem kontrahierend auf  $\mathcal{C}$  wegen (1.6), denn

$$\begin{aligned} |(TF_1 - TF_0)(q, t)| &\leq \int_0^t |X(F_1(q, \tau), \tau) - X(F_0(q, \tau), \tau)| d\tau \\ &< t_0 \cdot \frac{C}{2} \cdot |F_1 - F_0|_{\mathcal{C}} \leq \frac{1}{2} |F_1 - F_0|_{\mathcal{C}} . \end{aligned}$$

Da  $\overline{B_{2r}(p)}$  vollständig ist, ist auch  $\mathcal{C}$  mit der Supremumsmetrik vollständig. Nach dem Fixpunktsatz von Banach existiert also ein eindeutiger Fixpunkt  $F$  von  $T$  auf  $\mathcal{C}$ . Für alle  $q \in B_r(p)$ ,  $t \in (-t_0, t_0)$  folgt

$$\frac{\partial F}{\partial t}(q, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t X(F(q, \tau), \tau) d\tau = X(F(q, t)) .$$

Sei umgekehrt  $F' : B_r(p) \times (-t_0, t_0) \rightarrow V$  eine Abbildung mit  $\frac{\partial F'}{\partial t}(q, t) = X(F'(q, t), t)$  für alle  $(q, t)$ . Aus (1.5) oben folgt im  $F' \subset \overline{B_{2r}(p)}$ , somit  $F' \in \mathcal{C}$ . Außerdem gilt

$$TF'(q, t) = q + \int_0^t X(F'(q, \tau), \tau) d\tau = F'(q, 0) + \int_0^t \frac{\partial F'}{\partial \tau}(q, \tau) d\tau = F'(q, t) ,$$

also ist  $F'$  ein Fixpunkt von  $T$  und somit  $F' = F$ . Also ist der obige Fixpunkt  $F$  die einzige Lösung der Differentialgleichung (\*) auf dem Definitionsbereich  $B_r(p) \times (-t_0, t_0)$ .

Wir kommen zur Aussage (3), wieder zunächst lokal und nur für  $k = 1$ . Wir kennen bereits die eindeutige Lösung  $F$ . Die partielle Ableitung  $\frac{\partial F}{\partial t}$  existiert und ist stetig wegen (\*). Es reicht also, die Existenz und Stetigkeit von  $\frac{\partial F}{\partial x^i}$  für  $i = 1, \dots, n$  zu überprüfen.

Wir bestimmen zunächst  $G : B_r(p) \times \mathbb{R}^n \times (-t_0, t_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $G(q, v, 0) = v$  für alle  $q \in B_r(p)$  und

$$\frac{\partial G}{\partial t}(q, v, t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial X}{\partial x^j}(F(q, t), t) \cdot G^j(q, v, t) , \quad (**)$$

denn die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial F}{\partial x^i}(q, t)$  erfüllen (\*\*) mit Anfangswert  $e_i$ , wenn  $F$  stetig differenzierbar ist. Dabei betrachten wir  $q \in B_r(p)$  als zusätzlichen Parameter. Die Funktion  $(v, t) \mapsto dX_{(F(q,t),t)}(v, 0)$  ist Lipschitz-stetig in  $v$  mit Lipschitz-Konstante  $\|dX_{(F(q,t),t)}\|_{\text{op}}$ , die stetig von  $q$  und  $t$  abhängt, da  $X \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R}^n)$ . Gegebenenfalls nach Verkleinern von  $t_0$  existiert daher eine Lösung  $G(q, v, t)$  von (\*\*) mit Anfangswert  $v$ . Schreibe  $G_i(q, t) = G(q, e_i, t)$ .

Wir wollen zeigen, dass  $\frac{\partial F}{\partial x^i}(q, t) = G_i(q, t)$  für alle  $(q, t) \in B_r(p) \times (-t_0, t_0)$ , und dass  $\frac{\partial F}{\partial x^i}$  stetig ist. Sei dazu  $T$  wie im ersten Teil des Beweises, und  $F_0(q, t) = q$ , insbesondere ist  $F_0 \in \mathcal{C}$  und von Klasse  $\mathcal{C}^1$ . Wie im Banachschen Fixpunktsatz ist der Fixpunkt  $F$  von  $T$  gleichmäßiger Limes der „Picard-Iterierten“

$$F_\nu = T^\nu F_0 \in \mathcal{C} .$$

Für die Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\nu+1}}{\partial x^i}(q, t) &= \frac{\partial q}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial x^i} \int_0^t X(F_\nu(q, \tau), \tau) d\tau \\ &= e_i + \int_0^t \sum_{j=1}^n \frac{\partial X}{\partial x^j}(F_\nu(q, \tau), \tau) \frac{\partial F_\nu^j}{\partial x^i}(q, \tau) d\tau , \end{aligned}$$

so dass insbesondere  $F_\nu \in \mathcal{C}$  für alle  $\nu$  auch von Klasse  $\mathcal{C}^1$  ist. Es gilt sogar  $|\frac{\partial F_\nu}{\partial x^i}(q, t)| \leq 2$  für  $i = 1, \dots, n$ , denn für  $F_0$  gilt  $\frac{\partial F_0}{\partial x^i}(q, t) = \frac{\partial q}{\partial x^i} = e_i$ . Dazu wählen wir  $r, t, C$  wie oben so, dass zusätzlich

$$\|dX_q\|_{\text{op}} < \frac{1}{2nt_0} \quad \text{für alle } q \in \overline{B_{2r}(p)} . \quad (1.7)$$

Dann ist  $\frac{1}{2nt_0}$  Lipschitz-Konstante für  $dX_q$  in Ableitungsrichtung auf ganz  $\mathbb{R}^n$ . Jetzt folgt durch Induktion über  $\nu$ , dass

$$\left| \frac{\partial F_{\nu+1}}{\partial x^i}(q, t) \right| \leq |e_i| + \int_0^t \sum_{j=1}^n \underbrace{\left| \frac{\partial X}{\partial x^j}(F_\nu(q, \tau), \tau) \right|}_{< \frac{1}{2nt_0}} \cdot \underbrace{\left| \frac{\partial F_\nu^j}{\partial x^i}(q, \tau) \right|}_{< 2} d\tau < 1 + 1 = 2.$$

Analog dazu erfüllen die Lösungen  $G_i$  von (\*\*) die Gleichung

$$G_i(t) = G_i(0) + \int_0^t \frac{\partial G_i}{\partial \tau}(\tau) d\tau = e_i + \int_0^t \sum_{j=1}^n \frac{\partial X}{\partial x^j}(F(q, \tau), \tau) \cdot G_i^j(q, \tau) d\tau.$$

Wir betrachten die Folge der Differenzen  $\frac{\partial F_\nu}{\partial x^i}(q, t) - G_{q,i}(t)$ , und erhalten

$$\begin{aligned} \left| \left( \frac{\partial F_{\nu+1}}{\partial x^i} - G_i \right)(q, t) \right| &\leq \int_0^t \sum_{j=1}^n \left( \left| \frac{\partial X}{\partial x^j}(F_\nu(q, \tau), \tau) - \frac{\partial X}{\partial x^j}(F(q, \tau), \tau) \right| \cdot \underbrace{\left| \frac{\partial F_\nu^j}{\partial x^i}(q, \tau) \right|}_{\leq 2} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\left| \frac{\partial X}{\partial x^j}(F(q, \tau), \tau) \right|}_{< \frac{1}{2nt_0}} \cdot \left| \left( \frac{\partial F_\nu^j}{\partial x^i} - G_i \right)(q, \tau) \right| \right) d\tau. \end{aligned}$$

Für

$$d_\nu = \sup \left\{ \left| \left( \frac{\partial F_\nu}{\partial x^i} - G_i \right)(q, t) \right| \mid i = 1, \dots, n, q \in B_r(p), |t| \leq t_0 \right\}$$

folgt daraus

$$d_{\nu+1} < 2nt_0 \cdot \sup_{(q,t)} \left| \frac{\partial X}{\partial x^j}(F_\nu(q,t), t) - \frac{\partial X}{\partial x^j}(F(q,t), t) \right| + \frac{d_\nu}{2}.$$

Da  $dX$  stetig ist, ist  $dX$  auf dem Kompaktum  $\overline{B_{2r}(p)} \times [-t_0, t_0]$  gleichmäßig stetig. Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert also ein  $\delta > 0$ , so dass

$$\left| \frac{\partial X}{\partial x^j}(x, t) - \frac{\partial X}{\partial x^j}(y, t) \right| < \frac{\varepsilon}{2nt_0}$$

für alle  $x, y \in \overline{B_{2r}(p)}$  mit  $|x - y| < \delta$  und alle  $t \in [t_0, t_0]$ . Da die Picard-Iterierten  $F_\nu$  gleichmäßig gegen  $F$  konvergieren, gibt es ein  $N$ , so dass  $|F_\nu(q, t) - F(q, t)| < \delta$  für alle  $q, t$  und alle  $\nu \geq N$ . Für  $\nu \geq N$  gilt  $0 \leq d_{\nu+1} < \varepsilon + \frac{d_\nu}{2}$ , also insbesondere

$$d_{\nu+1} - 2\varepsilon < \frac{d_\nu - 2\varepsilon}{2}.$$

Hieraus folgt sofort, dass  $d_\nu < 3\varepsilon$  für alle hinreichend großen  $\nu$ . Da das für alle  $\varepsilon > 0$  gilt, folgt schließlich

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} d_\nu = 0.$$

Wir haben also gezeigt, dass die stetigen Funktionen  $\frac{\partial F_\nu}{\partial x^i}$  gleichmäßig gegen  $G_i(q, t) = G_{q,i}(t)$  konvergieren. Mit einem Satz aus der Analysis folgt daraus, dass  $\frac{\partial F}{\partial x^i} = G_i$  stetig ist für alle  $i$ .

Wir zeigen Aussage (3) für  $k > 1$  durch vollständige Induktion. Sei also (3) für  $k \geq 1$  bereits lokal wie oben bewiesen, sei  $X \in \mathcal{C}^{k+1}(V, \mathbb{R}^n)$ , und sei  $F \in \mathcal{C}^k(B_r(p) \times (-t_0, t_0), U)$  eine Lösung von (\*). Dann gilt zunächst

$$\frac{\partial F}{\partial t}(q, t) = X(F(q, t), t),$$



also  $\frac{\partial F}{\partial t} \in \mathcal{C}^k(B_r(p) \times (-t_0, t_0), U)$ .

Es bezeichne wieder  $G: B_r(p) \times \mathbb{R}^n \times (-t_0, t_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  die  $\mathcal{C}^{k-1}$ -Funktion mit

$$G(q, v, t) = dF_{(q,t)}(v, 0) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial F}{\partial x^i}(q, t),$$

dann erfüllt das Paar  $(F, G): B_r(p) \times \mathbb{R}^n \times (-t_0, t) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$  eine Differentialgleichung ähnlich wie (\*\*) mit  $\mathcal{C}^k$ -Koeffizienten, nämlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial(F, G)}{\partial t}(q, v, t) &= \left( X(F(q, t), t), \sum_{i,j=1}^n v^i \cdot \frac{\partial X}{\partial x^j}(F(q, t), t) \cdot \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(q, t) \right) \\ &= \left( X(F(q, t), t), \sum_{i=1}^n \frac{\partial X}{\partial x^i}(F(q, t), t) \cdot G^i(q, v, t) \right). \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist  $(F, G)$  eine  $\mathcal{C}^k$ -Funktion, insbesondere also auch die Funktionen

$$\frac{\partial F}{\partial x^i}(q, t) = G(q, e_i, t),$$

eventuell nach Verkleinern von  $r$  und  $t$ . Alle partiellen Ableitungen von  $F$  sind demnach  $\mathcal{C}^k$ -Funktionen, also ist  $F$  selbst eine  $\mathcal{C}^{k+1}$ -Funktion.

Es bleibt die globale Existenz und Eindeutigkeit in (1) zu zeigen. Da Differenzierbarkeit eine lokale Eigenschaft ist, reicht es, die stetigen Lösungen aus dem ersten Schritt zu betrachten. Seien dazu zunächst für  $p \in U$  die Funktionen  $f_i: (t_{i-}, t_{i+}) \rightarrow U$  mit  $t_{i-} < 0 < t_{i+}$  für  $i = 1, 2$  Lösungen von (\*), also

$$f_i'(t) = X(f_i(t), t)$$

mit Anfangswerten  $f_1(0) = f_2(0) = p$ . Angenommen, es gebe  $t \in (t_{1-}, t_{1+}) \cap (t_{2-}, t_{2+})$  mit  $f_1(t) \neq f_2(t)$ , ohne Einschränkung  $t > 0$ , dann sei

$$t_0 = \inf\{t \in (0, t_{1+}) \cap (0, t_{2+}) \mid f_1(t) \neq f_2(t)\}.$$

Wegen Stetigkeit gilt  $f_1(t_0) = f_2(t_0)$ . Wir betrachten das „verschobene Problem“

$$\frac{\partial}{\partial s} f_i(t_0 + s) = X(f_i(t_0 + s), t_0 + s)$$

mit Anfangswert  $f_1(t_0) = f_2(t_0)$  bei  $s = 0$ . Wegen der lokalen Existenz und Eindeutigkeit existiert  $\varepsilon > 0$ , so dass die Lösungen für  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  eindeutig sind, also  $f_1(t_0 + s) = f_2(t_0 + s)$  für alle hinreichend kleinen  $s > 0$ , im Widerspruch zur Konstruktion von  $t_0$ . Folglich sind einzelne Lösungen eindeutig. Wir erhalten eine maximale Lösung  $f_{\max}$  auf der Vereinigung  $(t_-, t_+)$  aller Intervalle, auf denen eine Lösung  $f$  mit  $f(0) = p$  existiert, indem wir für jedes  $t \in (t_-, t_+)$  den Wert einer solchen Lösung, die bei  $t$  definiert ist, auswählen. Dafür schreiben wir

$$f_{\max} = \bigcup \{ f: (t_-, t_+) \rightarrow V \mid t_- < 0 < t_+, f(0) = p \text{ und } f'(t) = X(f(t), t) \}.$$

Indem wir dieses Argument für alle  $p \in U$  durchführen, bestimmen wir  $t_-, t_+: U \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , die Menge  $W \subset U \times \mathbb{R}$  und  $F = F_{\max}: W \rightarrow U$ .  $\square$

1.74. BEMERKUNG. (1) Wenn die maximale Lösung bei  $(p, t) \in W$  existiert, existiert sie auch in einer kleinen Umgebung. Also ist die Menge  $W \subset U \times \mathbb{R}$  offen, und die Funktionen  $t_-, t_+$  sind ober- bzw. unterhalbstetig auf  $U$ . Mehr Regularität können wir auch im  $\mathcal{C}^\infty$ -Fall nicht erwarten.

- (2) Wenn  $(t_-(p), t_+(p))$  das maximale Definitionsintervall der Lösung  $f_p(t) = F(p, t)$  ist und  $t_-(p) > -\infty$  bzw.  $t_+(p) < \infty$ , dann existieren die Grenzwerte

$$\lim_{t \searrow t_-(p)} (F(p, t), t) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{t \nearrow t_+(p)} (F(p, t), t)$$

nicht in  $V$ , denn andernfalls könnten wir die Lösung vom Grenzwert als neuem Anfangswert zur Zeit  $t_{\pm}(p)$  aus noch ein Stück fortsetzen, im Widerspruch zur Maximalität des Intervalls  $(t_-(p), t_+(p))$ .

- (3) Die Existenz und Eindeutigkeit einer globalen  $C^k$ -Lösung  $F: W \rightarrow U$  impliziert, dass die einzelnen Lösungen  $f_p: (t_-(p), t_+(p)) \rightarrow U$  eindeutig sind und  $C^k$ -differenzierbar vom Anfangswert  $p$  abhängen. Mit einem kleinen Trick kann man auch zeigen, dass die Lösungen  $C^k$ -differenzierbar von den Koeffizienten  $X$  abhängen. Der Fall  $k = 0$  ist ein Sonderfall, da wir eine Lipschitz-Bedingung an  $X$  stellen müssen — für  $k \geq 1$  ist keine Lipschitz-Bedingung an die  $k$ -fachen Ableitungen  $\frac{\partial^{|\alpha|} X}{\partial X^\alpha}$  mit  $|\alpha| = k$  nötig.
- (4) Wenn die Koeffizienten  $X$  von (\*) nur stetig, aber nicht Lipschitz-stetig in Richtung von  $U$  sind, existieren nach dem Satz von Peano zwar immer noch Lösungen  $f: (t_-, t_+) \rightarrow U$  mit vorgegebenem Anfangswert  $f(0) = p$ ; diese sind jedoch im allgemeinen nicht eindeutig. Dementsprechend können wir keine stetige globale Lösung  $F: W \rightarrow U$  erwarten (Übung).

1.75. SATZ. Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche  $C^k$ -Mannigfaltigkeit mit  $k \geq 3$  und  $g$  eine  $C^{k-1}$ -Metrik. Dann existiert zu jedem  $p \in M$  und jedem Vektor  $v \in T_p M$  eine eindeutige Geodätische  $c = c_v: I \rightarrow M$  mit maximalem Definitionsbereich  $I \subset \mathbb{R}$ , so dass  $c_v(0) = p$  und  $\dot{c}_v(0) = v$ .

BEWEIS. Dieser Satz folgt aus dem Satz von Picard-Lindelöf. Um das einzusehen, schreiben wir die Geodätischengleichung in lokalen Koordinaten  $\varphi$  von  $M$  um  $p = \pi(v)$ . Wie in Bemerkung 1.63 (1) erhalten wir

$$\ddot{c}(t) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^c \frac{\partial c}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2(\varphi^i \circ c)}{\partial t^2} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \circ c \right) + \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial(\varphi^i \circ c)}{\partial t} \frac{\partial(\varphi^j \circ c)}{\partial t} \left( (\varphi \Gamma_{ij}^k \circ \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi^k} \right) \circ c.$$

Wenn wir  $\varphi c = \varphi \circ c: I \rightarrow V^\varphi$  schreiben, ist lokal also das nichtlineare System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\varphi \ddot{c}^k(t) = - \sum_{i,j=1}^n \varphi \Gamma_{ij}^k(\varphi c(t)) \varphi \dot{c}^i(t) \varphi \dot{c}^j(t) \quad \text{für alle } k = 1, \dots, n$$

mit den Anfangsbedingungen  $\varphi c(0) = \varphi(p)$  und  $\varphi \dot{c}(0) = v_\varphi$  zu lösen. Wir schreiben es als ein System von Gleichungen erster Ordnung

$$\frac{d}{dt}(\varphi c(t), \varphi \dot{c}(t)) = \left( \varphi \dot{c}(t), - \sum_{i,j=1}^n \varphi \Gamma_{ij}^k(\varphi c(t)) \varphi \dot{c}^i(t) \varphi \dot{c}^j(t) e_k \right).$$

Dieses System hat eine eindeutige maximale lokale Lösung mit Definitionsbereich  $I_\varphi$ , denn da  $k \geq 3$ , sind die Christoffelsymbole stetig differenzierbar.

Wir wollen aber eine maximale globale Lösung konstruieren. Dazu betrachten wir alle Kurven  $c: I \rightarrow M$ , die der Gleichung  $\ddot{c} = 0$  mit der Anfangsbedingung  $\gamma(0) = p$  und  $\dot{\gamma}(0) = v$  genügen. Wie im letzten Schritt des Beweis von Satz 1.73 sieht man leicht, dass je zwei solche Lösungen  $c_i: I_i \rightarrow \mathbb{R}$  für  $i = 1, 2$  auf  $I_1 \cap I_2$  übereinstimmen. Wir erhalten also eine eindeutige maximale Lösung

$$c_v = \bigcup \{ c: I \rightarrow M \mid 0 \in I \subset \mathbb{R} \text{ offenes Intervall, } c(0) = p, \dot{c}(0) = v \text{ und } \ddot{c} = 0 \}. \quad \square$$

Wir können alle Geodätischen simultan betrachten. Sei dazu wieder  $c_v$  die eindeutige maximale Geodätische mit Startvektor  $\dot{c}_v(0) = v$ .

1.76. DEFINITION. Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Setze

$$D_{\text{exp}} = \{ v \in TM \mid c_v(t) \text{ ist für } t = 1 \text{ definiert} \} \subset TM$$

und definiere die (*Riemannsche*) *Exponentialabbildung*  $\exp: D_{\text{exp}} \rightarrow M$  durch

$$\exp(v) = c_v(1) .$$

Für  $p \in M$  schreibe  $\exp_p = \exp|_{T_p M}: T_p M \rightarrow M$ .

Zunächst müssen wir damit leben, dass eventuell  $D_{\text{exp}} \neq TM$  gilt, später werden wir nur noch Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit  $D_{\text{exp}} = TM$  betrachten. Als Beispiel betrachte eine kleine konvexe offene Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$ , etwa  $U = B_1(0)$ , mit der Euklidischen Standardmetrik  $g^{\text{eukl}}$ . Geodätische werden offenbar gegeben durch

$$c_{(p,v)}(t) = p + tv$$

für alle  $p \in U$  und alle  $v \in T_p U = \mathbb{R}^n$ . Da  $U = B_1(0)$  konvex ist, erhalten wir

$$D_{\text{exp}} = \{ (p, v) \mid p, p + v \in U \} \subsetneq TU = U \times \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \exp_p(v) = p + v .$$

1.77. BEMERKUNG. Es sei  $v \in T_p M$ , dann gilt  $c_v(t) = \exp(tv)$  auf dem Definitionsintervall

$$I = \{ t \in \mathbb{R} \mid tv \in D_{\text{exp}} \} .$$

Da  $\exp(tv) = c_{tv}(1)$ , reicht es zu zeigen, dass  $c_{tv}(s) = c_v(st)$ , dass also  $s \mapsto \gamma(s) = c_v(st)$  eine Geodätische mit Startvektor  $tv$  ist. Das gilt, denn  $\dot{\gamma}(0) = t \dot{c}_v(0) = tv$  und

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}^\gamma \dot{\gamma} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}^{c_v(\cdot t)} (t \dot{c}_v(\cdot t)) \Big|_s = t \nabla_{t \frac{\partial}{\partial s}}^{c_v} \dot{c}_v \Big|_{st} = t^2 \ddot{c}_v(st) = 0 .$$

1.78. BEMERKUNG. Wir wollen die Ableitung der Exponentialabbildung bei  $0_p = (p, 0) \in T_p M$  betrachten; dazu benötigen wir den Tangentialraum  $T_{0_p} TM$ . Sei also  $M$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, dann ist  $TM$  eine  $2n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit nach Proposition 1.16. Wir betrachten die Inklusionsabbildung  $\iota: T_p M \rightarrow TM$  und die Projektion  $\pi: TM \rightarrow M$  aus Proposition 1.16. Da  $\pi \circ \iota$  die konstante Abbildung auf den Punkt  $p \in M$  darstellt, folgt  $d\pi \circ d\iota = 0$ . Aus Dimensionsgründen ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow \underbrace{T_{0_p} T_p M}_{\cong T_p M} \xrightarrow{d\iota} T_{0_p} TM \xrightarrow{d\pi} T_p M \longrightarrow 0$$

exakt (Übung), und da  $T_p M$  ein Vektorraum ist, folgt  $T_{0_p} T_p M \cong T_p M$ .

Wir können diese Sequenz sogar natürlich spalten. Dazu betrachten wir zu  $v \in T_p M$  eine Kurve  $\gamma$  in  $M$  mit  $[\dot{\gamma}] = v$ , dann ist die dazugehörige Kurve  $\bar{\gamma}(t) = 0_{\gamma(t)}$  von Nullvektoren eine Kurve in  $TM$  mit  $\pi \circ \bar{\gamma} = \gamma$ , somit  $d\pi[\dot{\bar{\gamma}}] = [\dot{\gamma}] = v$ . Es gilt also in natürlicher Weise

$$T_{0_p} TM = T_p M \oplus T_p M .$$

Für andere Vektoren  $v \in T_p M$  spaltet  $T_v TM$  zwar immer noch, aber man braucht dazu einen Zusammenhang auf  $\nabla^{TM}$  (Übung) — zum Beispiel den Levi-Civita-Zusammenhang.

1.79. SATZ. Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann hat die Riemannsche Exponentialabbildung die folgenden Eigenschaften.

(1) Ist  $M$  von der Klasse  $\mathcal{C}^k$  mit  $k \geq 3$  und  $g$  eine  $\mathcal{C}^{k-1}$ -Metrik, so ist  $\exp$  von der Klasse  $\mathcal{C}^{k-2}$ .

- (2) Für alle  $p \in M$  ist  $\exp_p$  ein lokaler Diffeomorphismus in einer Umgebung  $V_p \subset T_p M$  von  $0_p \in T_p M$  mit Differential

$$d_{0_p}(\exp_p)(v) = v \quad \text{für alle } v \in T_p M \cong T_{0_p} T_p M .$$

- (3) Für alle  $p \in M$  ist  $(\pi \times \exp): D_{\exp} \rightarrow M \times M$  ein lokaler Diffeomorphismus in einer Umgebung  $V \subset D_{\exp}$  von  $0_p \in T_p M$  mit Differential

$$d_{0_p}(\pi \times \exp) = \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ \text{id} & \text{id} \end{pmatrix} : T_{0_p} TM \cong T_p M \oplus T_p M \rightarrow T_p M \oplus T_p M \cong T_{(p,p)}(M \times M) .$$

BEWEIS. Da die Koeffizienten des Differentialgleichungssystems im Beweis von Satz 1.75 von der Klasse  $\mathcal{C}^{k-2}$  sind, folgt das gleiche für die Gesamtheit aller Lösungen mit variablen Anfangsbedingungen, und wir erhalten (1).

Zu (2) benutzen wir Bemerkung 1.77. Mit  $T_0 T_p M \cong T_p M$  wie oben folgt

$$d_{0_p}(\exp_p)(v) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \exp_p(tv) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} c_v(t) = \dot{c}_v(0) = v .$$

Aus dem Umkehrsatz folgt die lokale Umkehrbarkeit in einer Umgebung von  $0_p$  in  $T_p M$ , auf der  $d \exp_p$  invertierbar ist.

Zu (3) benutzen wir Bemerkung 1.78 und identifizieren  $T_{0_p} TM$  mit  $(T_p M)^2$ . Für eine Kurve  $\bar{\gamma}(t) = 0_{\gamma(t)}$  von Nullvektoren folgt

$$\exp(\bar{\gamma}(t)) = \exp(0_{\gamma(t)}) = \gamma(t) = \pi(\bar{\gamma}(t)) ,$$

also  $d\pi(\dot{\bar{\gamma}}(0)) = d \exp(\dot{\bar{\gamma}}(0)) = \dot{\gamma}(0)$ . Das liefert die erste Spalte des Differentials, die zweite ergibt sich aus (2). Die lokale Invertierbarkeit folgt wieder aus dem Umkehrsatz.  $\square$

Um das Differential der Exponentialabbildung besser zu verstehen, betrachten wir jetzt geodätische Variationen.

1.80. DEFINITION. Sei  $c$  Geodätische auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$ . Ein Vektorfeld  $V$  längs  $c$  heißt *Jacobifeld*, wenn es die Differentialgleichung

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^c \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^c V + R_{V, \dot{c}} = 0$$

erfüllt. Eine Variation  $\bar{c}: I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  von  $c$  heißt *geodätisch*, wenn alle Kurven  $c_s = \bar{c}(\cdot, s)$  Geodätische sind.

- 1.81. BEMERKUNG. (1) Der Krümmungstensor  $R$  ist für  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeiten mit  $k \geq 3$  definiert und stetig. In Koordinaten ist die Jacobigleichung ein lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung, erfüllt in diesem Fall also automatisch die lokale Lipschitz-Bedingung aus dem Satz 1.73 von Picard-Lindelöf.

- (2) Zu jeder Geodätischen  $c$  und  $a, b \in \mathbb{R}$  können wir die geodätische Variation

$$\bar{c}(t, s) = c(as + b(1 + s)t)$$

mit Variationsfeld

$$V = \frac{\partial \bar{c}}{\partial s} = a\dot{c}(t) + b\dot{c}(t)$$

betrachten. Insbesondere sind also  $\dot{c}$  und  $t \cdot \dot{c}$  nach dem folgenden Satz Jacobifelder.

Wir schreiben

$$\ddot{V} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\bar{c}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\bar{c}} V ,$$

und die Jacobi-Gleichung schreiben wir kürzer als

$$\ddot{V} + R_{V, \dot{c}} = 0 .$$

1.82. SATZ. Sei  $(M, g)$  Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $c: I \rightarrow M$  eine Geodätische, und sei  $[a, b] \subset I$ . Ein Vektorfeld  $V$  längs  $c|_{[a,b]}$  ist genau dann Jacobifeld, wenn es eine geodätische Variation  $\bar{c}: I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  von  $c$  gibt, so dass  $V$  das Variationsfeld von  $\bar{c}$  ist.

BEWEIS. Zu „ $\Leftarrow$ “ sei  $\bar{c}$  eine geodätische Variation von  $c$ . Dann gilt  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\bar{c}} \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = \ddot{\bar{c}}(t, s) = 0$  für alle  $(t, s) \in I \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Wir leiten nach  $s$  ab und erhalten

$$0 = \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}^{\bar{c}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\bar{c}} \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\bar{c}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}^{\bar{c}} \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + R_{\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}}^{\bar{c}} \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\bar{c}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\bar{c}} \frac{\partial \bar{c}}{\partial s} + R_{\frac{\partial \bar{c}}{\partial s}, \frac{\partial \bar{c}}{\partial t}}^{TM} \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = \dot{V} + R_{V, \dot{c}} \dot{c},$$

wobei wir zunächst die Definition 1.61 von  $R^{\bar{c}}$  und dann die Torsionsfreiheit von  $\nabla^{\bar{c}}$  in Bemerkung 1.63 ausgenutzt haben. Somit ist das Variationsvektorfeld einer geodätischen Variation ein Jacobi-Feld.

Sei nun umgekehrt  $V$  ein Jacobifeld, und sei  $t_0 \in [a, b]$ . Realisiere zunächst  $V(t_0)$  durch eine Kurve  $\gamma$  in  $M$  mit  $\dot{\gamma} = V(t_0)$ . Im Folgenden sei  $s$  der Parameter von  $\gamma$ . Bestimme dann ein differenzierbares Vektorfeld  $W$  längs  $\gamma$  mit

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}^{\gamma} W = \dot{V}(t_0).$$

Das ist möglich, da die obige Bedingung in Koordinaten gerade die erste Ableitung von  $W$  bestimmt.

Nach Satz 1.75 existiert zu jedem  $s$  eine maximale Geodätische  $c_s: I_s \rightarrow M$  mit  $c_s(t_0) = \gamma(s)$  und  $\dot{c}_s(t_0) = W(s)$ , und  $c_s(t)$  hängt  $\mathcal{C}^2$  von  $s$  und  $t$  ab. Da  $[a, b] \subset I$  kompakt ist und da  $c_s$  differenzierbar in  $s$  ist, können wir  $\varepsilon > 0$  so wählen, dass  $[a, b] \subset I_s$  für alle  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Wir erhalten also eine Geodätische Variation  $\bar{c}(t, s) = c_s(t)$  für alle  $(t, s) \in [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Das Variationsfeld  $\frac{\partial \bar{c}}{\partial s}$  ist nach dem ersten Teil des Beweises ein Jacobi-Feld, uns es gilt

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial s}(t_0) = \dot{\gamma}(0) = V(t_0) \quad \text{und} \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}|_{(t_0, 0)}}^{\bar{c}} \frac{\partial \bar{c}}{\partial s} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}|_{(t_0, 0)}}^{\bar{c}} \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}|_{s=0}}^{\bar{c}} W = \dot{V}(t_0).$$

In Koordinaten ist die Jacobigleichung ein lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung, also hat es nach Picard-Lindelöf zu jedem Paar von Anfangswerten  $V(t_0), \dot{V}(t_0) \in T_{c(t_0)}M$  eine eindeutige Lösung. Daher folgt  $V = \frac{\partial \bar{c}}{\partial s}$ , also leistet die geodätische Variation  $\bar{c}$  das gewünschte.  $\square$

1.83. BEMERKUNG. Wir können das Differential der Exponentialabbildung jetzt (etwas) besser verstehen. Seien dazu  $p \in M$  und  $v \in T_pM$  beliebig, dann können wir einen Vektor  $w \in T_vTM$  wie oben geometrisch durch ein Vektorfeld  $W$  längs einer Kurve  $\gamma$  auf  $M$  mit  $\gamma(0) = p, W(0) = v$  realisieren. Wir schreiben wieder

$$w = (\dot{\gamma}(0), (\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}^{\gamma} W)(0)) \in T_pM \times T_pM \cong T_vTM.$$

Betrachte wieder die geodätische Variation

$$\bar{c}(t, s) = c_{W(s)}(t) = \exp_{\gamma(s)}(t \cdot W(s))$$

mit Variationsfeld  $V$  längs  $c_0 = c_v$ . Dann ist  $V$  das Jacobifeld längs  $c_v$  mit den Anfangsbedingungen

$$V(0) = \dot{\gamma}(0) \in T_pM \quad \text{und} \quad \dot{V}(0) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\bar{c}} \frac{\partial \bar{c}}{\partial s} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}^{\bar{c}} \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = (\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}^{\gamma} W)(0).$$

Wir erhalten also

$$(d_v \exp)(w) = \frac{\partial}{\partial s}(\exp_{\gamma(s)} W(s)) = \frac{\partial \bar{c}}{\partial s}(1, 0) = V(1).$$

Um das Differential von  $\exp$  zu verstehen, müssen wir also nur die Jacobigleichung mit den oben angegebenen Anfangsbedingungen lösen. Da die Jacobi-Gleichung im Gegensatz zur Geodätischen-Gleichung linear ist, stellt das eine gewisse Vereinfachung dar.

Wir wollen jetzt geodätische Normalkoordinaten definieren. Nach Satz 1.79 (2) ist  $\exp_p$  nahe des Nullvektors  $0_p \in T_p M$  ein lokaler Diffeomorphismus.

1.84. DEFINITION. Sei  $(M, g)$  eine  $n$ -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, und sei  $p \in M$ . Sei  $V \subset T_p M$  eine Umgebung des Nullvektors  $0_p = (p, 0)$  in  $T_p M$ , so dass  $\exp_p: V \rightarrow U := \exp_p V$  ein Diffeomorphismus ist, und sei  $A: (T_p M, g_p) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  eine lineare Isometrie, dann nennt man eine Karte der Form  $\varphi = A \circ \exp_p^{-1}: U \rightarrow V^\varphi = A(V)$  *Riemannsche Normalkoordinaten* von  $M$  um  $p$ .

Für Rechnungen am Punkt  $p$  haben Normalkoordinaten um  $p$  sehr schöne Eigenschaften.

1.85. PROPOSITION. Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, und sei  $p \in M$ . In Riemannschen Normalkoordinaten  $\varphi: U \rightarrow V$  um  $p$  gilt

$$g_{ij}^\varphi(0_p) = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial g_{ij}^\varphi}{\partial x^k}(0_p) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi \Gamma_{ij}^k(0_p) = 0 \quad \text{für alle } i, j, k = 1, \dots, n.$$

Insbesondere folgt  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial \varphi^i}} \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \Big|_p = 0$  für alle  $i, j$ .

Man beachte, dass diese Aussagen in der Regel nur am Punkt  $p$  gelten. Wären sie auch in einer Umgebung richtig, so wäre die Umgebung lokal isometrisch zum Euklidischen  $\mathbb{R}^n$ .

BEWEIS. Die erste Aussage folgt aus Satz 1.79 (2), da  $d_{0_p}(\exp_p) = \text{id}_{T_p M}$  genau wie  $A$  eine lineare Isometrie ist. Die zweite Aussage folgt aus der dritten, da

$$\frac{\partial g_{ij}^\varphi}{\partial x^k} = e_k(\varphi g(e_i, e_j)) = \sum_{l=1}^n (\varphi g(\Gamma_{ki}^l e_l, e_j) + \varphi g(e_i, \Gamma_{kj}^l e_l)) = 0.$$

Zur dritten beachten wir, dass  $\Gamma_{ij}^k$  wegen der Torsionsfreiheit des Levi-Civita-Zusammenhangs  $\nabla$  für alle  $k$  in  $i$  und  $j$  symmetrisch ist. Da außerdem radiale Geraden  $c_v^\varphi(t) = tv \in V^\varphi$  für alle  $v \in T_p M$  Geodätische bezüglich der Metrik  $\varphi g$  auf  $V^\varphi$  sind, folgt

$$0 = \ddot{c}_v^\varphi(0) = \frac{\partial^2(tv)}{\partial t^2} + \sum_{i,j,k=1}^n v^i v^j \varphi \Gamma_{ij}^k(0_p) e_k = \sum_{i,j,k=1}^n v^i v^j \varphi \Gamma_{ij}^k(0_p) e_k,$$

also  $\varphi \Gamma_{ij}^k(0_p) = 0$  für alle  $i, j, k$  durch Koeffizientenvergleich.  $\square$

1.86. BEMERKUNG. Man kann  $g_{ij}^\varphi$  und  $\varphi \Gamma_{ij}^k$  um  $0_p$  nach Taylor entwickeln. Die nächsten interessanten Koeffizienten  $\frac{\partial \varphi \Gamma_{ij}^l}{\partial x^k}(0_p)$  und  $\frac{\partial^2 g_{ij}^\varphi}{\partial x^k \partial x^l}(0_p)$  hängen nur von den Koeffizienten  $R_{ijk}^l(0_p)$  der Krümmung ab (Übung), für die höheren Terme benötigt man außerdem auch die höheren kovarianten Ableitungen des Krümmungstensors.

1.87. SATZ (Zweite Variation der Bogenlänge). Sei  $c: I \rightarrow M$  eine Geodätische mit  $\|\dot{c}\| = 1$  auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$ , und sei  $\bar{c}: I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  eine Variation von  $c$  mit Variationsvektorfeld  $V$ . Setze

$$\tilde{V} = V - \langle V, \dot{c} \rangle \dot{c},$$

dann gilt

$$\frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} L(c_s|_{[a,b]}) = \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} V, \dot{c} \right\rangle \Big|_{t=a}^b + \int_a^b (\langle \ddot{\tilde{V}}, \dot{\tilde{V}} \rangle - \langle R_{V, \dot{c}} \dot{c}, V \rangle) dt.$$

Für geodätische Variationen vereinfacht sich der obige Ausdruck weiter.

BEWEIS. Da  $c$  eine Geodätische mit  $\|\dot{c}\| = 1$  ist, gilt

$$\dot{\check{V}} = \dot{V} - \langle \dot{V}, \dot{c} \rangle \dot{c} - \langle V, \ddot{c} \rangle \dot{c} - \langle V, \dot{c} \rangle \ddot{c} = \dot{V} - \langle \dot{V}, \dot{c} \rangle \dot{c}$$

und

$$\langle \dot{\check{V}}, \dot{\check{V}} \rangle = \langle \dot{V} - \langle \dot{V}, \dot{c} \rangle \dot{c}, \dot{V} - \langle \dot{V}, \dot{c} \rangle \dot{c} \rangle = \langle \dot{V}, \dot{V} \rangle \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle - \langle \dot{V}, \dot{c} \rangle^2.$$

Wir gehen wie im Beweis von Satz 1.65 vor und berechnen

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} L(c_s|_{[a,b]}) &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \int_a^b \frac{\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \dot{c}_s, \dot{c}_s \rangle}{\|\dot{c}_s\|} dt = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \int_a^b \frac{\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} V, \dot{c}_s \rangle}{\|\dot{c}_s\|} dt \\ &= \int_a^b \frac{(\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} V, \dot{c} \rangle + \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} V, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} V \rangle) \langle \dot{c}_s, \dot{c}_s \rangle - \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} V, \dot{c}_s \rangle^2}{\|\dot{c}_s\|^3} \Big|_{s=0} dt \\ &= \int_a^b \left( \left\langle R_{\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}}^c V, \dot{c} \right\rangle + \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} V, \dot{c} \right\rangle + \langle \dot{\check{V}}, \dot{\check{V}} \rangle \right) dt \\ &= \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} V, \dot{c} \right\rangle \Big|_{t=a}^b + \int_a^b (\langle \dot{\check{V}}, \dot{\check{V}} \rangle - \langle R_{V, \dot{c}} \dot{c}, V \rangle) dt. \quad \square \end{aligned}$$

### 1.5. Riemannsche Mannigfaltigkeiten als Metrische Räume

In diesem Kapitel betrachten wir Riemannsche Mannigfaltigkeiten  $(M, g)$  als metrische Räume. Wir zeigen, dass kurze Teilstücke von Geodätischen den Abstand zwischen ihren Punkten realisieren. Auf diese Weise liefert uns die Exponentialabbildung spezielle Karten von  $(M, g)$  um  $p$ , die geodätischen Normalkoordinaten, die sehr gut an die lokale Geometrie von  $M$  angepasst sind.

Wir definieren zunächst den Abstand  $d$  zwischen zwei Punkten auf  $M$  und ziehen einige elementare Schlussfolgerungen. Anschließend beweisen wir das Gauß-Lemma, was uns lokale Information über den metrischen Raum  $(M, d)$  gibt.

1.88. DEFINITION. Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die *Riemannsche Abstandsfunktion*  $d: M \times M \rightarrow [0, \infty]$  ist definiert als

$$d(p, q) = \inf \{ L(\gamma|_{[a,b]}) \mid \gamma: I \rightarrow M \text{ Kurve mit } \gamma(a) = p \text{ und } \gamma(b) = q \text{ für } a < b \}$$

für alle  $p, q \in M$ . Für einen festen Punkt  $p \in M$  schreiben wir  $d_p = d(p, \cdot): M \rightarrow [0, \infty]$ .

Nach Definition des Infimums ist der Abstand  $d(p, q)$  genau dann unendlich, wenn es keine differenzierbaren Kurven von  $p$  nach  $q$  gibt, das heißt, wenn  $p$  und  $q$  in verschiedenen Wegzusammenhangskomponenten von  $M$  liegen.

1.89. BEMERKUNG. Nach Definition ist die Funktion  $d$

- (1) *nicht negativ*:  $d(p, q) \geq 0$  für alle  $p, q \in M$ , wobei  $d(p, p) = 0$  für alle  $p \in M$ ;
- (2) *symmetrisch*:  $d(p, q) = d(q, p)$  für alle  $p, q \in M$ , denn zu jeder Kurve  $\gamma$  mit  $\gamma(a) = p$ ,  $\gamma(b) = q$  für  $a < b$  ist  $\gamma' = \gamma(-\cdot)$  eine Kurve mit  $\gamma'(a') = q$  und  $\gamma'(b') = p$  für  $a' = -b < b' = -a$ ;
- (3) und erfüllt die Dreiecksungleichung

$$d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$$

für alle  $p, q, r \in M$ , denn je zwei Kurven  $\gamma_1$  von  $p$  nach  $q$  und  $\gamma_2$  von  $q$  nach  $r$  lassen sich zu einer Kurve  $\gamma$  von  $p$  nach  $r$  verketten, und nach glätten gilt für beliebige  $\varepsilon > 0$ , dass

$$L(\gamma) < L(\gamma_1) + L(\gamma_2) + \varepsilon,$$

und Bilden des Infimums auf beiden Seiten liefert die Behauptung.

(4) Wenn es eine reguläre Kurve  $\gamma$  von  $p = \gamma(a)$  nach  $q = \gamma(b)$  mit

$$L(\gamma|_{[a,b]}) = d(p, q)$$

gibt, dann ist  $\gamma$  nach Folgerung 1.69 bis auf Umparametrisierung eine Geodätische.

Sobald wir gezeigt haben, dass  $d(p, q) > 0$  für  $p \neq q$ , wissen wir, dass  $d$  tatsächlich eine Metrik auf  $M$  definiert.

Der folgende Satz ist der erste Schritt zum Verständnis des Abstandsbegriffs auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten.

1.90. SATZ (Gauß-Lemma). *Sei  $(M, g)$  Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $p \in M$ , und seien  $v, w \in T_p M$ . Wenn wir  $v, w$  als Vektoren in  $T_v T_p M \cong T_p M$  auffassen, dann gilt*

$$\langle d_v(\exp_p)(v), d_v(\exp_p)(w) \rangle_{\exp_p v} = \langle v, w \rangle_p .$$

BEWEIS. Es sei  $c$  die Geodätische durch  $p$  mit Startvektor  $v$ , dann gilt  $c(0) = p$ ,  $\dot{c}(0) = v$ ,  $c(1) = \exp_p v$  und  $\dot{c}(1) = d_v(\exp_p)(v)$ . Definiere eine Variation von  $c$  durch

$$\bar{c}(t, s) = c_s(t) = \exp_p(t \cdot (v + sw)) ,$$

dann folgt

$$d_v(\exp_p)(w) = \frac{\partial}{\partial s} \exp_p(t \cdot (v + sw)) = \frac{\partial \bar{c}}{\partial s} \Big|_{(1,0)} = V(1) ,$$

hierbei ist das Jacobi-Feld  $V$  eindeutig durch die Anfangswerte

$$V(0) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{V}(0) = \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial s \partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \underbrace{(v + sw)}_{\in T_p M} = w$$

bestimmt.

Aus der Geodätischen- und der Jacobi-Gleichung folgt

$$\frac{d}{dt} \langle \dot{V}(t), \dot{c}(t) \rangle = \langle \ddot{V}(t), \dot{c}(t) \rangle = -\langle R_{V(t), \dot{c}(t)} \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle = 0$$

wegen Satz 1.52 (3). Aufgrund unserer Anfangsbedingungen gilt also

$$\langle \dot{V}(t), \dot{c}(t) \rangle = \langle \dot{V}(0), \dot{c}(0) \rangle = \langle v, w \rangle_p .$$

Desweiteren gilt  $\langle V(0), \dot{c}(0) \rangle = 0$  und

$$\frac{d}{dt} \langle V(t), \dot{c}(t) \rangle = \langle \dot{V}(t), \dot{c}(t) \rangle = \langle v, w \rangle_p ,$$

also

$$\langle V(t), \dot{c}(t) \rangle = \int_0^t \langle \dot{V}(\tau), \dot{c}(\tau) \rangle d\tau = t \langle v, w \rangle_p .$$

Daraus folgt wie behauptet, dass

$$\langle d_v(\exp_p)(v), d_v(\exp_p)(w) \rangle_{\exp_p v} = \langle \dot{c}(1), V(1) \rangle = \langle v, w \rangle_p . \quad \square$$

1.91. FOLGERUNG. *Sei  $(M, g)$  Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zu jedem  $p \in M$  existiert eine Radius  $r > 0$ , so dass die Exponentialabbildung  $\exp_p$  auf  $B_r(0_p) \subset T_p M$  definiert und injektiv ist, und für alle  $v \in B_r(0_p)$  gilt*

$$d(p, \exp_p v) = \|v\| .$$

Für alle  $q \in M \setminus \exp_p(B_r(0_p))$  gilt  $d(p, q) \geq r$ .



BEWEIS. Die Existenz von  $r$  folgt bereits aus Satz 1.79 (2) über die lokale Umkehrbarkeit von  $\exp_p$  nahe  $0_p \in T_p M$ . Sei jetzt  $v \in B_r(0_p)$ . Dann ist  $c_v$  nach Voraussetzung auf  $[0, 1]$  definiert, und es gilt

$$L(c_v|_{[0,1]}) = \int_0^1 \|\dot{c}_v(t)\| dt = \|v\|$$

nach Bemerkung 1.67, folglich

$$d(p, \exp_p v) \leq L(c_v|_{[0,1]}) = \|v\| .$$

Für die umgekehrte Abschätzung sei  $\gamma: I \rightarrow M$  eine Kurve mit  $\gamma(a) = p$  und  $\gamma(b) = \exp_p v$ . Wir wollen  $L(\gamma|_{[a,b]}) \geq \|v\|$  beweisen, dazu unterscheiden wir zwei Fälle.

Falls  $\gamma([a, b])$  in  $\exp_p(B_r(0_p))$  verläuft, bilden wir das Urbild unter  $\exp$  und erhalten eine Kurve

$$\tilde{\gamma} = \exp_p^{-1} \circ \gamma: [a, b] \rightarrow B_r(0_p) \subset T_p M .$$

Definiere eine Funktion  $f: [a, b] \rightarrow [0, r)$  durch

$$f(s) = \|\tilde{\gamma}(s)\| ,$$

dann ist  $f$  differenzierbar auf der Menge

$$I' = \{ t \in [a, b] \mid \tilde{\gamma}(t) \neq 0 \} = \{ t \in [a, b] \mid \gamma(t) \neq p \} .$$

Sei  $s \in I'$ , und sei  $c_s: (-r, r) \rightarrow M$  die Geodätische mit Anfangsbedingungen

$$c_s(0) = p \quad \text{und} \quad \dot{c}_s(0) = \frac{\tilde{\gamma}(s)}{\|\tilde{\gamma}(s)\|} =: v_s .$$

Aus dem Gauß-Lemma und der Cauchy-Schwartz-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} \left( \frac{df(s)}{ds} \right)^2 &= \left( \frac{d\|\tilde{\gamma}(s)\|}{ds} \right)^2 = \frac{\langle \dot{\tilde{\gamma}}(s), \tilde{\gamma}(s) \rangle_p^2}{\|\tilde{\gamma}(s)\|_p^2} = \langle \dot{\tilde{\gamma}}(s), v_s \rangle_p^2 \\ &= \langle \dot{\gamma}(s), \dot{c}_v(f(s)) \rangle_{\gamma(s)}^2 \leq \|\dot{\gamma}(s)\|^2 . \end{aligned}$$

Für die Länge von  $\gamma$  erhalten wir somit

$$L(\gamma|_{[a,b]}) \geq \int_{I'} \|\dot{\gamma}(s)\| ds \geq \int_{I'} \left| \frac{df(s)}{ds} \right| ds \geq \|v\| ,$$

da  $f(a) = 0$  und  $f(b) = \|v\|$ .

Im zweiten Fall gilt  $\gamma([a, b]) \not\subset \exp_p(B_r(0_p))$ . Folglich existiert

$$c = \inf \{ s \in [a, b] \mid \gamma(s) \notin \exp_p(B_r(0_p)) \} \in (a, b) .$$

Die obige Abschätzung liefert jetzt

$$L(\gamma|_{[a,b]}) \geq L(\gamma|_{[a,c]}) \geq r > \|v\| .$$

In jedem Fall folgt also

$$L(\gamma|_{[a,b]}) \geq L(c_v|_{[0,1]}) = \|v\| ,$$

also realisiert  $c_v$  den Abstand  $d(p, \exp_p v) = \|v\|$  wie behauptet.

Die zweite Aussage folgt mit dem Argument zum zweiten Fall oben.  $\square$

1.92. BEMERKUNG. Wenn man diesen Beweis genauer anschaut, kann man auch noch folgendes zeigen (Übung). Sei  $p \in M$  und  $r > 0$  wie oben, sei  $q \in \exp_p(B_r(0_p))$ , und sei  $\gamma: I \rightarrow M$  eine (nicht notwendig reguläre und eventuell nur stückweise differenzierbare) Kurve mit  $\gamma(a) = p$ ,  $\gamma(b) = q$  und  $L(\gamma|_{[a,b]}) = d(p, q)$ . Dann existiert  $v \in T_p M$  mit  $\|v\| = 1$  und eine streng monoton steigende Funktion  $f: [a, b] \rightarrow [0, d(p, q)]$ , so dass  $\gamma(t) = c_v(f(t))$  für alle  $t \in [a, b]$ .

Analog gilt allgemein (Übung): Seien  $p, q \in M$ , und sei  $\gamma: I \rightarrow M$  eine (nicht notwendig reguläre und eventuell nur stückweise differenzierbare) Kurve mit  $\gamma(a) = p$ ,  $\gamma(b) = q$  und  $L(\gamma|_{[a,b]}) = d(p, q)$ . Dann existiert eine Geodätische  $c$  und eine streng monoton steigende Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass  $\gamma(t) = c(f(t))$  für alle  $t \in [a, b]$ . Dazu überlegt man sich, dass die entsprechende Aussage zumindest auf hinreichend kurzen Teilintervallen  $[a_i, b_i] \subset [a, b]$  gelten, die ganz in einem Ball  $\exp_{p_i}(B_{r_i}(p_i))$  verlaufen.

1.93. FOLGERUNG. Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann definiert die Riemannsche Abstandsfunktion  $d$  eine Metrik auf  $M$ . Die metrische Topologie auf  $M$  stimmt mit der zugrundeliegenden Topologie der Mannigfaltigkeit überein.

BEWEIS. Aus der vorigen Folgerung 1.91 ergibt sich, dass  $d(p, q) > 0$  falls  $p \neq q$ . Nach Bemerkung 1.89 ist  $(M, d)$  also metrischer Raum.

Nun zu den Topologien. Sei  $U \subset M$  offen in der zugrundeliegenden Topologie von  $M$ , und sei  $p \in U$ . Sei  $r$  wie in Folgerung 1.91 gewählt. In geodätischen Normalkoordinaten  $\varphi$  um  $p$  ist  $\varphi^{-1}(U)$  offen, denn  $\exp_p$  ist nach dem Satz 1.73 von Picard-Lindelöf stetig. Es folgt  $B_\varepsilon(0_p) \subset \varphi^{-1}(U)$  für ein  $\varepsilon \in (0, r)$ , und nach Folgerung 1.91 gilt also auch  $B_\varepsilon(p) = \exp_p(B_\varepsilon(0_p)) \subset U$ . Somit ist  $U$  offen in der metrischen Topologie.

Sei andererseits  $U$  in der metrischen Topologie offen. Zu  $p \in U$  existiert dann ein  $\varepsilon > 0$  mit  $B_\varepsilon(p) \subset U$ . Wenn  $\varepsilon$  klein genug ist, liegt  $B_\varepsilon(p)$  im Kartengebiet von geodätischen Normalkoordinaten um  $p$ . Dann ist  $B_\varepsilon(p)$  in der zugrundeliegenden Topologie von  $M$  offen. Mithin ist  $U$  eine Vereinigung offener Teilmengen von  $M$ , also ebenfalls offen.  $\square$

1.94. BEMERKUNG. Wir schreiben für  $p \in M$  ab sofort

$$B_r(p) := d_p^{-1}[0, r]$$

und sprechen vom (*metrischen*) Ball um  $p$  mit Radius  $r$ . Falls  $\exp_p$  auf ganz  $B_r(0_p)$  definiert ist und Diffeomorphismus auf das Bild ist, gilt

$$B_r(p) = \exp_p(B_r(0_p))$$

nach Folgerung 1.91. Den allgemeinen Fall behandeln wir in Proposition 1.95.

Es folgt

$$\overline{B_r(p)} = d_p^{-1}[0, r].$$

Genauer gesagt gilt „ $\subset$ “, da  $d_p$  stetig ist, und „ $\supset$ “ gilt, da für  $q \in M$  mit  $d(p, q) = r$  und eine Folge von nach Bogenlänge parametrisierter Kurven  $\gamma_i$  mit  $\gamma_i(0) = p$ ,  $\gamma_i(r_i) = q$  und  $r_i \searrow r$  gilt, dass:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d\left(\gamma_i\left(r - \frac{1}{i}\right), q\right) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \left(r_i - r + \frac{1}{i}\right) = 0.$$

In geodätischen Normalkoordinaten um  $q$  sieht man, dass  $\gamma_i\left(r - \frac{1}{i}\right)$  gegen  $q$  konvergiert, aber  $d\left(\gamma_i\left(r - \frac{1}{i}\right), p\right) < r$  für alle  $i$ , also  $\gamma_i\left(r - \frac{1}{i}\right) \in B_r(p)$  für alle  $i$  und daher  $q \in \overline{B_r(p)}$ .

1.95. PROPOSITION. Es sei  $M$  Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $p \in M$  und  $r \in (0, \infty]$ . Falls die Exponentialabbildung auf ganz  $\overline{B_r(0)} \subset T_p M$  definiert ist, gilt

$$\overline{B_r(p)} = \exp_p(\overline{B_r(0)}) \subset M,$$

und zu jedem  $q \in \overline{B_r(p)}$  existiert  $v \in T_p M$  mit  $q = \exp_p v$  und  $\|v\| = d(p, q)$ .

Wir werden die Existenz von Geodätischen von  $p$  nach  $q \in \overline{B_r(p)}$  dadurch zeigen, dass wir kürzeste Verbindungen konstruieren.

BEWEIS. Man kann zeigen, dass

$$\exp_p(\overline{B_r(0_p)}) \subset \overline{\exp_p(B_r(0_p))} \subset \overline{B_r(p)} .$$

Als nächstes überlegen wir uns, dass für alle  $s \leq r$  die Menge

$$A_s := \{ q \in \overline{B_s(p)} \mid q = \exp_p v \text{ für ein } v \in TM \text{ mit } \|v\| = d(p, q) \} \subset M$$

derjenigen Punkte in  $\overline{B_s(p)}$ , die mit  $p$  durch eine kürzeste Geodätische verbunden werden können, kompakt ist. Die Menge  $A_s$  ist Bild der offensichtlich beschränkten Teilmenge

$$V_s := \{ v \in \overline{B_s(0_p)} \mid d(p, \exp_p v) = \|v\| \} \subset TM$$

unter  $\exp$ . Diese Menge ist aber auch abgeschlossen, denn sei  $v \in \overline{B_s(0_p)}$  Grenzwert einer Folge  $(v_i)$  in  $V_s$ , dann folgt

$$d(p, \exp_p v) = \lim_{i \rightarrow \infty} d(p, \exp_p v_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \|v_i\| = \|v\|$$

aus der Stetigkeit der Exponentialabbildung und der Abstandsfunktion. Folglich ist  $V_s$  kompakt, und als Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung in einen Hausdorff-Raum ist auch  $A_s = \exp(V_s)$  kompakt.

Es sei  $J \subset [0, r)$  die Menge derjenigen Zahlen  $s$ , so dass  $A_s = \overline{B_s(p)}$ . Nach Folgerung 1.91 enthält  $J$  ein Intervall  $[0, \delta]$ . Nach Definition von  $A_s$  liegt mit  $s$  bereits ganz  $[0, s]$  in  $J$ . Aus  $[0, s) \in J$  folgt auch  $s \in J$ , denn jeder Punkt  $q$  mit  $d(p, q) = s$  lässt sich durch eine Folge  $(q_i)$  von Punkten in  $d(p, q_i) < s$  approximieren, also gilt  $q_i = \exp_p v_i$  für Vektoren  $v_i \in T_p M$  mit  $\|v_i\| = d(p, q_i)$ . Da  $\overline{B_s(0_p)}$  kompakt ist, existiert ein Grenzwert  $v \in T_p M$  der Folge  $(v_i)$  nach Übergang zu einer Teilfolge. Es folgt  $\exp_p v = q$  und  $\|v\| = s = d(p, q)$ . Mithin ist  $J$  ein abgeschlossenes Teilintervall von  $[0, r)$ .

Es sei also  $r_0 = \sup J$ , und wir wollen  $r_0 = r$  beweisen. Falls  $r_0 < r$  ist, ist insbesondere  $r_0 < \infty$ , und  $\overline{B_{r_0}(p)}$  ist kompakt. Wir behaupten, dass es ein  $\varepsilon \in (0, r - r_0)$  gibt, so dass  $\exp_q|_{B_\varepsilon(0_q)}$  für alle  $q \in \overline{B_{r_0}(p)}$  injektiv ist. Wäre das nicht der Fall, so existierten Folgen von Vektoren  $(v_i), (w_i)$  in  $TM|_{\overline{B_{r_0}(p)}}$  mit

$$v_i \neq w_i, \quad \pi(v_i) = \pi(w_i), \quad \exp v_i = \exp w_i \quad \text{und} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \|v_i\| = \lim_{i \rightarrow \infty} \|w_i\| = 0 .$$

Die Folge  $\pi(v_i)$  besitzt einen Häufungspunkt  $q_0$ , da  $\overline{B_{r_0}(p)}$  kompakt ist. Nach Satz 1.79 ist  $\pi \times \exp$  in einer Umgebung von  $0_{q_0}$  in  $TM$  ein Diffeomorphismus, was der Existenz obiger Folgen widerspricht.

Falls  $r_0 = \sup J < r$  gilt, wähle also  $\varepsilon > 0$  wie oben und  $q \in B_{r_0+\varepsilon}(p) \setminus \overline{B_{r_0}(p)}$ . Dann existiert eine Folge nach Bogenlänge parametrisierter Kurven  $\gamma_i$  mit  $\gamma_i(0) = p$  und  $\gamma_i(t_i) = q$ , wobei  $t_i \searrow d(p, q)$ . Nach dem Zwischenwertsatz existiert eine Folge von Punkten  $q_i$  im Bild von  $\gamma_i$  mit  $d(p, q_i) = r_0$ . Wegen Kompaktheit konvergiert eine Teilfolge dieser Punkte gegen einen Punkt  $q_0$  mit  $d(p, q_0) = r_0$ . Aus der Dreiecksungleichung folgt sofort

$$d(p, q_0) + d(q_0, q) = d(p, q) . \quad (*)$$

Nach Wahl von  $\varepsilon > 0$  und der Folgerung 1.91 aus dem Gauß-Lemma existiert eine kürzeste Geodätische  $c_2$  von  $q_0$  nach  $q$ , und nach Wahl von  $r_0$  auch eine kürzeste Geodätische  $c_1$  von  $p$  nach  $q_0$ . Ohne Einschränkung gelte  $c_1(0) = q_0 = c_2(0)$ , dann betrachten wir die (bei  $t = 0$  nicht notwendig differenzierbare) Kurve

$$c(t) = \begin{cases} c_1(t) & \text{für } t \leq 0, \text{ und} \\ c_2(t) & \text{für } t \geq 0. \end{cases}$$

Wegen (\*) ist  $c$  eine kürzeste Kurve von  $p$  nach  $q$ , nach Bemerkung 1.92 also eine Geodätische. Insbesondere ist  $c$  auch bei  $t = 0$  differenzierbar, das heißt, es gilt  $\dot{c}_1(0) = \dot{c}_2(0)$ .

Es folgt  $q \in A_{r_0+\varepsilon}$  für alle  $q \in B_{r_0+\varepsilon}(p)$ , mithin  $[0, r_0 + \varepsilon) \subset J$  im Widerspruch zur Wahl von  $r_0$ . Hieraus folgt aber letztendlich, dass sich jeder Punkt in  $\overline{B_r(p)}$  mit  $p$  durch eine kürzeste Geodätische verbinden lässt, und insbesondere gilt

$$\overline{B_r(p)} = \exp(\overline{B_r(0)}) \subset M. \quad \square$$

Wir haben also einen metrischen Raum  $(M, d)$  definiert, und fragen uns als nächstes, ob er vollständig ist. Zur Erinnerung: Eine Folge  $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$  von Punkten in  $M$  heißt *Cauchy-Folge*, wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  existiert mit  $d(p_i, p_j) < \varepsilon$  für alle  $i, j \geq n_0$ . Ein metrischer Raum  $(M, d)$  heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in  $M$  konvergiert.

1.96. SATZ (Hopf-Rinow). *Sei  $(M, g)$  eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Abstandsfunktion  $d$ , dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (1)  $(M, d)$  ist vollständig;
- (2) die Exponentialabbildung  $\exp$  ist auf ganz  $TM$  definiert;
- (3) für ein  $p \in M$  ist  $\exp_p$  auf ganz  $T_pM$  definiert;
- (4) für alle  $p \in M$  und alle  $r > 0$  ist  $\overline{B_r(p)}$  kompakt;
- (5) für ein  $p \in M$  und alle  $r > 0$  ist  $\overline{B_r(p)}$  kompakt.

Falls diese Aussagen gelten, folgt

- (6) zu je zwei Punkten  $p, q \in M$  existiert eine Geodätische der Länge  $d(p, q)$  von  $p$  nach  $q$ .

Dass (6) zu den anderen Aussagen nicht äquivalent ist, sieht man einfachsten anhand eines metrischen Balles  $U = B_r(0) \subset (\mathbb{R}^n, g^{\text{eukl}})$ , der zwar (6), aber nicht (1)–(5) erfüllt.

BEWEIS. Die Implikationen (2)  $\Rightarrow$  (3) und (4)  $\Rightarrow$  (5) sind trivial. Zu (2)  $\Rightarrow$  (4) und (3)  $\Rightarrow$  (5) benutzen wir Folgerung 1.95, wonach

$$\overline{B_r(p)} = \exp_p(\overline{B_r(0_p)}).$$

Als Bild einer kompakten Menge unter der stetigen Exponentialabbildung ist  $\overline{B_r(p)}$  dann ebenfalls kompakt.

Nun zu (1)  $\Rightarrow$  (2). Wir fixieren  $p \in M$  und  $v \in T_pM$ . Wir nehmen

$$t_0 := \sup\{t > 0 \mid tv \in D_{\exp}\} < \infty$$

an und wählen eine Folge  $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$  positiver Zahlen mit  $t_i \nearrow t_0$ . Dann bilden die Punkte  $p_i = c_v(t_i)$  eine Cauchy-Folge in  $M$ ; sei  $q \in M$  ihr Grenzwert. In Normalkoordinaten  $\varphi$  um  $q$  ist  $c_v$  eine Geodätische, die für  $t \nearrow t_0$  gegen  $0_q$  konvergiert. Mithin lässt sich  $c$  zu einer radialen Geodätischen durch  $q$  fortsetzen, und somit lässt sich  $c(tv) = \exp_p(tv)$  auch für ein  $t > t_0$  definieren, im Widerspruch zur Wahl von  $t$ . Also gilt  $t_0 = \infty$ , und  $\exp_p(tv)$  ist für alle  $t$  definiert, also auch für  $t = 1$ . Insgesamt folgt  $D_{\exp} = TM$ .

Zu (5)  $\Rightarrow$  (1) sei  $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$  Cauchy-Folge. Da  $M$  zusammenhängend ist, existiert eine Kurve von  $p$  zu jedem  $q_i$ , also sind alle  $d(q_i, p)$  endlich. Da  $(q_i)$  Cauchy-Folge ist, existiert  $r > 0$  mit  $d(q_i, p) < r$  für alle  $i$ . Da  $\overline{B_r(p)}$  kompakt ist, hat die Folge  $(q_i)$  einen Häufungspunkt, der dann auch Grenzwert sein muss. Hieraus folgt die metrische Vollständigkeit.

Schließlich zu (2)  $\Rightarrow$  (6). Es seien  $p, q \in M$  und  $r = d(p, q) < \infty$ . Nach Folgerung 1.95 gilt  $q \in \overline{B_r(p)} = \exp_p(\overline{B_r(0_p)})$ . Sei also  $v \in \exp_p^{-1}(q)$  mit  $\|v\| \leq r$ , dann ist  $c_v$  die gesuchte Geodätische.  $\square$

1.97. DEFINITION. Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  mit Abstandsfunktion  $d$  heißt *vollständig*, wenn der metrische Raum  $(M, d)$  vollständig ist.

1.98. BEISPIEL. Der euklidische Raum  $(\mathbb{R}^n, g^{\text{eukl}})$ , die Sphäre  $(S^n, g^{\text{sph}})$ , und der hyperbolische Raum  $(H, g^{\text{hyp}}) := (B_1^n(0), g^{\text{hyp}})$  aus den Beispielen 1.32, 1.36 und 1.37 sind vollständig (Übung).

Wenn wir das globale Verhalten einer Riemannschen Mannigfaltigkeit studieren wollen, werden wir fast immer annehmen, dass  $(M, g)$  vollständig und zusammenhängend ist. Ansonsten werden viele Argumente nicht funktionieren. Als Beispiel erinnern wir uns an die Aussage, dass alle (metrisch) beschränkten Mengen in  $M$  präkompakt sind, die wegen Satz 1.96 zur Vollständigkeit äquivalent sind. Wir wollen das präzisieren.

1.99. DEFINITION. Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Abstandsfunktion  $d$ , dann ist der *Durchmesser* von  $(M, g)$  definiert als

$$\text{diam}(M, g) = \sup \{ d(p, q) \mid p, q \in M \} \in (0, \infty] .$$

1.100. BEISPIEL. Während der euklidische und der hyperbolische Raum unendlichen Durchmesser haben, gilt

$$\text{diam}(S^n, g^{\text{sph}}) = \pi$$

für alle  $n \geq 1$ .

Zur Begründung wählen wir  $p, q \in S^n$ , dann liegen  $p$  und  $q$  auf einem Großkreis  $c$ , also einer Geodätischen in  $S^n$ . Sei  $c$  nach Bogenlänge parametrisiert, dann gilt  $c(t) = c(t + 2\pi n)$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$ . O.B.d.A. sei also  $c(0) = p$ ,  $c(r) = q$  für  $r \in [0, 2\pi)$ . Es folgt

$$d(p, q) \leq \min(L(c|_{[0,r]}), L(c|_{[r,2\pi]})) \leq \min(r, 2\pi - r) \leq \pi .$$

Auf der anderen Seite sieht man leicht, dass Antipoden  $p$  und  $-p$  genau den Abstand  $\pi$  haben.

Das bedeutet dann aber auch, dass jeder parametrisierte Großkreis der Länge  $l > \pi$  nicht mehr die kürzeste Verbindung zwischen seinen Endpunkten ist. Um dieses Phänomen werden wir uns im nächsten Abschnitt kümmern.

Hier noch eine schöne Folgerung aus dem Satz von Hopf-Rinow.

1.101. FOLGERUNG. Sei  $(M, g)$  eine vollständige zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann ist  $M$  genau dann kompakt, wenn  $\text{diam}(M)$  endlich ist.  $\square$

1.102. BEISPIEL. Also sind euklidische und hyperbolische Räume nicht kompakt, wohl aber die Sphären.

## 1.6. Kürzeste Geodätische, Schnitort und konjugierter Ort

Wir wissen, dass kürzeste Kurven zwischen zwei Punkten Geodätische sind, aber die Umkehrung ist nicht immer richtig, wie wir anhand der Sphäre in Beispiel 1.100 gesehen haben.

Sei  $(M, g)$  wie immer eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir betrachten auf  $TM$  die Funktion  $v \mapsto \|v\|^2$ , die genau so oft differenzierbar ist wie  $TM$  selbst. Da 1 ein regulärer Wert ist, ist

$$SM = \{ v \in TM \mid \|v\|^2 = 1 \}$$

eine Untermannigfaltigkeit von  $TM$ , das *Einheitstangentialbündel* oder auch *Einheitssphärenbündel* von  $M$ . Wir schreiben  $S_p M = SM \cap T_p M$ , dann ist  $S_p M$  eine runde Sphäre im euklidischen Vektorraum  $(T_p M, g_p)$ .

1.103. DEFINITION. Sei  $(M, g)$  eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zu jedem  $v \in SM$  definieren wir

$$s(v) := \sup \{ t > 0 \mid d(c_v(t), c_v(0)) = t \} \in (0, \infty] ,$$

dann heißt die Menge

$$C := \{ s(v) \cdot v \mid v \in SM \text{ mit } s(v) < \infty \} \subset TM$$

der *tangentiale Schnittort* von  $(M, g)$ . Für alle  $p \in M$  heißt  $C_p := C \cap T_p M$  der *tangentiale Schnittort* von  $p$  und

$$C(p) = \exp_p(C_p) \subset M$$

der *Schnittort* von  $p$  in  $M$ . Schließlich heißt

$$\rho(p) = \inf_{v \in S_p M} s(v) = \inf_{q \in C(p)} d(p, q) \in (0, \infty]$$

der *Injektivitätsradius* von  $p$  und

$$\rho = \inf_{p \in M} \rho(p) = \inf_{v \in SM} s(v) \in [0, \infty]$$

der *Injektivitätsradius* von  $M$ .

1.104. BEMERKUNG. Wenn wir  $r > 0$  wie in Folgerung 1.91 wählen, sehen wir sofort, dass der Injektivitätsradius von  $p$  mindestens  $r$  beträgt, insbesondere gilt  $\rho(p) > 0$  für alle  $p \in M$  wie in der Definition behauptet. Es gibt allerdings durchaus Beispiele von Mannigfaltigkeiten mit  $\rho(M) = 0$ .

1.105. BEISPIEL. Auf dem Einheitstangentenbündel der runden Sphäre  $(S^n, g^{\text{sph}})$  ist die obige Funktion  $s \equiv \pi$  konstant nach Beispiel 1.100. Es folgt  $C(p) = \{-p\}$  für alle  $p \in S^n$ , und der Injektivitätsradius ist  $\rho(p) = \pi = \rho(M)$ .

Im euklidischen wie im hyperbolischen Raum ist jede Geodätische (also jede euklidische bzw. hyperbolische Gerade) die kürzeste Verbindung zwischen je zwei ihrer Punkte. In diesem Fall gilt also  $s \equiv \infty$  und  $C_p = \emptyset = C(p)$  für alle Punkte  $p$ , und wir haben  $\rho(p) = \infty = \rho(M)$ .

Im allgemeinen ist die Funktion  $s$  nicht konstant, oft ist sie nicht einmal differenzierbar. Wir wollen jetzt den Namen „Injektivitätsradius“ näher beleuchten.

1.106. PROPOSITION. Sei  $(M, g)$  eine zusammenhängende, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, und sei  $s: SM \rightarrow (0, \infty]$  die Funktion aus Definition 1.103. Dann sind die folgenden Abbildungen injektiv:

$$\begin{aligned} \exp_p: \{tv \mid v \in S_p M, 0 \leq t < s(v)\} &\rightarrow M && \text{für alle } p \in M \\ \text{und } \exp \times \pi: \{tv \mid v \in SM, 0 \leq t < s(v)\} &\rightarrow M \times M. \end{aligned}$$

Später werden wir sehen, dass die obigen Abbildungen sogar Diffeomorphismen auf ihr Bild sind, aber dazu brauchen wir etwas mehr Technik.

BEWEIS. Die zweite Aussage folgt sofort aus der ersten, denn aus  $(\exp \times \pi)(v) = (\exp \times \pi)(w)$  folgt sofort, dass  $v$  und  $w \in TM$  den gleichen Fußpunkt haben.

Wir nehmen jetzt an, dass  $v, w \in SM$  und  $t < s(v)$ ,  $u < s(w)$  mit  $\exp_p(tv) = \exp_p(uw) =: q \in M$  gegeben sind. Aus der Definition von  $s$  folgt, dass sowohl  $c_v$  als auch  $c_w$  kürzeste Verbindungen sind, also

$$t = L(c_v|_{[0,t]}) = d(p, q) = L(c_w|_{[0,u]}) = u.$$

Für jedes  $t' > t$  betrachten wir den Punkt  $q' = \exp_p(t'v)$ . Wir erhalten zwei Verbindungen der Länge  $t'$  von  $p$  nach  $q'$ , nämlich  $c_v$  und die nicht differenzierbare Kurve

$$\gamma: r \mapsto \begin{cases} c_w(r) & \text{für } r \leq t, \text{ und} \\ c_v(r) & \text{für } r \geq t. \end{cases}$$

In Normalkoordinaten  $\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi$  um  $q$  sind sowohl  $c_v$  als auch  $c_w$  radiale Geodätische, die sich unter einem Winkel  $\alpha$  treffen. Für jedes hinreichend kleine  $0 < \varepsilon < t' - t$  ersetzen wir jetzt  $\gamma$  durch die (ebenfalls nicht differenzierbare) Kurve  $\gamma_\varepsilon$ , die außerhalb von  $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)$  mit  $\gamma$  übereinstimmt, und auf  $[t - \varepsilon, t + \varepsilon]$  in Normalkoordinaten eine gerade Strecke beschreibt. Nach

dem Gauß-Lemma sind  $\varphi \circ c_v$  und  $\varphi \circ c_w$  euklidische Geraden in  $V^\varphi$ . Es ist jetzt leicht zu sehen, dass die Kurven  $\gamma_\varepsilon$  in der euklidischen Metrik auf  $V^\varphi$  um  $c\varepsilon$  kürzer als  $\gamma$  sind, wobei

$$c = 2 \left( 1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right) > 0 .$$

Nach Proposition 1.85 stimmt  $g^\varphi$  in  $0_q$  mit der euklidischen Metrik  $g_q$  auf  $T_qM$  überein, und die ersten Ableitungen von  $g^\varphi$  bei  $0_q$  verschwinden, also fällt auch die Länge der Kurven  $\gamma_\varepsilon$  in  $M$  bezüglich  $g$  noch streng monoton für hinreichend kleine  $\varepsilon$ . Aber damit sind weder  $c_v$  noch  $\gamma$  kürzeste Verbindungen von  $p$  nach  $q'$ , es folgt  $s(v) \leq t'$  für alle  $t' > t$ , und somit  $t \geq s(v)$  im Widerspruch zur Annahme. Ein ähnliches Argument beweist auch  $t = u \geq s(w)$ .  $\square$

1.107. BEMERKUNG. Sei  $v$  in  $SM$ , dann folgt

$$d(c_v(t), c_v(0)) < t \quad \text{für alle } t > s(v) .$$

Insbesondere ist  $c_v|_{[0,t]}$  nicht mehr die kürzeste Verbindung ihrer Endpunkte für  $t > s(v)$ .

Zur Begründung sei  $t > s(v)$ . Nach Definition von  $s(v)$  existiert eine Zahl  $t_0 \in (s(v), t)$ , so dass

$$t_0 = L(c_v|_{[0,t_0]}) > d(c_v(0), c_v(t_0)) =: r_0 ,$$

also existiert eine kürzere Verbindung  $\gamma_0: [0, r_0] \rightarrow M$  von  $p := c_v(0)$  nach  $q := c_v(t_0) = \gamma_0(r_0)$ . Aber dann ist die zusammengesetzte Kurve  $\gamma$  mit

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_0(t) & \text{falls } t \leq r_0, \text{ und} \\ c_v(t + t_0 - r_0) & \text{falls } t \geq r_0 \end{cases}$$

eine kürzere Verbindung von  $p$  nach  $c_v(t)$  als  $c_v$  (und sie lässt sich zu einer Kurve glätten, die immer noch kürzer als  $c_v$  ist). Ein genaues Studium der Funktion  $s: SM \rightarrow (0, \infty]$  verrät uns also viel über die kürzesten Geodätischen auf einer Mannigfaltigkeit.

Bevor wir weitere Aussagen zur Funktion  $s$  und zum Injektivitätsradius machen können, definieren wir den verwandten Begriff des konjugierten Ortes und des konjugierten Punktes.

1.108. DEFINITION. Sei  $(M, g)$  vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, und seien  $p \in M$  und  $v \in S_pM$ . Ein Vektor  $tv \in T_pM$  für  $t > 0$  heißt zu  $p$  *konjugiert*, wenn es ein Jacobifeld  $Y \neq 0$  längs  $c_v$  mit  $Y(0) = Y(t) = 0$  gibt. Die Menge aller zu  $p$  konjugierten Vektoren in  $T_pM$  heißt der *tangentiale konjugierte Ort* von  $p$ . Das Infimum der Beträge von zu  $p$  konjugierten Vektoren heißt der *konjugierte Radius* von  $p$ .

Das Bild des tangentialen konjugierten Ortes von  $p$  unter  $\exp_p$  heißt der *konjugierte Ort* von  $p$  in  $M$ , seine Elemente heißen zu  $p$  *konjugierte Punkte*, und  $q$  heißt zu  $p$  konjugiert *längs  $c$* , wenn  $c$  eine Geodätische durch  $p = c(a)$  und  $q = c(b)$  ist, entlang der ein Jacobifeld  $Y \neq 0$  mit  $Y(a) = Y(b) = 0$  existiert.

Aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen folgt leicht, dass die  $t > 0$ , für die  $tv$  zu  $p$  konjugiert sind, diskret in  $\mathbb{R}$  liegen.

1.109. BEMERKUNG. Nach Bemerkung 1.83 wird das Differential von  $\exp_p$  bei  $v \in TM$  genau durch Lösung der Jacobi-Feld-Gleichung für Vektorfelder  $Y$  längs  $c_v$  mit  $Y(0) = 0$  gegeben. Insbesondere beschreibt der konjugierte Ort zu  $p$  in  $T_pM$  genau die kritischen Punkte von  $\exp_p$ , somit ist  $\exp_p$  außerhalb des konjugierten Ortes ein lokaler Diffeomorphismus.

1.110. BEISPIEL. Nach Übung 1 von Blatt 5 gibt es keine konjugierten Punkte auf  $(\mathbb{R}^n, g^{\text{eukl}})$  und  $(H^n, g^{\text{hyp}})$ . Somit ist der konjugierte Radius hier  $\infty$ , genau wie der Injektivitätsradius nach Beispiel 1.105.

Auf der Sphäre  $(S^n, g^{\text{sph}})$  hingegen werden Jacobifelder  $Y$  längs  $c_v$  mit  $Y(0) = 0$  für  $v \in SM$  gegeben durch  $Y(t) = \sin(t)W$  für ein zu  $\dot{c}_v$  senkrechtes, längs  $c_v$  paralleles Vektorfeld  $W$ . Somit

sind genau die Vektoren  $\pi nv$  für  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  und  $v \in S_p M$  zu  $p$  konjugiert. Mithin ist  $\pi$  der konjugierte Radius, und auch der Injektivitätsradius nach Beispiel 1.105.

Wir wollen jetzt den konjugierten Radius mit dem Injektivitätsradius in Beziehung setzen.

1.111. PROPOSITION. *Sei  $(M, g)$  eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, und sei die Funktion  $s: S \rightarrow (0, \infty]$  wie in Definition 1.103 gegeben. Sei  $p \in M$ , dann ist kein Vektor  $tv$  mit  $v \in S_p M$  und  $0 < t < s(v)$  zu  $p$  konjugiert.*

BEWEIS. Dieser Beweis verläuft ähnlich wie der von Proposition 1.106. Wir nehmen an, dass  $t_0 v$  zu  $p$  konjugiert sei für ein  $t_0 \in (0, s(v))$ , und wollen zeigen, dass dann  $c = c_v$  für kein  $t_1 \in (t_0, s(v))$  mehr kürzeste Geodätische zwischen  $p$  und  $c(t_1)$  ist, im Widerspruch zur Definition von  $s(v)$ .

Sei dazu  $Y \neq 0$  ein Jacobifeld längs  $c$  mit  $Y(0) = Y(t_0) = 0$ . Dann folgt  $\dot{Y}(t_0) \neq 0$ , denn sonst wäre ja  $Y \equiv 0$  nach Picard-Lindelöf. Aus der Jacobigleichung folgt  $Y \perp \dot{c}$  auf ganz  $[0, t_1]$ . Sei  $W$  ein beliebiges glattes Vektorfeld längs  $c$  mit  $W \perp \dot{c}$  auf ganz  $[0, t_1]$ , und mit  $W(t_0) = -\dot{Y}(t_0)$  und  $W(0) = W(t_1) = 0$ . Wir fixieren  $\eta > 0$  und konstruieren eine stetige Variation  $c_s: [0, t_1] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  von  $c$ , so dass

- (1) die Einschränkungen  $c_s|_{[0, t_0] \times (-\varepsilon, \varepsilon)}$  und  $c_s|_{[t_0, t_1] \times (-\varepsilon, \varepsilon)}$  glatt sind;
- (2) das Variationsfeld  $V$  die folgende Gestalt hat:

$$V(t) = \begin{cases} Y(t) + \eta W(t) & \text{für } t \in [0, t_0], \text{ und} \\ \eta W(t) & \text{für } t \in [t_0, t_1]; \end{cases}$$

- (3)  $c_s(0) = c(0)$  und  $c_s(t_1) = c(t_1)$  für alle  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  gilt.

Da  $c = c_0$  eine Geodätische ist, folgt

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} L(c_s|_{[0, t_1]}) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} L(c_s|_{[0, t_0]}) + \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} L(c_s|_{[t_0, t_1]}) = \langle \dot{c}, V \rangle|_{[0, t_0]} + \langle \dot{c}, V \rangle|_{[t_0, t_1]} = 0$$

aus der ersten Variationsformel aus Satz 1.65. Wir benutzen jetzt die zweite Variationsformel aus Satz 1.87. Da  $V \perp \dot{c}$  auf ganz  $[0, t_1]$ , erhalten wir auf  $[0, t_0]$  zunächst

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2}{ds^2} \right|_{s=0} L(c_s|_{[0, t_0]}) &= \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} V, \dot{c} \right\rangle|_0^{t_0} + \int_0^{t_0} (\|\dot{Y} + \eta \dot{W}\|^2 - \langle R_{Y+\eta W, \dot{c}} \dot{c}, Y + \eta W \rangle) dt \\ &= \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} V(t_0), \dot{c}(t_0) \right\rangle + \underbrace{\langle \dot{Y}, Y + 2\eta W \rangle|_0^{t_0}}_{=0 \text{ für } t=0} \\ &\quad + \int_0^{t_0} (\eta^2 \langle \dot{W}, \dot{W} \rangle - \underbrace{\langle \dot{Y} + R_{Y, \dot{c}} \dot{c}, Y + 2\eta W \rangle}_{=0} - \eta^2 \langle R_{W, \dot{c}} \dot{c}, W \rangle) dt \\ &= \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} V(t_0), \dot{c}(t_0) \right\rangle - 2\eta \|\dot{Y}(t_0)\|^2 + \eta^2 \int_0^{t_0} (\langle \dot{W}, \dot{W} \rangle - \langle R_{W, \dot{c}} \dot{c}, W \rangle) dt \end{aligned}$$

wegen der Jacobifeld-Gleichung, und da  $W(t_0) = -\dot{Y}(t_0)$ . Auf dem Teilintervall  $[t_0, t_1]$  gilt  $V = \eta W$ , und wir erhalten analog

$$\left. \frac{d^2}{ds^2} \right|_{s=0} L(c_s|_{[t_0, t_1]}) = -\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} V(t_0), \dot{c}(t_0) \right\rangle + \eta^2 \int_{t_0}^{t_1} (\langle \dot{W}, \dot{W} \rangle - \langle R_{W, \dot{c}} \dot{c}, W \rangle) dt.$$

Addieren liefert

$$\left. \frac{d^2}{ds^2} \right|_{s=0} L(c_s|_{[0, t_1]}) = -2\eta \|\dot{Y}(t_0)\|^2 + \eta^2 \int_0^{t_1} (\langle \dot{W}, \dot{W} \rangle - \langle R_{W, \dot{c}} \dot{c}, W \rangle) dt.$$

Für  $\eta > 0$  hinreichend klein ist dieser Ausdruck negativ, folglich ist  $c|_{[0, t_1]}$  nicht die kürzeste Verbindung von  $p$  nach  $c(t_1)$ .  $\square$



Wir wollen jetzt zeigen, dass die Funktion  $s$  aus Definition 1.103 stetig ist. Dazu benötigen wir ein topologisches Lemma.

1.112. LEMMA. *Es seien  $M, N$  metrische Räume,  $A \subset M$  kompakt, und  $F: M \rightarrow N$  ein lokaler Homöomorphismus, so dass  $F|_A$  injektiv ist. Dann existiert eine offene Umgebung  $U$  von  $A$  in  $M$ , so dass  $F|_U$  ebenfalls injektiv ist.*

BEWEIS. Es reicht, eine Umgebung  $U$  von  $A$  zu finden, auf der  $F$  injektiv ist. Dann ist  $F^{-1}$  auf  $F(U)$  wohldefiniert. Es reicht, Folgenstetigkeit von  $F^{-1}$  zu zeigen. Dazu sei  $q_i = F(p_i)$  eine Folge in  $F(U)$ , die gegen  $q = F(p)$  konvergiert, wieder mit  $p \in U$ . Nach Voraussetzung existiert eine Umgebung  $V$  von  $p$ , auf der  $F$  ein lokaler Homöomorphismus ist, ohne Einschränkung gelte  $V \subset U$ . Da  $q_i \rightarrow q$ , liegen fast alle  $q_i$  in  $F(V)$ . Aufgrund der Injektivität von  $F$  auf  $U$  liegen fast alle  $p_i$  in  $V$ , und es gilt  $q_i \rightarrow q$  genau dann, wenn  $p_i \rightarrow p$ . Also ist  $F|_U$  dann bereits Homöomorphismus.

Falls es keine Umgebung  $U$  von  $A$  gibt, auf der  $F$  injektiv ist, wäre  $F|_{U_i}$  für kein  $i \in \mathbb{N}$  injektiv, wobei

$$U_i = \left\{ p \in M \mid \text{es gibt } x \in A \text{ mit } d(p, x) < \frac{1}{i} \right\}.$$

Also finden wir  $p_i \neq q_i \in U_i$  mit  $F(p_i) = F(q_i)$  und  $x_i, y_i \in A$  mit  $d(p_i, x_i), d(q_i, y_i) < \frac{1}{i}$ . Da  $A$  kompakt ist, konvergieren  $x_i$  und  $y_i$  nach Übergang zu einer Teilfolge gegen  $p$  bzw.  $q \in A$ . Dann folgt aber auch  $p = \lim_{i \rightarrow \infty} p_i, q = \lim_{i \rightarrow \infty} q_i$ , und

$$F(p) = \lim_{i \rightarrow \infty} F(p_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} F(q_i) = F(q),$$

also  $p = q$  wegen der Injektivität von  $F|_A$ . Da  $F$  lokaler Homöomorphismus ist, existiert eine Umgebung  $V$  von  $p = q$  in  $M$ , auf der  $F$  umkehrbar, insbesondere injektiv ist. Da fast alle  $p_i, q_i$  in  $V$  liegen, folgt  $p_i = q_i$  aus  $F(p_i) = F(q_i)$  für fast alle  $i$ , im Widerspruch zur Annahme  $p_i \neq q_i$ . Also muss die gesuchte Umgebung  $U$  von  $A$  existieren.  $\square$

Für den folgenden Beweis wählen wir beliebige Riemannsche Metriken auf den Mannigfaltigkeiten  $SM$  und  $TM$  — da die Aussagen, die uns interessieren, topologischer Natur sind, ist es wegen Folgerung 1.93 egal, welche Metriken wir benutzen.

1.113. LEMMA. *Sei  $(M, g)$  eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann ist die Funktion  $s: SM \rightarrow (0, \infty]$  aus Definition 1.103 stetig.*

BEWEIS. Wir beweisen Folgenstetigkeit, die für metrische Räume zur Stetigkeit äquivalent ist. Sei also  $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $SM$  mit Grenzwert  $v$ , dann folgt  $\lim_{i \rightarrow \infty} \pi(v_i) = p := \pi(v)$ . Nach Übergang zu einer Teilfolge konvergiert  $s_i := s(v_i)$  gegen  $s_\infty \in [0, \infty]$ .

Falls  $s(v) < s_\infty$ , wähle  $t_0 \in (s(v), s_\infty)$ , dann sind die Geodätischen  $c_{v_i}|_{[0, t_0]}$  für fast alle  $i$  kürzeste. Wegen der Stetigkeit der Abstandsfunktion  $d$  ist dann auch  $c_v|_{[0, t_0]}$  kürzeste im Widerspruch zu Bemerkung 1.107 und  $t_0 > s(v)$ . Es folgt also bereits  $s(v) \geq s_\infty$ .

Falls  $s(v) > s_\infty$ , wähle  $t_0 \in (s_\infty, s(v))$ . Dann sind die Geodätischen  $c_{v_i}|_{[0, t_0]}$  für fast alle  $i$  keine Kürzesten, und es gibt  $w_i \in SM$  und kürzere nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische  $c_{w_i}$  mit  $c_{w_i}(0) = c_{v_i}(0) = \pi(v_i)$  und  $c_{w_i}(t_i) = c_{v_i}(t_0)$ , wobei  $t_i < t_0$ . Sei  $K \subset M$  eine kompakte Umgebung von  $\pi(v)$ , dann ist  $\pi^{-1}K \subset SM$  ebenfalls kompakt. Insbesondere existiert ein Grenzwert  $w = \lim_{i \rightarrow \infty} w_i \in SM$  nach Übergang zu einer Teilfolge, und es gilt  $\pi(w) = \pi(v)$ . Nach nochmaligem Übergang zu einer Teilfolge konvergiert  $t_i$  gegen  $t' \in [0, t_0]$ .

Auf der anderen Seite ist nach Annahme  $c_v|_{[0, t_0]}$  Kürzeste, also ist insbesondere die Abbildung  $\pi \times \exp$  auf  $A = [0, t_0] \cdot v$  injektiv. Wegen Proposition 1.111 hat  $\exp_p$  entlang von  $A = [0, t_0] \cdot v$  invertierbares Differential, und wie im Beweis von Satz 1.79 (2) hat dann auch  $\pi \times \exp$  entlang von  $A = [0, t_0] \cdot v$  invertierbares Differential, ist also insbesondere ein lokaler Homöomorphismus nach dem Umkehrsatz. Nach Lemma 1.112 existiert eine offene Umgebung  $U \subset TM$  von  $A$ , so

dass  $(\pi \times \exp)|_U$  injektiv ist. Da fast alle Vektoren  $t_0 v_i$  in  $U$  liegen, liegen also fast alle  $t_i w_i$  außerhalb von  $U$ . Da  $TM \setminus U$  abgeschlossen ist, liegt dann auch ihr Grenzwert  $t'w \in M \setminus U$ .

Somit existieren zwei kürzeste Geodätische  $c_v|_{[0,t_0]}$  und  $c_w|_{[0,t']}$  von  $p$  nach  $c_v(t_0)$ , was wegen Proposition 1.106 im Widerspruch zu  $t_0 < s(v)$  steht. Es folgt  $s(v) \geq s_\infty$ , was die Stetigkeit von  $s: SM \rightarrow (0, \infty)$  beweist.  $\square$

1.114. FOLGERUNG. *Der Injektivitätsradius wird durch eine stetige Funktion  $\rho: M \rightarrow (0, \infty]$  gegeben.*  $\square$

1.115. SATZ. *Sei  $M$  eine vollständige, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, und sei  $p \in M$ . Dann sind die Abbildungen*

$$\exp_p: \{ tv \mid v \in S_p M, 0 \leq t < s(v) \} \rightarrow M \quad \text{für alle } p \in M \quad (1)$$

$$\text{und} \quad \exp \times \pi: \{ tv \mid v \in SM, 0 \leq t < s(v) \} \rightarrow M \times M \quad (2)$$

*auf offenen Teilmengen von  $T_p M$  bzw. von  $TM$  definiert und Diffeomorphismen auf ihre Bilder; diese sind offen und dicht in  $M$  beziehungsweise  $M \times M$ .*

BEWEIS. Nach Lemma 1.113 sind die Definitionsbereiche offen. Wegen Propositionen 1.106 und 1.111 sind die Abbildungen injektiv und lokale Diffeomorphismen, somit ist auch ihr Bild offen. Die Stetigkeit der Umkehrabbildung folgt dann mit dem gleichen Argument wie im Beweis von Lemma 1.112.

Zu zeigen bleibt, dass das Bild der Abbildungen (1) und (2) dicht ist. Dazu seien  $p, q \in M$  und  $c_v: [0, t_0] \rightarrow M$  eine kürzeste Geodätische von  $p$  nach  $q$ . Dann gilt  $t_0 \leq s(v)$ , also liegen die Punkte  $c_v(t)$  für  $0 \leq t < t_0$  im Bild von (1), und es gilt  $q = \lim_{t \nearrow t_0} c_v(t)$ .  $\square$

## 1.7. Riemannsche Überlagerungen und Quotienten

In diesem Kapitel geben wir einige wichtige Konstruktionen von Mannigfaltigkeiten an. Die meisten der folgenden Konstruktionen sind für weitaus allgemeinere Klassen topologischer Räume sinnvoll, uns interessieren hier aber nur Mannigfaltigkeiten. Wir werden in diesem Abschnitt ausnahmsweise keine Beweise führen, sondern nur die wichtigsten Ideen skizzieren.

1.116. DEFINITION. Eine Abbildung  $\pi: N \rightarrow M$  zwischen topologischen Mannigfaltigkeiten heißt *Überlagerung*, wenn zu jedem Punkt  $p \in M$  eine Umgebung  $U \subset M$  von  $p$ , ein diskreter topologischer Raum  $F$  und ein Homöomorphismus  $\Phi: \pi^{-1}U \rightarrow U \times F$  existiert, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} N & \supset & \pi^{-1}U & \xrightarrow{\Phi} & U \times F \\ \pi \downarrow & & \pi \downarrow & & \pi_U \downarrow \\ M & \supset & U & \xlongequal{\quad} & U \end{array}$$

kommutiert. Eine Überlagerung zwischen  $C^k$ -Mannigfaltigkeiten heißt *differenzierbare Überlagerung*, wenn sie von Klasse  $C^k$  ist und  $d\pi_q: T_q N \rightarrow T_{\pi(q)} M$  für alle  $q$  ein Isomorphismus ist. Eine differenzierbare Überlagerung zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten  $p: (N, \bar{g}) \rightarrow (M, g)$  heißt *Riemannsch*, wenn  $\bar{g} = \pi^*g$ , d.h., wenn für alle  $q \in N$  und alle  $v, w \in T_q M$  gilt, dass

$$\bar{g}_q(v, w) = g_{\pi(q)}(d\pi_q v, d\pi_q w) .$$

1.117. BEISPIEL. Betrachte  $S^1 \subset \mathbb{C}$ , dann ist die Abbildung  $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  mit  $\varphi \mapsto e^{i\varphi}$  eine Überlagerung. Sei etwa  $z = e^{i\varphi} \in S^1$  der Punkt mit dem Winkel  $\varphi$  zur positiven reellen Achse, dann ist  $p^{-1}(z) = \varphi + 2\pi\mathbb{Z}$ . Wähle als Umgebung  $U = S^1 \setminus \{-z\} \cong (\varphi - \pi, \varphi + \pi)$ , als Faser  $F = 2\pi\mathbb{Z}$ , dann existiert eine Abbildung  $\Phi: p^{-1}U \rightarrow (\varphi - \pi, \varphi + \pi) \times \mathbb{Z}$  mit  $\Phi^{-1}(\psi, n) = \psi + 2\pi n$ , so dass obiges Diagramm kommutiert. Wenn wir  $S^1$  und  $\mathbb{R}$  mit den Standardmetriken versehen, ist diese Überlagerung Riemannsch.

1.118. BEMERKUNG. Sei  $\pi: N \rightarrow M$  eine differenzierbare Überlagerung.

(1) Dann ist auch  $d\pi: TN \rightarrow TM$  wieder eine Überlagerung.

(2) Sei  $g$  eine Riemannsche Metrik auf  $M$ , dann existiert genau eine Metrik  $\bar{g} = \pi^*g$  auf  $N$ , die  $\pi$  zu einer Riemannschen Überlagerung macht.

Mit der folgenden Überlegung können wir später zeigen, dass bestimmte Abbildungen Riemannsche Überlagerungen sind. Sei  $(M, g)$  Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $F: N \rightarrow M$  glatt, dann bezeichne  $F^*g$  die faserweise Bilinearform mit

$$(F^*g)_q(v, w) = g(dF_q(v), dF_q(w)) .$$

Wenn  $F$  eine Immersion ist, also  $dF_q: T_qN \rightarrow T_{F(q)}M$  für alle  $q \in N$  injektiv ist, dann ist  $F^*g$  eine Riemannsche Metrik auf  $N$ .

1.119. LEMMA. *Es seien  $(M, g)$  und  $(N, \bar{g})$  zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeiten und  $F: N \rightarrow M$  eine lokale Isometrie, für alle  $q \in N$  ist also  $dF_q: T_qN \rightarrow T_{F(q)}M$  ein linearer Isomorphismus mit  $F^*g = \bar{g}$ . Wenn  $N$  vollständig ist, dann auch  $M$ , und  $F$  ist eine Riemannsche Überlagerung.*

BEWEIS. Da  $F$  eine lokale Isometrie ist, bildet  $F$  Geodätische in  $N$  auf Geodätische in  $M$  ab. Insbesondere gilt

$$F \circ \exp = \exp \circ dF: TN \rightarrow M .$$

Sei jetzt  $q \in N$  und  $p = F(q) \in M$ , dann ist

$$\exp_p = F \circ \exp_q \circ (dF_q)^{-1}: T_pM \rightarrow M$$

aufgrund der Vollständigkeit von  $N$  nach dem Satz 1.96 (3) von Hopf-Rinow auf ganz  $T_pM$  definiert, also ist  $M$  ebenfalls vollständig.

Es sei  $p \in M$  und  $0 < r < \rho(p)$ . Setze  $U = B_r(p) = \exp_p(B_r(0_p))$ . Wir wollen zeigen, dass

$$F^{-1}(U) = \bigcup_{q \in F^{-1}(\{p\})} B_r(q) , \quad (*)$$

und dass die obige Vereinigung disjunkt ist.

Zu „ $\supset$ “ sei  $q \in F^{-1}(\{p\})$  und  $y \in B_r(q)$ . Wegen Vollständigkeit von  $N$  existiert  $w \in B_r(o_q) \subset T_qN$  mit  $y = \exp_q w$ . Sei  $v = dF_q(w)$ , dann gilt

$$F(y) = F(\exp_q w) = \exp_p(v) \in U ,$$

da  $\|v\| = \|w\| < r$ .

Zu „ $\subset$ “ sei  $y \in F^{-1}(U)$  mit  $x = F(y) \in U$ . Es sei  $c$  die kürzeste Geodätische von  $p = c(0)$  nach  $x = c(1)$ . Setze  $w = (dF_y)^{-1}(-\dot{c}(1))$  und  $q = \exp_y w$ , dann folgt

$$F(q) = F(\exp_y w) = \exp_x(-\dot{c}(1)) = p$$

und  $d(q, y) \leq \|w\| = d(p, x) < r$ , also  $y \in B_r(q)$  mit  $q \in F^{-1}(\{p\})$ . Somit gilt (\*) für alle  $p \in M$ , und  $F$  ist eine Überlagerung.  $\square$

1.120. BEMERKUNG. Die Vollständigkeit von  $N$  im obigen Lemma ist eine notwendige Voraussetzung, insbesondere handelt es sich um ein metrisches, nicht um ein rein differentialtopologisches Resultat. Betrachte etwa die Inklusion  $\iota$  einer offenen Teilmenge  $\emptyset \neq N \subset \mathbb{R}^n$  mit  $N \neq \mathbb{R}^n$ , versehen mit der euklidischen Metrik. Sie ist keine Überlagerung, denn sei  $p \in \bar{N} \setminus N$  ein Randpunkt, dann liegt jede Umgebung  $U$  teilweise, aber nicht ganz im Bild von  $\iota$ .

Um mehr Beispiele für Überlagerungen zu erhalten, brauchen wir eine Quotientenkonstruktion für Mannigfaltigkeiten.

1.121. DEFINITION. Sei  $\Gamma$  eine Gruppe mit neutralem Element  $e$ , und sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit.

- (1) Eine *Operation* von  $\Gamma$  auf  $M$  ist ein Gruppenhomomorphismus von  $\Gamma$  in die Gruppe der Homöomorphismen von  $M$  in sich; für  $\gamma \in \Gamma$  schreiben wir oft nur kurz  $\gamma: M \rightarrow M$ .
- (2) Der *Quotient*  $M/\Gamma$  von  $M$  nach  $\Gamma$  ist die Menge der *Orbiten*

$$[p] = \{ \gamma(p) \mid \gamma \in \Gamma \}$$

für alle  $p \in M$ , und die Abbildung  $\pi: M \rightarrow M/\Gamma$  mit  $p \mapsto [p]$  heißt *Quotientenabbildung*.

- (3) Eine Operation heißt *frei*, wenn  $\gamma(p) \neq p$  für alle  $p \in M$  und alle  $\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}$ .
- (4) Eine Operation heißt *eigentlich diskontinuierlich*, wenn für alle  $p, q \in M$  Umgebungen  $U$  von  $p$  und  $V$  von  $q$  in  $M$  existieren, so dass  $\gamma(U) \cap V = \emptyset$  für alle  $\gamma \in \Gamma$  mit  $\gamma(p) \neq q$ .
- (5) Sei  $M$  Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine Operation heißt *isometrisch* oder *Riemannsch*, wenn alle  $\gamma \in \Gamma$  durch Isometrien operieren.

Wenn  $M$  eine  $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit ist, nennen wir eine Wirkung *differenzierbar* oder  $\mathcal{C}^k$ -*Wirkung*, wenn die Abbildungen  $\gamma: M \rightarrow M$  aus (1) jeweils  $\mathcal{C}^k$ -Diffeomorphismen sind.

Man beachte, dass es für den Begriff „eigentlich diskontinuierlich“ auch andere, für Mannigfaltigkeiten aber äquivalente Beschreibungen in der Literatur gibt.

1.122. BEISPIEL. Wir betrachten den euklidischen Raum  $M = \mathbb{R}^n$  mit der Standardmetrik. Jede Untergruppe  $\Gamma \subset (\mathbb{R}^n, +)$  operiert frei auf  $\mathbb{R}^n$  durch Addition  $\gamma(p) = p + \gamma$  für alle  $\gamma \in \Gamma$ . Genau dann, wenn  $\Gamma$  diskret ist, d.h., wenn jedes Element  $\gamma \in \Gamma$  eine Umgebung  $U$  besitzt, die  $\Gamma \setminus \{\gamma\}$  nicht trifft, ist diese Operation eigentlich diskontinuierlich. Denn falls

$$r := \inf \{ d(p + \gamma, q) \mid \gamma \in \Gamma, p + \gamma \neq q \} > 0$$

für je zwei  $p, q \in \mathbb{R}^n$  gilt, wähle  $U = B_{\frac{r}{2}}(p)$  und  $V = B_{\frac{r}{2}}(q)$ , und  $\Gamma$  operiert eigentlich diskontinuierlich. Ansonsten existiert eine Folge  $(\gamma_i) \in \Gamma$  mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d(p + \gamma_i, q) = 0.$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d(\gamma_i, \gamma_{i+1}) = \lim_{i \rightarrow \infty} d(p + \gamma_i, p + \gamma_{i+1}) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} d(p + \gamma_i, q) + \lim_{i \rightarrow \infty} d(q, p + \gamma_{i+1}) = 0,$$

im Widerspruch zur obigen Annahme.

Man kann zeigen, dass jede diskrete Untergruppe  $\Gamma \subset (\mathbb{R}^n, +)$  isomorph zu  $\mathbb{Z}^k$  ist, wobei freie Erzeuger  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  in  $\mathbb{R}^n$  linear unabhängige Vektoren sind, insbesondere folgt  $k \leq n$ . Der Quotient von  $M = \mathbb{R}^n$  ist diffeomorph zu  $(S^1)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ . Für  $k = n$  erhalten wir Tori  $T^n = (S^1)^n$ . Ein Spezialfall hiervon ist die Überlagerung der  $S^1$  in Beispiel 1.117. Allerdings sind die Quotienten nach verschiedenen isomorphen Untergruppen von  $(\mathbb{R}^n, +)$  im allgemeinen nicht paarweise isometrisch.

1.123. PROPOSITION. *Es sei  $M$  eine (differenzierbare) Mannigfaltigkeit und  $\Gamma$  eine Gruppe, die frei und eigentlich diskontinuierlich (und differenzierbar) auf  $M$  operiert. Dann trägt der Quotient  $M/\Gamma$  die Struktur einer (differenzierbaren) Mannigfaltigkeit, so dass die Quotientenabbildung  $\pi: M \rightarrow M/\Gamma$  eine (differenzierbare) Überlagerung ist.*

*Falls  $(M, g)$  Riemannsche Mannigfaltigkeit ist, so existiert genau dann eine Metrik  $\bar{g}$  auf  $M/\Gamma$ , die  $\pi$  zu einer Riemannschen Überlagerung macht, wenn  $\Gamma$  isometrisch auf  $(M, g)$  operiert.*

BEWEIS. Zunächst definieren wir die *Quotiententopologie* auf  $M/\Gamma$ : eine Menge  $\bar{U} \subset M/\Gamma$  sei genau dann offen, wenn  $\pi^{-1}\bar{U} \subset M$  offen ist. Wenn  $M$  eigentlich diskontinuierlich operiert, folgt sofort, dass  $M/\Gamma$  wieder ein Hausdorff-Raum ist. Und sei  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine abzählbare Basis von  $M$ , dann überprüft man leicht, dass  $(\pi(U_i))_{i \in \mathbb{N}}$  eine abzählbare Basis von  $M/\Gamma$  ist.

Sei jetzt  $[p] \in M/\Gamma$ , dann wählen wir  $U, V$  wie in der Definition von „eigentlich diskontinuierlich“ zu  $p = q$ . Anschließend wählen wir eine Karte  $\varphi$  um  $p$  mit  $U^\varphi \subset U \cap V$ . Nach Konstruktion gilt  $g(U^\varphi) \cap U^\varphi = \emptyset$  für alle  $\gamma \in \Gamma$  mit  $\gamma(p) \neq p$ , d.h., für alle  $\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}$ , da  $\Gamma$  frei operiert. Insbesondere trifft jeder  $\Gamma$ -Orbit  $[q]$  die Menge  $U^\varphi$  höchstens einmal. Wir definieren

$$\bar{\varphi}: U^{\bar{\varphi}} = \pi(U^\varphi) \rightarrow V^{\bar{\varphi}} = V^\varphi$$

durch  $\bar{\varphi}([q]) = \varphi(q)$  für alle  $q \in U^\varphi$ . Damit ist  $\bar{\varphi}$  bijektiv. Sei  $\bar{W} \subset U^{\bar{\varphi}}$ , und sei  $W = \varphi^{-1}(\bar{\varphi}(W))$ . Dann folgt

$$\pi^{-1}(\bar{W}) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(W),$$

und  $\bar{W}$  ist genau dann offen, wenn  $W$  und damit  $\varphi(W)$  offen ist. Also ist  $\bar{\varphi}$  eine Karte von  $M/\Gamma$  um  $[p]$ , und  $M/\Gamma$  ist eine topologische Mannigfaltigkeit.

Sei jetzt  $M$  differenzierbar, dann konstruieren wir wie oben Karten  $\bar{\varphi}$  zu differenzierbaren Karten von  $M$ . Die Kartenwechsel von  $M/\Gamma$  kommen dann von Kartenwechseln von  $M$ , sind also differenzierbar. Also ist  $M/\Gamma$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Wir zeigen, dass  $\pi$  eine Überlagerung ist. Zu  $[p] \in M/\Gamma$  wählen wir eine Karte  $\bar{\varphi}$  wie oben. Es folgt

$$\begin{array}{ccc} \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(U^\varphi) = \pi^{-1}(U^{\bar{\varphi}}) & \xrightarrow{\sim} & U^{\bar{\varphi}} \times \Gamma \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_{U^{\bar{\varphi}}} \\ U^{\bar{\varphi}} & \xlongequal{\quad} & U^{\bar{\varphi}} \end{array},$$

also ist  $\pi$  eine Überlagerung.

Sei schließlich  $g$  eine Riemannsche Metrik auf  $M$ , und sei  $p \in M$ . Dann haben wir kommutative Diagramme von Isomorphismen

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{d\gamma_p} & T_{\gamma(p)} M \\ d\pi_{\gamma(p)} \downarrow & & \downarrow d\pi_{\gamma(p)} \\ T_{[p]}(M/\Gamma) & \xlongequal{\quad} & T_{[p]}(M/\Gamma) \end{array}$$

für alle  $\gamma \in \Gamma$ . Falls eine Metrik  $\bar{g}$  auf  $M/\Gamma$  existiert, so dass  $\pi$  Riemannsche Überlagerung wird, dann müssen insbesondere alle Elemente von  $\Gamma$  Isometrien sein. Falls das so ist, liefert jeder Isomorphismus  $T_{\gamma(p)} M \rightarrow T_{[p]}(M/\Gamma)$  die gleiche Metrik  $\bar{g}_{[p]}$  auf  $T_{[p]}(M/\Gamma)$ , und in Karten wie oben sieht man leicht, dass so eine differenzierbare Riemannsche Metrik auf  $M/\Gamma$  gegeben wird.  $\square$

Nicht jede Überlagerung  $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$  kommt von einer Gruppenoperation auf  $\tilde{M}$  her, aber die maximale zusammenhängende Überlagerung einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit  $M$  ist immerhin von diesem Typ. Um das besser zu verstehen, benötigen wir auch noch den Begriff der Fundamentalgruppe.

1.124. DEFINITION. Sei  $M$  eine topologische Mannigfaltigkeit, und sei  $p \in M$ .

- (1) Eine *Schleife* in  $M$  am Punkt  $p$  ist eine stetige Kurve  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$  mit  $\gamma(0) = \gamma(1) = p$ .
- (2) Zwei Schleifen  $\gamma_0, \gamma_1$  am Punkt  $p$  heißen *homotop relativ zu  $p$* , kurz  $\gamma_0 \sim \gamma_1$ , wenn es eine stetige Abbildung  $h: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$  mit

$$h(t, i) = \gamma_i(t) \quad \text{und} \quad h(i, s) = p$$

für alle  $s, t \in [0, 1]$  und alle  $i \in \{0, 1\}$  gibt.

(3) Die Verkettung zweier Schleifen  $\gamma_0, \gamma_1$  am Punkt  $p$  ist die Schleife  $\gamma_0\gamma_1$  mit

$$(\gamma_0\gamma_1)(t) = \begin{cases} \gamma_0(2t) & \text{für } s \in [0, \frac{1}{2}], \text{ und} \\ \gamma_1(2t - 1) & \text{für } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

(4) Die *Fundamentalgruppe*  $\pi_1(M, p)$  ist die Menge aller Schleifen in  $M$  am Punkt  $p$  bis auf Homotopie, mit der Verkettung als Verknüpfung.

1.125. BEMERKUNG. Die Fundamentalgruppe  $\pi_1(M, p)$  ist tatsächlich wohldefiniert, und zwar nicht nur für Mannigfaltigkeiten, sondern genauso für beliebige topologische Räume. Das folgende lässt sich leicht überprüfen.

- (1) Seien  $\gamma_0 \sim \gamma'_0$  und  $\gamma_1 \sim \gamma'_1$  Paare homotoper Schleifen am Punkt  $p \in M$ , dann folgt  $\gamma_0\gamma_1 \sim \gamma'_0\gamma'_1$ . Insbesondere ist die Verknüpfung auf  $\pi_1(M, p)$  wohldefiniert.
- (2) Die Verkettung ist assoziativ bis auf Homotopie, denn die Schleifen  $(\gamma_0\gamma_1)\gamma_2$  und  $\gamma_0(\gamma_1\gamma_2)$  sind bis auf Umparametrisierung gleich, und diese Umkehrung lässt sich durch eine Homotopie realisieren.
- (3) Das neutrale Element ist die konstante Kurve  $[0, 1] \rightarrow \{p\} \subset M$ , und das Inverse zu  $[\gamma]$  ist die Homotopieklasse der rückwärts durchlaufenen Kurve  $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1 - t)$ .

1.126. BEISPIEL. Betrachte den Einheitskreis  $S^1 \subset \mathbb{C}$ . Es gibt einen Gruppenhomomorphismus  $\mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(S^1, 1)$  mit

$$n \mapsto \gamma_n \quad \text{mit} \quad \gamma_n(t) = e^{2\pi i n t} \in S^1$$

für alle  $t \in [0, 1]$ . Somit ist  $\gamma_n$  eine Kurve, die den Kreis  $n$ -mal in positiver Richtung durchläuft. Man überzeugt sich leicht, dass es sich tatsächlich um einen Gruppenhomomorphismus handelt. Nicht ganz so einzusehen ist, dass es sogar ein Isomorphismus ist, es gilt also

$$\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}.$$

1.127. BEISPIEL. Es sei  $n \geq 2$ , dann gilt  $\pi_1(S^n, p) \cong \{e\}$ . Sei etwa  $p$  der Nordpol. Falls  $\gamma$  eine Schleife am Punkt  $p$  ist, die den Südpol  $-p$  nicht passiert, können wir die Schleife mittels stereographischer Projektion in den  $\mathbb{R}^n$  überführen und dort auf den Nullpunkt zusammenziehen, der ja dem Nordpol entspricht. Ein kleines topologisches Argument zeigt, dass jede Schleife am Punkt  $p$  homotop zu einer Schleife ist, die den Südpol nicht trifft.

1.128. BEMERKUNG. Sei  $F: M \rightarrow N$  eine stetige Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten, und seien  $p \in M, q \in N$  gegeben mit  $q = F(p)$ . Sei  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$  eine Schleife in  $M$  am Punkt  $p$ , dann ist  $F \circ \gamma$  eine Schleife in  $N$  am Punkt  $q$ . Sei  $h: [0, 1]^2 \rightarrow M$  Homotopie zwischen  $\gamma$  und  $\gamma'$ , dann ist  $F \circ h$  eine Homotopie zwischen  $F \circ \gamma$  und  $F \circ \gamma'$ . Schließlich gilt  $F \circ (\gamma_0\gamma_1) = (F \circ \gamma_0) \cdot (F \circ \gamma_1)$ . Also existiert ein Gruppenhomomorphismus  $\pi_1 F: \pi_1(M, p) \rightarrow \pi_1(N, q)$  mit

$$[\gamma] \mapsto [F \circ \gamma].$$

Sei  $G \circ L \rightarrow M$  eine weitere Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten, so folgt  $\pi_1(F \circ G) = \pi_1 F \circ \pi_1 G$ . Somit ist  $\pi_1$  ein Funktor von der Kategorie der *punktierten Mannigfaltigkeiten*  $(M, p)$  in die Kategorie der Gruppen. Man kann zeigen: jede endlich präsentierte Gruppe ist Fundamentalgruppe einer kompakten punktierten Mannigfaltigkeit.

Außerdem überlegt man sich leicht, dass  $\pi_1 F$  nur von der Homotopieklasse von  $F$  unter allen Abbildungen von  $M$  nach  $N$  abhängt, die  $p$  auf  $q$  abbilden.

1.129. BEMERKUNG. Sei  $M$  eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit, dann ist  $M$  auch wegzusammenhängend. Seien  $p, q \in M$ , dann existiert also ein Weg  $\rho: [0, 1] \rightarrow M$  mit  $\rho(0) = p$

und  $\rho(1) = q$ . Sei  $\gamma$  eine Schleife an  $q$ , dann ist die Verkettung  $\rho \circ \gamma \circ \rho^{-1}$  von Wegen eine Schleife an  $p$ . Ähnlich wie bei der Konstruktion des Inversen in  $\pi_1(M, p)$  überlegt man sich, dass

$$(\rho\gamma_0\rho^{-1}) \cdot (\rho\gamma_1\rho^{-1}) = \rho \cdot (\gamma_0\gamma_1) \cdot \rho^{-1}$$

gilt, somit erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus  $\pi_1(M, p) \rightarrow \pi_1(M, q)$ , der allerdings von der Homotopieklasse des Weges  $\rho$  abhängt. Den inversen Homomorphismus liefert der umgekehrte Weg  $\rho^{-1}$ . Wenn uns also die Fundamentalgruppe einer Mannigfaltigkeit  $M$  nur bis auf Isomorphie interessiert, dürfen wir  $\pi_1(M)$  schreiben — immer vorausgesetzt, dass  $M$  zusammenhängend ist. Allerdings können wir jetzt nicht mehr über Elemente von  $\pi_1(M)$  sprechen.

1.130. DEFINITION. Eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit  $M$  heißt *einfach zusammenhängend*, wenn  $\pi_1(M) \cong \{e\}$ .

Sei  $M$  eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Eine Überlagerung  $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$  heißt *universell*, wenn  $\tilde{M}$  zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist. Wenn  $M$  und  $\tilde{M}$  außerdem noch Riemannsche Metriken tragen und  $\pi$  Riemannsch ist, heißt  $\pi$  *universelle Riemannsche Überlagerung*.

Wegen Bemerkung 1.129 ist diese Definition sinnvoll. Woher der Begriff „universelle Überlagerung“ kommt, wird im folgenden Satz klar.

1.131. SATZ. Sei  $M$  eine zusammenhängende (differenzierbare) Mannigfaltigkeit, sei  $p \in M$ , und sei  $\Gamma = \pi_1(M, p)$  die Fundamentalgruppe.

- (1) Dann besitzt  $M$  eine universelle Überlagerung  $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ . Die Gruppe  $\Gamma$  operiert frei und eigentlich diskontinuierlich auf  $\tilde{M}$ , und es existiert genau ein Homöomorphismus (Diffeomorphismus)  $\tilde{M}/\Gamma \rightarrow M$ , so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} & \xlongequal{\quad} & \tilde{M} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\sim} & \tilde{M}/\Gamma \end{array}$$

kommutiert. Im folgenden sei  $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$  fest gewählt.

- (2) Sei  $F: M_1 \rightarrow M$  eine weitere Überlagerung mit zusammenhängendem Totalraum  $M_1$ , sei  $p_1 \in F^{-1}(p)$ , und sei  $\Gamma_1 = \pi_1 F(\pi_1(M_1, p_1))$ . Dann existiert genau eine Überlagerung  $\bar{F}: \tilde{M} \rightarrow M_1$  mit  $\pi = F \circ \bar{F}$  und  $\bar{F}(\tilde{p}) = p_1$  und genau ein Homöomorphismus (Diffeomorphismus)  $\tilde{M}/\Gamma_1 \rightarrow M_1$ , so dass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{M} & \xlongequal{\quad} & \tilde{M} & & \\ \downarrow & & \downarrow \bar{F} & & \\ \tilde{M}/\Gamma_1 & \xrightarrow{\sim} & M_1 & \xrightarrow{F} & M. \end{array}$$

- (3) Es existieren Überlagerungen  $F_1: \tilde{M}/\Gamma_1 \rightarrow M$  und  $\bar{F}_1: \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}/\Gamma_1$  mit  $\pi = F_1 \circ \bar{F}_1$  zu jeder Untergruppe  $\Gamma_1 \subset \Gamma$ . Wenn  $\Gamma_1$  Normalteiler von  $\Gamma$  ist, operiert  $\Gamma/\Gamma_1$  auf  $\tilde{M}/\Gamma_1$ , und es existiert ein Homöomorphismus (Diffeomorphismus)  $(\tilde{M}/\Gamma_1)/(\Gamma/\Gamma_1) \rightarrow M$ .

BEWEIS. Wir geben hier nur eine kurze Beweisskizze. Ein ausführlicher Beweis findet sich in (fast) jeder Einführung in die (algebraische) Topologie unter den Stichworten „Fundamentalgruppe“ und „Überlagerungen“. Wir definieren  $\tilde{M}$  als Menge der Äquivalenzklassen  $[\sigma]$  von Kurven  $\sigma: [0, 1] \rightarrow M$  mit  $\sigma(0)$  bis auf Homotopie relativ zu den Endpunkten  $\sigma(0)$  und  $\sigma(1) =: \pi([\sigma])$ .

Sei  $q = \pi([\sigma])$ , und sei  $\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi \cong B_1(0)$  eine Karte um  $q$  mit  $\varphi(q) = 0$ . Dann erhalten wir eine Karte  $\tilde{\varphi}_{[\sigma]}$  um  $[\sigma]$  wie folgt. Zu  $r \in U^\varphi$  betrachten wir den Weg  $\rho(t) = \varphi^{-1}(t \cdot \varphi(r))$  von  $q$

nach  $r$ , und damit einen Punkt  $[\sigma\rho] \in \pi^{-1}(r) \subset \tilde{M}$ . Es sei  $U^{\tilde{\varphi}[\sigma]}$  die Menge aller dieser Punkte, dann definieren wir

$$\tilde{\varphi}_{[\sigma]}: U^{\tilde{\varphi}[\sigma]} \rightarrow V^{\tilde{\varphi}[\sigma]} = V^\varphi \quad \text{durch} \quad \tilde{\varphi}_{[\sigma]}([\sigma\rho]) = (\varphi \circ \pi)([\sigma\rho]) = \varphi(\rho(1)).$$

Man kann eine Topologie auf  $\tilde{M}$  konstruieren, so dass alle wie oben konstruierten Karten einen (differenzierbaren) Atlas auf  $\tilde{M}$  bilden. Ähnlich wie im Beweis von Proposition 1.123 sieht man auch, dass  $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$  eine Überlagerung ist.

Die Mannigfaltigkeit  $\tilde{M}$  ist zusammenhängend, denn jeder Punkt  $[\sigma] \in \tilde{M}$  ist durch die Kurve  $t \mapsto [\sigma|_{[0,t]}$  mit dem Ursprung  $\tilde{p} := [e]$  verbunden, wobei  $e$  die konstante Schleife am Punkt  $p$  bezeichne. Wir betrachten jetzt eine Schleife  $\kappa$  in  $\tilde{M}$  am Punkt  $p$ . Es sei  $\sigma = \pi \circ \kappa$  die entsprechende Schleife in  $M$ . Für alle  $t$  gilt

$$\kappa(t) = [(\pi \circ \kappa)|_{[0,t]}] = [\sigma|_{[0,t]}] \in \tilde{M}.$$

Da  $\kappa$  eine Schleife ist, folgt  $[\sigma] = \kappa(1) = \tilde{p} = [e]$ , mithin existiert lässt sich  $\sigma$  in  $M$  durch eine Homotopie  $h: [0, 1]^2 \rightarrow M$  zusammenziehen mit

$$h(0, s) = h(1, s) = h(t, 0) = p \quad \text{und} \quad h(t, 1) = \sigma(t).$$

Wir erhalten eine Homotopie  $\tilde{h}: [0, 1]^2 \rightarrow \tilde{M}$  mit

$$\tilde{h}(0, s) = \tilde{h}(1, s) = \tilde{h}(t, 0) = \tilde{p} \quad \text{und} \quad \tilde{h}(t, 1) = \kappa(t)$$

durch  $\tilde{h}(t, s) = [h(t, \cdot)]|_{[0,s]}$ . Also ist jede Schleife in  $\tilde{M}$  am Punkt  $\tilde{p}$  zusammenziehbar.

Die Fundamentalgruppe  $\Gamma$  operiert auf  $\tilde{M}$  wie folgt. Sei  $\sigma: [0, 1] \rightarrow M$  ein Weg von  $p$  nach  $q$ , und sei  $\gamma$  Schleife in  $M$  am Punkt  $p$ , dann ist  $\gamma\sigma$  ein weiterer Weg von  $p$  nach  $q$ . Dann hängt  $[\gamma\sigma]$  offensichtlich nur von den Homotopieklassen von  $\gamma$  und  $\sigma$  (jeweils mit festgehaltenem Endpunkt) ab, und wir erhalten eine Operation von  $\Gamma = \pi_1(M, p)$  auf  $\tilde{M}$ . Zwei Wege  $\gamma\sigma$  und  $\gamma'\sigma$  sind genau dann homotop relativ zu ihren Endpunkten, wenn  $\gamma \sim \gamma'$ , mithin ist diese Operation frei. Mit ein bisschen mehr Arbeit sieht man, dass sie auch eigentlich diskontinuierlich ist.

Für alle  $[\gamma] \in \Gamma$  gilt  $\pi \circ [\gamma] = \pi: \tilde{M} \rightarrow M$ . Sei umgekehrt  $\pi([\sigma]) = \pi([\tau])$ , dann existiert eine Schleife  $\gamma = \tau\sigma^{-1}$  am Punkt  $p$ , so dass  $[\gamma]([\sigma]) = [\tau]$ , es folgt  $\pi^{-1}(q) = \Gamma \cdot [\sigma]$ . Also lassen sich die  $\Gamma$ -Orbiten auf  $\tilde{M}$  bijektiv den Punkten in  $M$  zuordnen, und man sieht leicht, dass das den gesuchten Homöomorphismus  $\tilde{M}/\Gamma \rightarrow M$  liefert (bzw. Diffeomorphismus, falls  $M$  differenzierbare Mannigfaltigkeit ist). Damit ist (1) gezeigt.

Zu (2) benutzen wir die sogenannte „eindeutige Liftungseigenschaft“ von Überlagerungen, wonach sich jeder Pfad  $\sigma$  in  $M$  von  $p$  nach  $q$  zu einem Pfad  $\sigma_1$  in  $M_1$  mit Startpunkt  $p_1 \in M_1$  liften lässt, d.h., es gilt  $\sigma = F \circ \sigma_1$ . Die eindeutige Liftungseigenschaft impliziert auch, dass homotope Pfade homotope Lifts haben, mithin ist die Abbildung  $\bar{F}: \tilde{M} \rightarrow M$  mit  $\bar{F}([\sigma]) = \sigma_1(1) \in F^{-1}(q) \subset M_1$  wohldefiniert. Für eine Schleife  $\gamma$  in  $M$  am Punkt  $p$  haben die Lifts von  $\sigma$  und  $\gamma\sigma$  nach  $M_1$  genau dann denselben Endpunkt, wenn  $\gamma$  zu einer Schleife  $\gamma_1$  in  $M_1$  liftet, aber genau dann gilt  $[\gamma] = \pi_1 F([\gamma_1]) \in \pi_1 F(\pi_1(M_1, p_1))$ . Somit erhalten wir auch den gesuchten Homöomorphismus (Diffeomorphismus)  $\tilde{M}/\Gamma_1 \cong M_1$ , und (2) ist bewiesen.

Die Existenz von  $\bar{F}_1: \tilde{M}_1 \rightarrow \tilde{M}/\Gamma_1$  folgt aus Proposition 1.123, und da jeder  $\Gamma_1$ -Orbit in einem  $\Gamma$ -Orbit enthalten ist, existiert auch die Abbildung  $F_1: \tilde{M}/\Gamma_1 \rightarrow M$ , und wieder kann man sich überzeugen, dass es sich um eine Überlagerung handelt. Wenn  $\Gamma_1$  ein Normalteiler von  $\Gamma$  ist, dann bildet jedes  $\gamma \in \Gamma$  jeden  $\Gamma_1$ -Orbit wieder auf einen  $\Gamma_1$ -Orbit ab, wir erhalten die gesuchte  $\Gamma/\Gamma_1$ -Operation auf  $\tilde{M}/\Gamma_1$ , und es gilt  $(\tilde{M}/\Gamma_1)/(\Gamma/\Gamma_1) \cong \tilde{M}/\Gamma \cong M$  wie beim entsprechenden Isomorphiesatz in der Algebra.  $\square$

1.132. BEMERKUNG. Aus (2) in Satz 1.131 folgt mit den üblichen universellen Argumenten, dass die universelle Überlagerung  $\pi: (\tilde{M}, \tilde{p}) \rightarrow (M, p)$  bis auf eindeutige Homöomorphismen (bzw.



Diffeomorphismen) eindeutig bestimmt ist. Wir dürfen also in Zukunft von „der“ universellen Überlagerung von  $M$  reden.

Die Aussagen in (2) und (3) lassen sich wie folgt zusammenfassen: Die Kategorie der Untergruppen von  $\pi_1(M, p)$  (mit den Inklusionen als Morphismen) ist äquivalent zur Kategorie der zusammenhängenden, punktierten Überlagerungen von  $(M, p)$ , deren Morphismen durch kommutative Diagramme von Überlagerungen

$$\begin{array}{ccc} (M_1, p_1) & \longrightarrow & (M_2, p_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (M, p) & \longlongequal{\quad} & (M, p) \end{array}$$

gegeben werden. Die Bestimmung aller zusammenhängenden Überlagerungen von  $M$  ist jetzt zu einem rein algebraischen Problem geworden.

Zum Abschluss geben wir eine Beschreibung der zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten mit konstanter Schnittkrümmung  $\kappa \in \mathbb{R}$  an. Man beachte, dass die Schnittkrümmung für Riemannsche Mannigfaltigkeiten der Dimension  $\leq 1$  eine Funktion auf der leeren Menge ist.

1.133. DEFINITION. Es sei  $\kappa \in \mathbb{R}$  und  $n \geq 2$ , dann definieren wir den *Modellraum*  $(M_\kappa^n, g^\kappa)$  wie folgt.

- (1) Falls  $\kappa = 0$ , sei  $(M_\kappa^n, g^\kappa) = (\mathbb{R}^n, g^{\text{eukl}})$ .
- (2) Falls  $\kappa > 0$ , sei  $(M_\kappa^n, g^\kappa) = (S_{\kappa^{-\frac{1}{2}}}^n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  die Sphäre vom Radius  $\frac{1}{\sqrt{\kappa}}$  mit der vom umgebenden Raum induzierten Metrik.
- (3) Falls  $\kappa < 0$ , sei  $(M_\kappa^n, g^\kappa) = (B_{(-\kappa)^{-\frac{1}{2}}}(0), g^\kappa) \subset \mathbb{R}^n$  mit

$$g_x^\kappa(v, w) = \frac{4}{(1 + \kappa |x|^2)^2} \langle v, w \rangle .$$

1.134. PROPOSITION. Die Modellräume  $(M_\kappa^n, g^\kappa)$  sind zusammenhängende, einfach zusammenhängende, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit konstanter Schnittkrümmung  $\kappa$ . Sie sind genau dann kompakt, wenn  $\kappa > 0$  gilt. Durchmesser, konjugierter Radius und Injektivitätsradius sind gleich

$$\text{diam}(M_\kappa^n) = \rho(M_\kappa^n) = \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} & \text{falls } \kappa > 0, \text{ und} \\ \infty & \text{falls } \kappa \leq 0. \end{cases}$$

BEWEIS. Für  $\kappa \in \{0, 1, -1\}$  erhalten wir wohlbekannte Räume: den euklidischen Raum, die Sphäre und den hyperbolischen Raum, jeweils mit der Standardmetrik. Wir wissen aus den Beispielen 1.98, 1.100, 1.110, 1.105 und 1.127 bereits, dass diese Räume zusammenhängend, einfach zusammenhängend und vollständig sind und den angegebenen Durchmesser und Injektivitätsradius haben. Außerdem ist nach Beispiel 1.102 die Sphäre kompakt, die anderen beiden Räume jedoch nicht. Damit haben wir insbesondere den Fall  $\kappa = 0$  bereits bewiesen.

Wir betrachten  $\kappa > 0$ . Mittels einer Streckung am Ursprung in  $\mathbb{R}^{n+1}$  mit Streckfaktor  $\kappa^{-\frac{1}{2}}$  erhalten wir einen Diffeomorphismus  $F: S^n \rightarrow S_{\kappa^{-\frac{1}{2}}}^n$ . Wir können die Metrik  $g^\kappa$  auf die Standardsphäre  $S^n$  zurückholen und erhalten

$$\begin{aligned} (F^* g^\kappa)_x(v, w) &= g_{F(x)}^\kappa(d_x F(v), d_x F(w)) = g_{\kappa^{-\frac{1}{2}}x}^\kappa\left(\kappa^{-\frac{1}{2}}x, \kappa^{-\frac{1}{2}}y\right) \\ &= \left\langle \kappa^{-\frac{1}{2}}x, \kappa^{-\frac{1}{2}}y \right\rangle = \frac{\langle x, y \rangle}{\kappa} = \frac{1}{\kappa} g_x^{\text{sph}}(v, w) . \end{aligned}$$

Anhand der Koszul-Formel aus Satz 1.42 ist leicht zu sehen, dass  $F^*g^\kappa$  und  $g^{\text{sph}}$  denselben Levi-Civita-Zusammenhang  $\nabla$  haben. In Koordinaten gilt nämlich

$${}^\kappa\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n {}^\kappa g^{kl} \left( \frac{\partial g_{jl}^\kappa}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}^\kappa}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}^\kappa}{\partial x^l} \right) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n ({}^\kappa g^{\text{sph}} g^{kl}) \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\partial g_{jl}^{\text{sph}}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}^{\text{sph}}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}^{\text{sph}}}{\partial x^l} \right) = {}^{\text{sph}}\Gamma_{ij}^k.$$

Damit haben beide Metriken auch denselben Krümmungstensor  $R$ . Falls  $v, w \in T_x S^n$  linear unabhängig sind, betrachte  $E = \text{span}(v, w) \subset T_x M$ . Wir erhalten

$$(F^*K^\kappa)(E) = \frac{g^\kappa(R_{v,w}w, v)}{g^\kappa(v, v)g^\kappa(w, w) - g^\kappa(v, w)^2} = \kappa \frac{g^{\text{sph}}(R_{v,w}w, v)}{g^\kappa(v, v)g^\kappa(w, w) - g^\kappa(v, w)^2} = \kappa.$$

Da  $g^\kappa$  und  $g^{\text{sph}}$  denselben Levi-Civita-Zusammenhang  $\nabla$  haben, haben sie auch dieselbe Exponentialabbildung. Nach dem Satz 1.96 von Hopf-Rinow ist  $S^n$  also mit der Metrik  $F^*g^\kappa$  ebenfalls vollständig. Beachte aber: wenn  $c$  eine bezüglich  $g^{\text{sph}}$  nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische ist, dann ist  $t \mapsto c(\sqrt{\kappa}t)$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische bezüglich  $F^*g^\kappa$ .

Da  $F: (S^n, F^*g^\kappa) \rightarrow (S_{\kappa^{-\frac{1}{2}}}^n, g^\kappa)$  eine Isometrie ist, ist auch  $(M_\kappa^n, g^\kappa)$  eine zusammenhängende, einfach zusammenhängende, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung  $\kappa$ . Der Fall  $\kappa > 0$  ist damit erledigt.

Im Fall  $\kappa < 0$  verfahren wir analog. Wir betrachten die zentrische Streckung  $F: B_1(0) \rightarrow B_{(-\kappa)^{-\frac{1}{2}}}$  mit Streckfaktor  $(-\kappa)^{-\frac{1}{2}}$ . Für die zurückgeholte Metrik erhalten wir

$$\begin{aligned} (F^*g^\kappa)_x(v, w) &= g_{(-\kappa)^{-\frac{1}{2}}x}^\kappa \left( (-\kappa)^{-\frac{1}{2}}v, (-\kappa)^{-\frac{1}{2}}w \right) \\ &= \frac{4}{(1 + \kappa |(-\kappa)^{-\frac{1}{2}}x|^2)^2} \left\langle (-\kappa)^{-\frac{1}{2}}v, (-\kappa)^{-\frac{1}{2}}w \right\rangle = -\frac{1}{\kappa} \frac{4}{(1 - |x|^2)^2} \langle v, w \rangle = -\frac{1}{\kappa} g_x^{\text{hyp}}(v, w). \end{aligned}$$

Wie oben folgt, dass  $(B_1(0), F^*g^\kappa)$  eine zusammenhängende, einfach zusammenhängende, vollständige, nicht kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung  $\kappa$  ist, und obendrein isometrisch zu  $(M_\kappa^n, g^\kappa)$ .  $\square$

1.135. BEMERKUNG. Wenn wir die Metrik auf den Modellräumen für  $\kappa > 0$  in der stereographischen Projektion  $\varphi_\pm: M_\kappa^n \setminus \{\pm\kappa^{-\frac{1}{2}}e_{n+1}\}$  berechnen, erhalten wir ähnlich wie in Beispiel 1.36 die Metrik

$$g_x^{\kappa, \varphi^\pm}(v, w) = \frac{4}{(1 + \kappa |x|^2)^2} \langle v, w \rangle.$$

Für  $\kappa = 0$  liefert diese Formel eine reskalierte Euklidische Metrik. Wir sehen also, dass in geeigneten Karten die Metriken der Modellräume für alle  $\kappa$  durch die gleiche Formel dargestellt werden.

1.136. BEMERKUNG. Auf einer Mannigfaltigkeit konstanter Schnittkrümmung  $\kappa$  hat die Jacobi-Gleichung eine besonders einfache Gestalt. Dazu bestimmen wir zunächst einmal einen Teil des Krümmungstensors  $R$ . Für einen Einheitsvektoren  $v$ , und  $x \perp v$  folgt

$$\langle R_{x,v}v, x \rangle = \kappa(\|v\|^2 \|x\|^2 - \langle v, x \rangle^2) = \kappa \|x\|^2.$$

Seien jetzt  $x, y \perp v$ , dann gilt

$$\langle R_{x,v}v, y \rangle = \frac{1}{4} (\langle R_{x+y,v}v, x+y \rangle - \langle R_{x-y,v}v, x-y \rangle) = \frac{\kappa}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = \kappa \langle x, y \rangle.$$

Schließlich gilt noch  $\langle R_{x,v}v, v \rangle = 0$ , und daraus folgt endlich

$$R_{x,v}v = \kappa x.$$

Allgemeiner kann beweisen, dass

$$R_{x,y}z = \kappa (\langle y, z \rangle x - \langle x, z \rangle y) .$$

Sei jetzt  $X$  ein Jacobifeld längs einer nach Bogenlänge parametrisierten Geodätischen  $c$  mit  $X \perp \dot{c}$  und  $\ddot{X} \perp \dot{c}$ , dann folgt aus obigem, dass

$$0 = \ddot{X} + R_{X,\dot{c}}\dot{c} = \ddot{X} + \kappa X .$$

Für  $w \perp \dot{c}$  wollen wir jetzt die Jacobifelder  $X, Y$  längs  $c$  mit

$$X(0) = \dot{Y}(0) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{X}(0) = Y(0) = w$$

bestimmen. Dazu sei  $W$  ein paralleles Vektorfeld längs  $c$  mit  $W(0) = w$  gegeben, dann gilt

$$X(t) = s_\kappa(t) W(t) \quad \text{und} \quad Y(t) = c_\kappa(t) W(t) ,$$

wobei die „verallgemeinerten Sinus- und Cosinus-Funktionen“ definiert sind als

$$s_\kappa(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\sqrt{\kappa} t)}{\sqrt{\kappa}} & \text{für } \kappa > 0, \\ t & \text{für } \kappa = 0 \text{ und} \\ \frac{\sinh(\sqrt{-\kappa} t)}{\sqrt{-\kappa}} & \text{für } \kappa < 0, \text{ sowie} \end{cases}$$

$$c_\kappa(t) = \dot{s}_\kappa(t) = \begin{cases} \cos(\sqrt{\kappa} t) & \text{für } \kappa > 0, \\ 1 & \text{für } \kappa = 0 \text{ und} \\ \cosh(\sqrt{-\kappa} t) & \text{für } \kappa < 0. \end{cases}$$

Diese Funktionen erfüllen die Differentialgleichung

$$\ddot{f} + \kappa f = 0 \quad \text{mit} \quad c_\kappa(0) = \dot{s}_\kappa(0) = 1 \quad \text{und} \quad \dot{c}_\kappa(0) = s_\kappa(0) = 0 .$$

Wir können jetzt ein Beispiel für Satz 1.131 geben.

1.137. SATZ. Sei  $M$  eine vollständige, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$  mit konstanter Schnittkrümmung  $\kappa$ . Dann ist die universelle Riemannsche Überlagerung von  $M$  isometrisch zu  $M_\kappa^n$ .

BEWEIS. Wir betrachten zunächst den Fall  $\kappa \leq 0$  und fixieren  $o \in M_\kappa^n$  und  $p \in M$ . Da  $\rho(M_\kappa^n) = \infty$ , ist  $\exp_o: T_o M_\kappa^n \rightarrow M_\kappa^n$  ein Diffeomorphismus nach Folgerung 1.115. Wir wählen eine lineare Isometrie  $\Phi: (T_o M_\kappa^n, g_o^\kappa) \rightarrow (T_p M, g_p)$  und konstruieren eine Abbildung  $\pi: M_\kappa^n \rightarrow M$  durch das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_o M_\kappa^n & \xrightarrow[\sim]{\Phi} & T_p M \\ \exp_o \downarrow & & \downarrow \exp_p \\ M_\kappa^n & \xrightarrow{\pi} & M \end{array} .$$

Die zurückgezogenen Metriken  $\exp_o^* g^\kappa$  und  $\exp_p^* g$  auf  $T_o M_\kappa^n$  bzw.  $T_p M$  haben die folgenden Eigenschaften.

- (1) Am Nullpunkt gilt  $(\exp_o^* g^\kappa)_{0_o} = g_o^\kappa$  bzw.  $(\exp_p^* g)_{0_p} = g_p$ .
- (2) Sei  $v$  Einheitsvektor bezüglich  $g_o^\kappa$  bzw.  $g_p$ , dann ist  $c_v(t) = tv$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische bezüglich  $\exp_o^* g^\kappa$  bzw.  $\exp_p^* g$ .
- (3) Vektorfelder der Form  $X(t) = tv$  längs  $c_v$  sind Jacobifelder.

Aus diesen Eigenschaften lassen sich diese Metriken bereits vollständig rekonstruieren.

Seien etwa  $v, w \in S_p M$ , sei  $c_v(t) = tv$  die radiale Geodätische mit Startvektor  $v$ , und sei  $W$  das parallele Vektorfeld längs  $c$  mit  $W(0) = w$ . Dann wird das Jacobifeld  $X$  längs  $c_v$  mit  $X(0) = 0$  und  $\dot{X}(0) = w$  nach Bemerkung 1.136 gegeben durch

$$tw = X(t) = s_\kappa(t) W(t),$$

es folgt

$$(\exp_p^* g)_{tv}(tw, tw) = s_\kappa(t)^2 \langle W(t), W(t) \rangle = s_\kappa(t)^2 \langle w, w \rangle,$$

und allgemeiner für  $x, y \perp v$ , dass

$$(\exp_p^* g)_{tv}(x, y) = \frac{s_\kappa(t)^2}{t^2} \langle x, y \rangle.$$

Ferner gilt noch

$$(\exp_p^* g)_{tv}(v, v) = 1 \quad \text{und} \quad (\exp_p^* g)_{tv}(v, x) = 0,$$

wodurch die Metrik  $\exp_p^* g$  auf  $T_p M$  bestimmt ist. Die entsprechenden Formeln gelten für  $\exp_o^* g^\kappa$ , und wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (T_o M_\kappa^n, \exp_o^* g^\kappa) & \xrightarrow[\sim]{\Phi} & (T_p M, \exp_p^* g) \\ \exp_o \downarrow & & \downarrow \exp_p \\ (M_\kappa^n, g^\kappa) & \xrightarrow{\pi} & (M, g) \end{array}.$$

lokaler Isometrien, wobei  $\exp_o$  und  $\Phi$  sogar globale Isometrien sind.

Es bleibt zu zeigen, dass  $\pi$  eine Überlagerung ist. Sei also  $q \in M$  beliebig, dann wählen wir  $U = B_r(q)$  für ein  $r \in (0, \rho(q))$ . Es ist jetzt leicht zu sehen, dass

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{\tilde{q} \in \pi^{-1}\{q\}} B_r(\tilde{q}) \cong \pi^{-1}\{q\} \times B_r(q)$$

gilt, wobei der Isomorphismus passend zu Definition 1.116 gewählt werden kann.

Aus ähnlichen Argumenten wie oben (aber um  $\tilde{q} \in \pi^{-1}(q)$ ) folgt sofort

$$\pi^{-1}(U) \supset \bigcup_{\tilde{q} \in \pi^{-1}\{q\}} B_r(\tilde{q}).$$

Zu „ $\subset$ “ sei  $s \in U$  und  $\tilde{s} \in \pi^{-1}(U)$ . Dann existiert  $w \in T_s M$  mit  $\|w\| < r$  und  $\exp_s w = q$ . Sei  $\tilde{w} = (d_{\tilde{s}}\pi)^{-1}(w)$ , und setze  $\tilde{q} = \exp_{\tilde{s}} \tilde{w} \in M_\kappa^n$ , dann folgt  $\tilde{q} \in \pi^{-1}(q)$ , mithin  $s \in \bigcup_{\tilde{q} \in \pi^{-1}\{q\}} B_r(\tilde{q})$ .

Wäre schließlich die obige Vereinigung nicht disjunkt, dann würde ein Punkt  $\tilde{s}$  im Durchschnitt zweier solcher Bälle um  $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2 \in \pi^{-1}(q)$  auf einen Punkt in  $M$  abgebildet, der durch zwei Geodätische der Länge  $< r$  mit  $q$  verbunden werden könnte, im Widerspruch dazu, dass  $r \leq \rho(q)$ . Damit ist der Fall  $\kappa \leq 0$  erledigt.

Im Fall  $\kappa > 0$  verfahren wir ähnlich, betrachten jedoch jetzt das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \left( B_{\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}}(0_o), \exp_o^* g^\kappa \right) & \xrightarrow[\sim]{\Phi} & \left( B_{\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}}(0_p), \exp_p^* g \right) \\ \exp_o \downarrow & & \downarrow \exp_p \\ M_\kappa^n & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

lokaler Isometrien, dabei ist der Radius  $\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$  gerade der konjugierte Radius von  $M_\kappa^n$  und von  $M$ .

Für alle  $v \in S_p M$  und alle  $w \perp v$  folgt aus der Formel für die Jacobifelder  $tw$  in Bemerkung 1.136 wegen

$$s_\kappa\left(\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sin(\pi) = 0,$$

dass

$$\left(d \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} v \exp_p\right)(w) = 0, \quad \text{also} \quad (d \exp_p)\left(TS_{\pi\kappa^{-\frac{1}{2}}}^{n-1}\right) = \{0\}.$$

Somit bilden die obigen Exponentialabbildungen jeweils  $\partial B_{\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}}(0)$  auf einen zu  $o$  bzw.  $p$  konjugierten Punkt ab. Etwa gilt

$$\exp_o\left(S_{\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}}^{n-1}\right) = \{-o\} \subset M_\kappa^n \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Insbesondere lässt sich  $\pi$  so auf ganz  $M_\kappa^n$  definieren. Um zu zeigen, dass  $\pi$  auch am Punkt  $-o$  glatt ist, können wir zum Beispiel Normalkoordinaten um  $-o$  und  $\pi(-o)$  wählen und mit den obigen Abbildungen vergleichen. Dass  $\pi$  eine Überlagerung ist, folgt jetzt mit dem gleichen Argument wie vorher.  $\square$

1.138. BEISPIEL. Der reell projektive Raum  $\mathbb{R}P^n$  ist Quotient der  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  nach  $\Gamma = \{1, -1\} \in O(n+1)$ . Falls  $n$  gerade ist, ist das der einzige Quotient der  $S^n$  nach einer freien, eigentlich diskontinuierlichen, isometrischen Gruppenoperation.

Falls  $n = 2m - 1$  ungerade ist, betrachte  $S^{2m-1} \subset \text{mathcal{C}}^m$ . Sei  $p$  eine natürliche Zahl, und seien  $q_1, \dots, q_m \in \{1, \dots, p-1\}$  teilerfremd zu  $p$ . Dann operiert die Gruppe

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong \Gamma = \left\{ \left( \begin{array}{ccc} e^{2\pi i \frac{q_1 k}{p}} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{2\pi i \frac{q_m k}{p}} \end{array} \right) \middle| k \in \mathbb{Z} \right\} \subset U(m)$$

frei und eigentlich diskontinuierlich auf  $S^{2m-1}$ . Der Quotient  $L_{p; q_1, \dots, q_m} = S^{2m-1}/\Gamma$  heißt *Linsenraum*. Beispielsweise gilt  $\mathbb{R}P^{2m-1} = L_{2; 1, \dots, 1}$ . Darüberhinaus gibt es aber noch weitere Quotienten.

Den Torus als Beispiel einer flachen Mannigfaltigkeit haben wir bereits in Beispiel 1.122 kennengelernt.

1.139. BEISPIEL. Es gibt viele kompakte Flächen mit Schnittkrümmung  $\kappa = -1$ . Zur Konstruktion: zu je drei Zahlen  $a, c, e \in (0, \infty)$  gibt es genau ein rechtwinkliges Sechseck in der hyperbolischen Ebene  $(B_1(0), g^{\text{hyp}})$ . Wir verkleben zwei spiegelbildliche Sechsecke entlang der Seiten  $b, d$  und  $f$  und erhalten eine hyperbolische „Hose“, deren Rand aus drei Kreisen der Längen  $2a, 2c$  und  $2e$  besteht.

Anschließend können wir  $2k$  solcher Hosen mit passenden Maßen zu einer hyperbolischen Fläche mit Eulerzahl  $2k$ , das heißt, vom Geschlecht  $g = k + 1 \geq 2$  verkleben. Die Maße der Hose und die Drehwinkel beim Verkleben geben  $6k$  unabhängige Parameter. Somit gibt es einen (mindestens)  $6(g-1)$ -dimensionalen Raum kompakter hyperbolischer Flächen vom Geschlecht  $g$ . Man kann umgekehrt zeigen, dass jede Fläche vom Geschlecht  $g \geq 2$  eine solche Zerlegung in „Hosen“ zulässt. Da alle diese Flächen homöomorph sind, haben sie isomorphe Fundamentalgruppen. Somit enthält die Isometriegruppe  $SO^0(2, 1) \cong PSU(1, 1)$  eine  $6(g-1)$ -Parameter-Familie isomorpher Untergruppen, die alle frei und eigentlich diskontinuierlich auf  $B_1(0)$  operieren.



## Vergleichssätze in der Riemannschen Geometrie

In diesem Kapitel werden wir sehen, wie die Krümmung einer Mannigfaltigkeit ihre geometrische und topologische Gestalt bestimmt.

### 2.1. Der Vergleichssatz von Rauch und einige Folgerungen

Als erstes untersuchen wir, wie das Wachstum von Jacobi-Feldern von oberen oder unteren Schranken an die Schnittkrümmung abhängt. Außerdem sehen wir, dass Mannigfaltigkeiten nicht-positiver Schnittkrümmung universelle Überlagerungen haben, die diffeomorph zum  $\mathbb{R}^n$  sind.

Ein wichtiges Hilfsmittel ist dabei die Indexform, die Bilinearisierung der rechten Seite der zweiten Variationsformel aus Satz 1.87.

2.1. DEFINITION. Sei  $(M, g)$  Riemannsche Mannigfaltigkeit, und sei  $c: [0, L] \rightarrow M$  nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische. Wir definieren Vektorräume

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}'(c) &= \{ V \in \mathfrak{X}(c) \mid \langle V(t), \dot{c}(t) \rangle = 0 \text{ für alle } t \in [0, L] \} \\ \text{und } \mathfrak{X}''(c) &= \{ V \in \mathfrak{X}'(c) \mid V(0) = V(L) = 0 \} \end{aligned}$$

Die Indexform  $I_c: \mathfrak{X}'(c) \times \mathfrak{X}'(c) \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert durch

$$I_c(V, W) = \int_0^L (\langle \dot{V}(t), \dot{W}(t) \rangle - \langle R_{V(t), \dot{c}(t)} \dot{c}(t), W(t) \rangle) dt .$$

2.2. BEMERKUNG. Aufgrund der Symmetrien des Krümmungstensors aus Satz 1.52 ist die Indexform eine symmetrische Bilinearform.

Die Indexform charakterisiert Jacobi-Felder.

2.3. LEMMA. Ein Vektorfeld  $V \in \mathfrak{X}'(c)$  längs  $c$  ist genau dann Jacobifeld, wenn es im Kern der Indexform  $I_c|_{\mathfrak{X}'(c), \mathfrak{X}''(c)}$  liegt.

BEWEIS. Für  $V \in \mathfrak{X}'(c)$  und  $W \in \mathfrak{X}''(c)$  schreibe

$$\begin{aligned} I_c(V, W) &= \int_0^L (\langle \dot{V}(t), \dot{W}(t) \rangle - \langle R_{V(t), \dot{c}(t)} \dot{c}(t), W(t) \rangle) dt \\ &= \underbrace{\langle \dot{V}(t), W(t) \rangle|_{t=0}^L}_{=0} - \int_0^L \langle \ddot{V} + R_{V(t), \dot{c}(t)} \dot{c}(t), W(t) \rangle dt . \end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort die Behauptung. □

Eine einfache Folgerung aus der zweiten Variationsformel gibt Auskunft über das Vorzeichen der Indexform.

2.4. PROPOSITION. Sei  $c: [0, L]$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $M$ . Es ist genau dann kein Punkt  $c(t)$  mit  $t \in [0, L]$  längs  $c$  zu  $c(0)$  konjugiert, wenn die Indexform positiv definit auf dem Raum  $\mathfrak{X}''(c)$  ist.

BEWEIS. Um die Richtung “ $\Leftarrow$ “ zu zeigen, nehmen wir an, dass  $c(t)$  längs  $c$  zu  $c(0)$  konjugiert ist für ein  $t \in (0, L]$ . Falls  $t = L$ , so sei  $V \in \chi(c) \setminus \{0\}$  das zugehörige Jacobifeld, dann folgt  $I_c(V, V) = 0$  nach Lemma 2.3. Falls  $t < L$ , so betrachte das Variationsfeld  $V \in \chi''(c)$  aus dem Beweis von Proposition 1.111. Aus der dortigen Rechnung folgt  $I_c(V, V) < 0$ . In beiden Fällen ist also  $I_c$  nicht positiv definit.

Falls umgekehrt  $c$  keine konjugierten Punkte hat, setze  $p = c(0)$  und  $v = \dot{c}(0)$ . Nach Annahme ist  $d_{tv} \exp_p: T_p M \cong T_{tv} T_p M \rightarrow T_{c(t)} M$  invertierbar, also existiert zu jedem Vektorfeld  $V \in \mathfrak{X}''(c)$  ein Vektorfeld  $W$  längs der Geraden von  $0_p$  nach  $L_v$  in  $T_p M$  mit  $V(t) = (d_{tv} \exp_p)(W(t))$ . Betrachte die Variation

$$c_s(t) = \exp_p(tv + sW(t))$$

mit Variationsvektorfeld

$$\frac{\partial c_s(t)}{\partial s} = (d_{tv} \exp_p)(W(t)) = V(t).$$

Wie im Beweis des Gauß-Lemmas 1.90 folgt  $L(c_s) \geq L(c)$ , mithin wegen Satz 1.87 auch

$$I_c(V, V) = \frac{\partial^2 L(c_s)}{\partial s^2} \geq 0,$$

also ist  $I_c$  positiv semidefinit auf dem Raum  $\mathfrak{X}''(c)$ .

Sei nun  $V \in \mathfrak{X}''(c)$  ein Vektorfeld mit  $I_c(V, V) = 0$ . Für jedes  $W \in \mathfrak{X}''(c)$  folgt dann

$$0 \leq I_c(V + \varepsilon W, V + \varepsilon W) = 2\varepsilon I_c(V, W) + \varepsilon^2 I_c(W, W)$$

für alle  $\varepsilon \neq 0$ , also  $I_c(V, W) = 0$ . Nach Lemma 2.3 ist  $V$  ein Jacobifeld mit  $V(0) = V(L) = 0$ , aber  $c(L)$  ist nach Annahme nicht konjugiert zu  $c(0)$ , es folgt  $V = 0$ , und  $I_c$  ist damit auf  $\mathfrak{X}''(c)$  positiv definit.  $\square$

2.5. SATZ (Rauch). *Seien  $(M, g)$  und  $(\bar{M}, \bar{g})$  Riemannsche Mannigfaltigkeiten der Dimension  $n$ , seien  $c$  und  $\bar{c}$  nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische in  $M$  bzw.  $\bar{M}$ , und sei  $L > 0$  so gewählt, dass kein Punkt  $\bar{c}(t)$  mit  $t \in (0, L)$  längs  $\bar{c}$  zu  $\bar{c}(0)$  konjugiert ist. Wenn für alle  $t \in [0, L]$  gilt, dass  $K(E) \leq K(\bar{E})$  für alle Ebenen  $E \subset T_{c(t)} M$  mit  $\dot{c}(t) \in E$  und alle Ebenen  $\bar{E} \subset T_{\bar{c}(t)} \bar{M}$  mit  $\dot{\bar{c}}(t) \in \bar{E}$ , dann gilt*

$$\|V(t)\| \geq \|\bar{V}(t)\| \quad \text{für alle } t \in [0, L]$$

für alle Jacobifelder  $V$  längs  $c$  und  $\bar{V}$  längs  $\bar{c}$  mit  $V(0) = \bar{V}(0) = 0$ ,  $\langle \dot{V}(0), \dot{c}(0) \rangle = \langle \dot{\bar{V}}(0), \dot{\bar{c}}(0) \rangle = 0$  und  $\|\dot{V}(0)\| = \|\dot{\bar{V}}(0)\|$ .

Kürzer gesagt: wenn  $M$  kleinere Schnittkrümmung als  $\bar{M}$  hat, wachsen vergleichbare Jacobifelder mit Startwert 0 in  $M$  schneller als in  $\bar{M}$ , bis zum ersten konjugierten Punkt in  $\bar{M}$ . In Anwendungen wird in der Regel eine der beiden Mannigfaltigkeiten konstante Schnittkrümmung haben.

BEWEIS. Wir beweisen die stärkere Aussage

$$\frac{d}{dt} \log \|V(t)\| \geq \frac{d}{dt} \log \|\bar{V}(t)\|$$

für alle  $t \in (0, L)$ . Es gilt

$$\frac{d}{dt} \log \|V(t)\| = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \log \langle V(t), V(t) \rangle = \frac{\langle \dot{V}(t), \dot{V}(t) \rangle}{\langle V(t), V(t) \rangle}.$$

Die Aussage des Satzes folgt hieraus, denn nach Voraussetzung gilt  $\bar{V}(t) \neq 0$  für alle  $t \in (0, L)$ , wir erhalten also

$$\frac{d}{dt} \frac{\|V(t)\|}{\|\bar{V}(t)\|} = \frac{\|V(t)\|}{\|\bar{V}(t)\|} \left( \frac{d}{dt} \log \|V(t)\| - \frac{d}{dt} \log \|\bar{V}(t)\| \right) \geq 0,$$



und nach L'Hospital gilt wegen  $\|V(0)\| = \|\bar{V}(0)\| = 0$ , dass

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|\bar{V}(t)\|}{\|V(t)\|} = \frac{\|\dot{\bar{V}}(t)\|}{\|\dot{V}(t)\|} = 1.$$

Hieraus folgt  $\|V(t)\| \geq \|\bar{V}(t)\|$  für alle  $t \in (0, L)$  und wegen Stetigkeit dann auch für  $t = L$ . Insbesondere folgt  $V(t) \neq 0$  für alle  $t \in (0, L]$ .

Wir können zum Beweis die Indexform einsetzen, denn da  $V, \bar{V}$  Jacobi-Felder sind mit  $V(0) = \bar{V}(0) = 0$ , gilt

$$\begin{aligned} \langle V(t_0), \dot{V}(t_0) \rangle &= \langle V(t), \dot{V}(t) \rangle \Big|_{t=0}^{t_0} = \int_0^{t_0} (\langle \dot{V}(t), \dot{V}(t) \rangle + \langle \ddot{V}(t), V(t) \rangle) dt \\ &= \int_0^{t_0} (\|\dot{V}(t)\|^2 - \langle R_{V(t), \dot{c}(t)} \dot{c}(t), V(t) \rangle) dt = I_{c|_{[0, t_0]}}(V, V) \quad (*) \end{aligned}$$

für alle  $t_0 \in (0, L)$ , und entsprechend für  $\bar{V}$ .

Wir fixieren jetzt  $t_0 \in (0, L)$  mit  $V(t) \neq 0$  für alle  $t \in [0, t_0]$ . Nach Voraussetzung gilt auch  $\bar{V}(t_0) \neq 0$ . Wir konstruieren parallele Orthonormalrahmen  $e_1, \dots, e_n$  längs  $c$  und  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$  längs  $\bar{c}$  wie in Aufgabe 2 von Blatt 7 mit

$$e_1(t_0) = \frac{V(t_0)}{\|V(t_0)\|} \quad \bar{e}_1(t_0) = \frac{\bar{V}(t_0)}{\|\bar{V}(t_0)\|}, \quad e_n = \dot{c}, \quad \text{und} \quad \bar{e}_n = \dot{\bar{c}}.$$

Dann erhalten wir eine Familie linearer Isometrien  $\Phi_t: T_{c(t)}M \rightarrow T_{\bar{c}(t)}\bar{M}$  mit  $\Phi_t(e_i(t)) = \bar{e}_i(t)$  für alle  $t \in [0, L]$  und alle  $i$ . Diese Familie ist *parallel*, denn für  $X = \sum_{i=1}^n x^i e_i \in \mathfrak{X}(c)$  gilt

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\bar{c}}(\Phi \circ X) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\bar{c}} \left( \sum_{i=1}^n x^i \bar{e}_i \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial t} \bar{e}_i = \Phi \circ \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^c X.$$

Wir betrachten das Vektorfeld

$$W = \frac{\|\bar{V}(t_0)\|}{\|V(t_0)\|} \Phi \circ V$$

längs  $\bar{c}$ , so dass

$$W(t_0) = \|\bar{V}(t_0)\| \bar{e}_1(t_0) = \bar{V}(t_0).$$

Wegen der Parallelität von  $\Phi$  gilt außerdem

$$\dot{W} = \frac{\|W(t_0)\|}{\|V(t_0)\|} \Phi \circ \dot{V} \quad \text{und} \quad \ddot{W} = \frac{\|W(t_0)\|}{\|V(t_0)\|} \Phi \circ \ddot{V}.$$

Allerdings ist  $W$  nicht notwendigerweise ein Jacobi-Feld längs  $\bar{c}$ .

Da  $W - \bar{V} \in \mathfrak{X}''(\bar{c}|_{[0, t_0]})$ , schließen wir aus Proposition 2.4 und Lemma 2.3, dass

$$I_{\bar{c}|_{[0, t_0]}}(W, W) = \underbrace{I_{\bar{c}|_{[0, t_0]}}(W - \bar{V}, W - \bar{V})}_{\geq 0} + 2 \underbrace{I_{\bar{c}|_{[0, t_0]}}(\bar{V}, W - \bar{V})}_{=0} + I_{\bar{c}|_{[0, t_0]}}(\bar{V}, \bar{V}) \geq I_{\bar{c}|_{[0, t_0]}}(\bar{V}, \bar{V}).$$

Jetzt können wir mit (\*) wie folgt abschätzen.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \log \|V(t)\| &= \frac{\langle V(t_0), \dot{V}(t_0) \rangle}{\|V(t_0)\|^2} = \frac{1}{\|V(t_0)\|^2} \int_0^{t_0} (\|\dot{V}(t)\|^2 - K(\text{span}\{V(t), \dot{c}(t)\}) \|V(t)\|^2) dt \\
&= \frac{1}{\|(\Phi \circ V)(t_0)\|^2} \int_0^{t_0} (\|(\Phi \circ \dot{V})(t)\|^2 - \underbrace{K(\text{span}\{V(t), \dot{c}(t)\})}_{\leq \bar{K}(\text{span}\{W(t), \dot{c}(t)\})} \|(\Phi \circ V)(t)\|^2) dt \\
&\geq \frac{1}{\|W(t_0)\|^2} \int_0^{t_0} (\|\dot{W}(t)\|^2 - \bar{K}(\text{span}\{W(t), \dot{c}(t)\}) \|W(t)\|^2) dt \\
&= \frac{1}{\|W(t_0)\|^2} I_{\bar{c}|_{[0, t_0]}}(W, W) \geq \frac{1}{\|\bar{V}(t_0)\|^2} I_{\bar{c}|_{[0, t_0]}}(\bar{V}, \bar{V}) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \log \|\bar{V}(t)\| . \quad \square
\end{aligned}$$

Aus dem obigen Satz können wir folgern, dass der Abstand zum ersten konjugierten Punkt bei Mannigfaltigkeiten mit größerer Schnittkrümmung kleiner ist. Daraus kann man eine Durchmesser-Abschätzung herleiten, und schließlich feststellen, dass die Fundamentalgruppe dann endlich sein muss. Wir werden im nächsten Abschnitt aber sehen, dass für derlei Aussagen bereits die Ricci-Krümmung ausreicht.

Wir betrachten jetzt ähnliche Diagramme wie im Beweis der Satzes 1.137, allerdings bei variabler Schnittkrümmung. Sei dazu  $\Phi: T_p M \rightarrow T_{\bar{p}} \bar{M}$  eine lineare Isometrie und  $r > 0$  hinreichend klein, dann betrachten wir

$$\begin{array}{ccc}
T_p M \supset B_r(0_p) & \xrightarrow[\sim]{\Phi} & B_r(0_{\bar{p}}) \subset T_{\bar{p}} \bar{M} \\
\exp_p \downarrow & & \downarrow \exp_{\bar{p}} \\
M \supset B_r(p) & \dashrightarrow & B_r(\bar{p}) \subset \bar{M} .
\end{array} \tag{2.1}$$

Für  $r \leq \rho(p)$  erhalten wir auf diese Weise eine Abbildung  $F: U \rightarrow \bar{U}$ . Falls die Schnittkrümmung von  $M$  kleiner oder gleich der von  $\bar{M}$  ist, ist diese Abbildung kontrahierend. Wir beginnen mit einer Vorüberlegung.

**2.6. FOLGERUNG.** *Seien  $(M, g)$  und  $(\bar{M}, \bar{g})$  vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten, seien Punkte  $p \in M$ ,  $\bar{p} \in \bar{M}$  gegeben, sei  $r > 0$  nicht größer als der konjugierte Radius von  $\bar{p}$  in  $\bar{M}$ , und sei  $\Phi: T_p M \rightarrow T_{\bar{p}} \bar{M}$  eine lineare Isometrie. Für alle  $v \in B_r(0_p)$  sei  $K(E) \leq K(\bar{E})$  für alle Ebenen  $E \subset T_{\exp_p v} M$  und  $\bar{E} \subset T_{\exp_{\bar{p}}(\Phi(v))} \bar{M}$ . Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow B_r(0_p)$  eine Kurve in  $T_p M$ , dann gilt*

$$L(\exp_p \circ \gamma) \geq L(\exp_{\bar{p}} \circ \Phi \circ \gamma) .$$

Es würde hier reichen, Voraussetzungen nur an die Schnittkrümmungen derjenigen Ebenen in  $T_{\exp_p v} M$  bzw.  $T_{\exp_{\bar{p}}(\Phi(v))} \bar{M}$  zu stellen, die den Geschwindigkeitsvektor der Geodätischen  $c_v$  bzw.  $c_{\Phi(v)}$  enthalten, aber wir wollen es mit der Allgemeinheit nicht übertreiben.

**BEWEIS.** Es reicht zu zeigen, dass

$$\left\| \frac{d}{dt} (\exp_p \circ \gamma)(t) \right\| \geq \left\| \frac{d}{dt} (\exp_{\bar{p}} \circ \Phi \circ \gamma)(t) \right\|$$

für alle  $t \in [a, b]$ . Wir fixieren also  $t$  und betrachten die Geodätischen  $c: [0, \|\gamma(t)\|] \rightarrow M$  von  $p$  nach  $\exp_p(\gamma(t))$  und  $\bar{c}: [0, \|\gamma(t)\|] \rightarrow \bar{M}$  von  $\bar{p}$  nach  $\exp_{\bar{p}}(\Phi(\gamma(t)))$  mit

$$c(s) = \exp_p \left( \frac{s \gamma(t)}{\|\gamma(t)\|} \right) \quad \text{und} \quad \bar{c}(s) = \exp_{\bar{p}} \left( \Phi \left( \frac{s \gamma(t)}{\|\gamma(t)\|} \right) \right) .$$

Entlang dieser Geodätischen betrachten wir die Jacobifelder

$$\begin{aligned} X(s) &= d_{\frac{s\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}} \exp_p \left( \frac{s\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \right) \\ &= s d_{\frac{s\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}} \exp_p \left( \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} - \frac{\langle \dot{\gamma}(t), \gamma(t) \rangle}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3} \gamma(t) \right) + \frac{s \langle \dot{\gamma}(t), \gamma(t) \rangle}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3} d_{\frac{s\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}} \exp_p(\gamma(t)) \\ &= Y(s) + Z(s) \end{aligned}$$

und analog

$$\bar{X}(s) = d_{\Phi\left(\frac{s\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}\right)} \exp_{\bar{p}} \left( \Phi \left( \frac{s\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \right) \right) = \bar{Y}(s) + \bar{Z}(s) .$$

Dabei sind  $Y$  und  $Z$  ( $\bar{Y}$  und  $\bar{Z}$ ) nach dem Gauß-Lemma 1.90 der vertikale und der tangential Anteil von  $X$  (bzw.  $\bar{X}$ ). Während

$$\|Z(s)\| = \frac{s \langle \dot{\gamma}(t), \gamma(t) \rangle}{\|\dot{\gamma}(t)\|^2} = \|\bar{Z}(s)\| ,$$

gilt  $Y(0) = \bar{Y}(0) = 0$  und  $\dot{Y}(0) = \Phi(\dot{Y}(0))$ .

Da  $\|\dot{\gamma}(t)\| < r$  kleiner als der konjugierte Radius von  $\bar{p}$  in  $\bar{M}$  ist, dürfen wir den Vergleichssatz von Rauch anwenden und erhalten

$$\|Y(s)\| \geq \|\bar{Y}(s)\| \quad \text{für alle } s \in [0, \|\dot{\gamma}(t)\|] ,$$

also auch

$$\|X(s)\|^2 = \|Y(s)\|^2 + \|Z(s)\|^2 \geq \|\bar{Y}(s)\|^2 + \|\bar{Z}(s)\|^2 = \|\bar{X}(s)\|^2 .$$

Für  $s = \|\dot{\gamma}(t)\|$  erhalten wir insbesondere

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dt} (\exp_p \circ \gamma)(t) \right\| &= \|d_{\dot{\gamma}(t)} \exp_p(\dot{\gamma}(t))\| = \|X(\|\dot{\gamma}(t)\|)\| \\ &\geq \|\bar{X}(\|\dot{\gamma}(t)\|)\| = \|d_{\Phi(\dot{\gamma}(t))} \exp_{\bar{p}}(\Phi(\dot{\gamma}(t)))\| = \left\| \frac{d}{dt} (\exp_{\bar{p}} \circ \Phi \circ \gamma)(t) \right\| . \quad \square \end{aligned}$$

Wir kommen nun zu der vor Folgerung 2.6 angedeuteten Aussage.

**2.7. DEFINITION.** Eine Abbildung  $F: (X, d) \rightarrow (\bar{X}, \bar{d})$  zwischen metrischen Räumen heißt *kontrahierend* oder eine *Kontraktion*, wenn für alle  $x, y \in X$  gilt, dass

$$d(x, y) \geq \bar{d}(F(x), F(y)) .$$

**2.8. FOLGERUNG.** *Unter den Voraussetzungen von Folgerung 2.6 sei außerdem  $0 < r \leq \rho(p)$ . Dann ist die Abbildung*

$$\exp_{\bar{p}} \circ \Phi \circ \exp_p^{-1}: B_r(p) \rightarrow B_r(\bar{p})$$

*wohldefiniert und kontrahierend.*

**BEWEIS.** Sei  $F: B_r(p) \rightarrow B_r(\bar{p})$  die obige Abbildung, vergleiche (2.1). Dann ist  $F$  wohldefiniert, da  $\exp_p: B_r(0_p) \rightarrow B_r(p)$  wegen  $r \leq \rho(p)$  invertierbar ist.

Seien nun zwei Punkte  $q_1, q_2 \in B_{\frac{r}{2}}(p)$  gegeben, und sei  $c: [0, L] \rightarrow B_r(p) \subset M$  eine kürzeste Geodätische von  $q_1$  nach  $q_2$ . Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$L = d(q_1, q_2) \leq d(q_1, p) + d(p, q_2) < r ,$$

während jede Kurve, die  $B_r(p)$  verlässt, länger als  $r$  ist, siehe Beweis von Folgerung 1.91. Somit verläuft  $c$  in  $B_r(p)$ .

Also existiert eine Kurve  $\gamma: [0, L] \rightarrow B_r(0_p) \subset T_p M$  mit  $c(t) = \exp_p(\gamma(t))$  für alle  $t \in [0, L]$ . Die Kurve  $\exp_{\bar{p}} \circ \Phi \circ \gamma$  verbindet  $F(q_1)$  und  $F(q_2)$ . Wegen Folgerung 2.6 gilt

$$\bar{d}(F(q_1), F(q_2)) \leq L(\exp_{\bar{p}} \circ \Phi \circ \gamma) \leq L(\exp_p \circ \gamma) = L(c) = d(q_1, q_2),$$

mithin ist  $F$  kontrahierend. □

2.9. BEISPIEL. Wir geben ein Beispiel dafür, dass in Folgerung 2.8 nur Bälle vom Radius  $\frac{\rho(p)}{2}$  betrachtet werden dürfen. Dazu sei etwa  $M = \mathbb{R}P^n$ , und sei  $\bar{M} = M_\kappa^n$  die Sphäre mit Radius  $\frac{1}{\sqrt{\kappa}}$  und konstanter Schnittkrümmung  $\kappa$ , wobei  $1 \leq \kappa < 4$ . Nach Übung 4 von Blatt 9 ist  $\rho(p) = \frac{\pi}{2}$  für alle  $p \in \mathbb{R}P^n$ . Wähle  $v \in S_p M$  und  $\frac{\pi}{4} < L < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$ . Dann gilt

$$d(c_v(L), c_v(-L)) = d(c_v(L), c_v(\pi - L)) = \pi - 2L,$$

wobei die kürzeste Geodätische gerade durch  $c_v|_{[L, \pi-L]}$  gegeben ist.

Sei entsprechend  $\bar{p} \in M_\kappa^n$  und  $\bar{v} \in S_{\bar{p}} M_\kappa^n$ . Da  $L < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$ , liegen die Punkte  $\exp_{\bar{p}}(\pm L\bar{v})$  in der Hemisphäre um den Punkt  $\bar{p}$ , und die kürzeste Geodätische dazwischen ist  $\bar{c}_{\bar{v}}|_{[-L, L]}$ . Also folgt

$$d(F(c_v(L)), F(c_v(-L))) = d(\bar{c}_{\bar{v}}(L), \bar{c}_{\bar{v}}(-L)) = 2L > \pi - 2L = d(c_v(L), c_v(-L)),$$

und  $F$  ist nicht mehr kontrahierend für Radien  $r > \frac{\rho(p)}{2} = \frac{\pi}{4}$ .

2.10. BEMERKUNG. Wir interpretieren Folgerung 2.8 als Vergleichssatz für kleine Dreiecke. In Abschnitt 2.4 werden wir dieses Argument ausbauen zum Vergleichssatz 2.41 von Toponogov für Dreiecke beliebiger Größe.

Wir betrachten die Konstruktionsaufgabe SWS aus der elementaren Geometrie. Unter den Voraussetzungen von Folgerung 2.8 wählen wir Dreiecke in  $M$  und  $\bar{M}$ , mit Ecken  $A, B, C$  und  $\bar{A} = F(A)$ ,  $\bar{B} = F(B)$ ,  $\bar{C} = F(C)$ , wobei  $C = p$  und  $\bar{C} = \bar{p}$  gelte. Dann haben die Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$  den gleichen Winkel  $\gamma$  bei  $C$  bzw.  $\bar{C}$  und die gleichen Seiten  $a = d(B, C) = d(\bar{B}, \bar{C}) \leq \frac{r}{2}$  und  $b = d(A, C) = d(\bar{A}, \bar{C}) \leq \frac{r}{2}$ , aber es gilt  $c = d(A, B) \geq \bar{c} = d(\bar{A}, \bar{B})$ .

Das Argument aus dem Beweis von Folgerung 2.8 lässt sich noch ein bisschen verallgemeinern: der obige Vergleichssatz gilt immer noch, falls  $a + b \leq r$  gilt, denn dann verläuft die Seite  $c$  immer noch ganz in  $\bar{B}_r(p)$ .

Aus dem Vergleichssatz von Rauch folgt unmittelbar eine sehr starke Aussage über die Topologie von Mannigfaltigkeiten mit nichtpositiver Schnittkrümmung.

2.11. SATZ (Hadamard-Cartan). *Sei  $(M, g)$  eine vollständige, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung  $K \leq 0$ , und sei  $p \in M$ . Dann ist  $\exp_p: T_p M \rightarrow M$  eine universelle Überlagerung.*

BEWEIS. Wir setzen  $\bar{M} = T_p M$  und  $\bar{p} = 0_p$ . Da  $(T_p M, g_p)$  ein Euklidischer Vektorraum ist, gibt es keine konjugierten Punkte in  $\bar{M}$ . Aus dem Satz von Rauch folgt, dass Jacobifelder in  $M$  nicht langsamer wachsen als in  $T_p M$ , insbesondere gibt es in  $M$  dann ebenfalls keine zu  $p$  konjugierten Punkte. Nach Bemerkung 1.109 ist also  $\exp_p$  ein lokaler Diffeomorphismus.

Wenn  $\exp_p$  ein lokaler Diffeomorphismus ist, dann ist die zurückgeholte Metrik  $\exp_p^* g$  mit

$$(\exp_p^* g)_v(x, y) = g_{\exp_p v}(d_v \exp_p(x), d_v \exp_p(y))$$

nirgends ausgeartet. Die Exponentialabbildung von  $(T_p M, \exp_p^* g)$  am Punkt  $0_p$  ist gerade die Identität auf  $T_p M = T_{0_p} T_p M$ , wie im folgenden Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_{0_p} T_p M & \xrightarrow[\sim]{\text{id}} & T_p M \\ \exp_{0_p} \downarrow = \text{id} & & \downarrow \exp_p \\ (T_p M, \exp_p^* g) & \xrightarrow{\exp_p} & (M, g) . \end{array}$$

Daher ist die Riemannsche Mannigfaltigkeit  $(T_p M, \exp_p^* g)$  nach dem Satz 1.96 von Hopf und Rinow vollständig. Nach Lemma 1.119 ist  $\exp$  daher eine Überlagerung. Da  $T_p M$  einfach zusammenhängend ist, ist  $\exp_p: T_p M \rightarrow M$  eine universelle Überlagerung.  $\square$

2.12. BEISPIEL. Zu den Mannigfaltigkeiten mit nichtpositiver Schnittkrümmung gehören etwa die  $S^1$ , die Tori  $T^n = (S^1)^n$ , sowie alle hyperbolischen Mannigfaltigkeiten, also z.B. die hyperbolischen Flächen aus Beispiel 1.139, siehe dazu auch Satz 1.137.

2.13. BEMERKUNG. Die Aussage des Satzes von Hadamard-Cartan ist stärker als sie auf den ersten Blick aussehen mag. Sie besagt, dass eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit  $M$  mit nichtpositiver Schnittkrümmung ein  $K(\pi, 1)$  ist, und damit bis auf Homotopieäquivalenz durch die Fundamentalgruppe  $\pi_1(M, p)$  eindeutig bestimmt wird. Insbesondere lassen sich zahlreiche wichtige topologische Invarianten allein aus  $\pi_1(M, p)$  ausrechnen. Dazu gehört unter anderem die (Ko-)Homologie von  $M$  mit beliebigen Koeffizienten, etwa auch die de Rham-Kohomologie. Wenn  $M$  kompakt ist, legt die (Ko-)Homologie mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , und damit die Fundamentalgruppe, die Dimension von  $M$  fest.

Zum Vergleich: die Sphären  $S^n$  mit  $n \geq 2$  haben alle die gleiche Fundamentalgruppe  $\{e\}$  und sind ebenfalls kompakt, aber ihre Dimensionen sind verschieden.

Außerdem ist die Fundamentalgruppe stets unendlich, wenn  $M$  selbst kompakt ist. Denn sei  $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$  die universelle Überlagerung. Da ein kompaktes  $M$  endlichen Durchmesser hat, folgt für  $R > \text{diam}(M)$  und  $p \in M$  also

$$\tilde{M} = \pi^{-1}(M) = \pi^{-1}(B_R(p)) = \bigcup_{\tilde{p} \in \pi^{-1}\{p\}} B_R(\tilde{p}) .$$

Aber  $\exp_{\tilde{p}} T_{\tilde{p}} \tilde{M}$  ist sicher nicht in einer endlichen Vereinigung von Bällen mit endlichem Radius enthalten, folglich ist  $\pi^{-1}\{p\}$  und damit auch  $\pi_1(M, p)$  unendlich.

## 2.2. Ricci-Krümmung und Volumenvergleich

Wir betrachten jetzt die Ricci-Krümmung einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Eine untere Schranke an die Ricci-Krümmung liefert uns eine obere Schranke an das Volumenwachstum von Riemannschen Bällen. Hieraus lassen sich interessante Volumen- und Durchmesser-Abschätzungen ableiten.

Sei  $\text{ric}_p$  die Ricci-Krümmung von  $(M, g)$  am Punkt  $p$ . Wir schreiben

$$\text{ric}_p \geq c g_p \quad \iff \quad \text{ric}_p(v, v) \geq c g_p(v, v) \quad \text{für alle } v \in T_p M ,$$

und  $\text{ric} \geq c g$ , wenn das für alle  $p \in M$  gilt.

2.14. SATZ (Bonnet, Myers). *Sei  $(M, g)$  vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit  $\text{ric} \geq (n-1)\kappa g$  für ein  $\kappa > 0$ . Dann gilt  $\text{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ . Insbesondere ist  $M$  kompakt und hat endliche Fundamentalgruppe.*

Somit ist die Situation hier bereits völlig anders als bei nichtpositiver Schnittkrümmung, siehe Bemerkung 2.13.

BEWEIS. Es sei  $c$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische in  $M$ , und es sei  $\ell = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ . Wir wollen zeigen, dass die Indexform  $I_{c|_{[0,\ell]}}$  nicht positiv definit ist. Nach Proposition 2.4 folgt daraus nämlich, dass  $c(t)$  zu  $c(0)$  konjugiert ist für ein  $t \in [0, \ell]$ . Nach Proposition 1.111 folgt, dass  $c|_{[0,L]}$  keine kürzeste Geodätische ist für  $L > \ell$ . Wenn aber keine kürzeste Geodätische länger als  $\ell$  sein kann, dann ist der Durchmesser von  $M$  höchstens  $\ell$ .

Es seien  $e_1, \dots, e_n$  eine Orthonormalbasis aus parallelen Vektorfelder längs  $c$  mit  $\dot{c} = e_1$ . Für  $i = 2, \dots, n$  betrachte Vektorfelder  $V_i \in \mathfrak{X}''(c|_{[0,\ell]})$  mit

$$V_i(t) = \sin(\sqrt{\kappa}t) e_i(t).$$

Wir wollen zeigen, dass bereits  $I_{c|_{[0,\ell]}}$  nicht positiv definit ist. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n I_{c|_{[0,\ell]}}(V_i, V_i) &= \int_0^\ell \sum_{i=2}^n \left( \|\sqrt{\kappa} \cos(\sqrt{\kappa}t) e_i(t)\|^2 - \langle R_{\sin(\sqrt{\kappa}t)e_i, e_1} e_1, \sin(\sqrt{\kappa}t)e_i \rangle \right) dt \\ &= \int_0^\ell \left( (n-1) \kappa \cos(\sqrt{\kappa}t)^2 - \sin(\sqrt{\kappa}t)^2 \operatorname{ric}(e_1, e_1) \right) dt \\ &\leq (n-1) \kappa \int_0^\ell \left( \cos(\sqrt{\kappa}t)^2 - \sin(\sqrt{\kappa}t)^2 \right) dt \\ &= (n-1) \kappa \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}} \cos(2\sqrt{\kappa}t) dt = 0. \end{aligned}$$

Da  $\operatorname{diam}(M)$  endlich ist, ist  $M$  nach dem Satz 1.96 von Hopf und Rinow kompakt. Sei  $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$  eine universelle Riemannsche Überlagerung, dann erfüllt auch  $\tilde{M}$  die Voraussetzungen dieses Satzes, ist also kompakt. Für  $p \in M$  und  $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p) \in \tilde{M}$  besitzt die Teilmenge

$$\pi^{-1}\{p\} = \{ \gamma(p) \mid \gamma \in \pi_1(M, p) \} \subset \tilde{M}$$

keinen Häufungspunkt, da  $\pi_1(M, p)$  nach Satz 1.131 (1) eigentlich diskontinuierlich operiert. Da  $\tilde{M}$  kompakt ist, muss  $\pi^{-1}\{p\}$  endlich sein. Da  $\pi_1(M, p)$  frei operiert, ist dann auch  $\pi_1(M, p)$  endlich.  $\square$

2.15. BEMERKUNG. Die Abschätzung im Satz von Bonnet-Myers ist optimal, denn für die Sphäre  $M_\kappa^n$  mit Schnittkrümmung  $\kappa > 0$  gilt

$$\operatorname{ric} = (n-1) \kappa g \quad \text{und} \quad \operatorname{diam}(M_\kappa^n) = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}.$$

Wir werden in Satz 2.21 sehen, dass umgekehrt eine Riemannsche Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  mit  $\operatorname{ric} \geq (n-1) \kappa g$  und  $\operatorname{diam}(M) = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$  für ein  $\kappa > 0$  bereits isometrisch zu  $M_\kappa^n$  ist.

Das Hauptaugenmerk in diesem Abschnitt richtet sich auf Volumina von Teilmengen in Mannigfaltigkeiten.

2.16. DEFINITION. Sei  $(M, g)$  eine  $n$ -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei  $\varphi: U^\varphi \rightarrow V^\varphi$  eine Karte, und sei  $h: M \rightarrow [0, \infty)$  eine Funktion. Falls  $h \circ \varphi^{-1}$  integrierbar ist, definieren wir das (*Volumen-*) *Integral* von  $h$  über  $U^\varphi$  als

$$\int_{U^\varphi} h \, d\operatorname{vol}_g = \int_{V^\varphi} (h \circ \varphi^{-1}) \, d\operatorname{vol}_g^\varphi = \int_{V^\varphi} h(\varphi^{-1}(x)) \det(g_x^\varphi)^{\frac{1}{2}} dx^1 \dots dx^n.$$

Dabei heißt  $d\operatorname{vol}_g^\varphi = \det(g_x^\varphi)^{\frac{1}{2}} dx^1 \dots dx^n$  das *Volumenelement* von  $(M, g)$  in der Karte  $\varphi$ .

Sei jetzt  $\mathcal{A} = \{ \varphi_i: U_i \rightarrow V_i \mid i \in I \}$  ein Atlas von  $M$  und  $(\psi_i)_{i \in I}$  eine untergeordnete Partition der Eins, siehe Abschnitt 1.2. Wenn die folgenden Integrale existieren und ihre Summe konvergiert,

dann heißt  $h: M \rightarrow [0, \infty)$  *integrierbar* und

$$\int_M h \, d\text{vol}_g = \sum_{i \in I} \int_{U_i} \psi_i \cdot h \, d\text{vol}_g$$

das (*Volumen-*) *Integral* von  $h$  über  $M$ . Für beliebige  $h: M \rightarrow \mathbb{R}$  schreibe  $h = h^+ - h^-$  mit  $h^\pm = \max(0, \pm h): M \rightarrow [0, \infty)$ . Dann heißt  $h$  *integrierbar*, wenn  $h^+$  und  $h^-$  integrierbar sind, mit

$$\int_M h \, d\text{vol}_g = \int_M h^+ \, d\text{vol}_g - \int_M h^- \, d\text{vol}_g .$$

Sei schließlich  $A \subset M$  eine Teilmenge und sei  $1_A: M \rightarrow \{0, 1\}$  die Indikatorfunktion von  $A$ . Falls  $1_A$  integrierbar ist, ist das (*n-dimensionale*) *Volumen* von  $A$  definiert als

$$\text{vol}(A) = \int_M 1_A \, d\text{vol}_g .$$

Aus der Integraltransformationsformel folgt, dass  $\int_M h \, d\text{vol}_g$  weder vom Atlas noch von der gewählten Partition der Eins abhängt.

2.17. BEMERKUNG. Wir erinnern uns an ein paar Rechenregeln aus der linearen Algebra.

- (1) Auf den symmetrischen reellen  $n \times n$ -Matrizen definiert  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB)$  ein Skalarprodukt. Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt

$$\text{tr}(A)^2 = \langle A, E_n \rangle^2 \leq \langle A, A \rangle \langle E_n, E_n \rangle = n \, \text{tr}(A^2)$$

für alle symmetrischen Matrizen  $A \in M_n(\mathbb{R})$ .

- (2) Sei  $A(t)$  eine Familie invertierbarer Matrizen. Aus

$$0 = \frac{d}{dt}(A(t) A(t)^{-1}) = \dot{A}(t) A(t)^{-1} + A(t) \frac{d}{dt}(A(t)^{-1})$$

folgt

$$\frac{d}{dt}(A(t)^{-1}) = -A(t)^{-1} \cdot \dot{A}(t) \cdot A(t)^{-1} .$$

- (3) Sei  $A: I \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$  eine Familie invertierbarer reeller Matrizen, wobei  $I \subset \mathbb{R}$ . Es sei  $\text{adj } A$  die Adjunkte von  $A$ , dann gilt

$$\frac{d}{dt} \det(A(t)) = \text{tr}(\text{adj } A(t) \cdot \dot{A}(t)) = \det(A(t)) \, \text{tr}(A(t)^{-1} \dot{A}(t)) .$$

Im folgenden Satz wollen wir das Volumenelement in Normalkoordinaten abschätzen. Für ein-dimensionale Mannigfaltigkeiten sind Normalkoordinaten das gleiche wie Parametrisierungen nach Bogenlänge  $s$ , und das Volumenelement ist  $ds$ . Somit interessieren uns jetzt nur noch Mannigfaltigkeiten der Dimension  $\geq 2$ .

Die Ricci-Krümmung  $\text{ric}(v, v)$  ist eine Art Mittelwert der Schnittkrümmung aller Ebenen  $E$  durch den Vektor  $v$ . Wir könnten erwarten, dass eine Schranke an die Ricci-Krümmung so etwas wie eine Schranke an das „gemittelte“ Wachstum von Jacobi-Feldern liefert. Der folgende Satz zeigt, dass das in gewissem Sinne sogar möglich ist.

2.18. SATZ (Bishop). *Sei  $(M, g)$  eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit  $n \geq 2$ , sei  $p \in M$ , und sei  $c(t) = \exp_p(tv)$  eine Geodätische mit Startvektor  $v \in S_p M$ . Sei  $k(t) = \frac{1}{n-1} \text{ric}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))$ , und sei  $h \in C^\infty(\mathbb{R})$  die Lösung der Differentialgleichung*

$$\ddot{h} + kh = 0 \quad \text{mit} \quad h(0) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{h}(0) = 1 .$$

Ferner sei

$$a(t) = \det\left(g_{tv}^{\exp_p^{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{so dass} \quad d\text{vol}_g^{\exp_p^{-1}}|_{tv} = a(t) \, dx^1 \cdots dx^n .$$

Dann gilt

$$\frac{n-1}{t} + \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \leq (n-1) \frac{\dot{h}(t)}{h(t)} \quad \text{und} \quad t^{n-1} a(t) \leq h(t)^{n-1}$$

für alle  $t > 0$  kleiner als die kleinste positive Nullstelle  $t_0$  von  $a$ , also bis zum ersten konjugierten Punkt auf  $c_v$ . Falls in einer der beiden Ungleichungen bei  $t$  Gleichheit gilt, so folgt  $K(E) = k(s)$  für alle  $s \in [0, t]$  und alle Ebenen  $E \subset T_{c(s)}M$  mit  $\dot{c}(s) \subset E$ .

BEWEIS. Entlang von  $c$  betrachten wir parallele Vektorfelder  $e_1, \dots, e_n \in \mathfrak{X}(c)$  mit  $e_n = \dot{c}$  so dass  $e_1(t), \dots, e_n(t)$  für alle  $t$  eine Orthonormalbasis von  $T_{c(t)}M$  bilden. Außerdem betrachten wir Jacobifelder  $V_1, \dots, V_{n-1} \in \mathfrak{X}'(c)$  mit den Anfangsbedingungen

$$V_i(0) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{V}_i(0) = e_i(0)$$

für alle  $i = 1, \dots, n-1$ .

Wir definieren eine Familie von Matrizen  $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j} \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ , so dass

$$V_j(t) = \sum_{i=1}^{n-1} a_{ij} e_i(t).$$

Der Krümmungstensor liefert eine Familie symmetrischer Matrizen

$$R(t) = (r_{ij}(t))_{i,j} = (R_{e_i(t), e_n(t)} e_n(t), e_j(t))_{i,j} \in M_{n-1}(\mathbb{R}).$$

Da die Felder  $e_i$  parallel sind, folgt aus der Jacobigleichung

$$0 = \ddot{V}_j(t) + R_{V_j(t), e_n(t)} e_n(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \ddot{a}_{ij}(t) e_i(t) + \sum_{i,k=1}^{n-1} r_{ik} a_{kj} e_i(t),$$

durch Koeffizientenvergleich also

$$\ddot{A} + R \cdot A = 0 \quad \text{mit} \quad A(0) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{A}(0) = E_n.$$

Wir wählen  $e_1 = e_1(0), \dots, e_n = e_n(0)$  als Orthonormalbasis von  $T_p M$  bezüglich  $g_p$ , also gilt  $e_n = v$ . Nach Bemerkung 1.83 gilt

$$d_{tv} \exp_p(e_n) = \dot{c}(t) = e_n(t) \quad \text{und} \quad d_{tv} \exp_p(e_i) = \frac{1}{t} d_{tv} \exp_p(te_i) = \frac{1}{t} V_i(t)$$

für  $i = 1, \dots, n-1$ . In Normalkoordinaten  $\varphi = \exp_p^{-1}$  gilt somit

$$\begin{aligned} a(t) &= \det \left( g_{tv}^{\exp_p^{-1}} \right)^{\frac{1}{2}} = \det \left( \begin{array}{ccc|c} \frac{\langle V_1(t), V_1(t) \rangle}{t^2} & \cdots & \frac{\langle V_1(t), V_{n-1}(t) \rangle}{t^2} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\langle V_{n-1}(t), V_1(t) \rangle}{t^2} & \cdots & \frac{\langle V_{n-1}(t), V_{n-1}(t) \rangle}{t^2} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= t^{1-n} \det(A(t)^* A(t))^{\frac{1}{2}} = t^{1-n} \det(A(t)). \end{aligned}$$

Wir setzen  $B(t) = \dot{A}(t) \cdot A(t)^{-1}$ , dann gilt

$$\frac{d}{dt} \log \det(A(t)) = \text{tr}(B(t))$$

nach Bemerkung 2.17 (3). Die Matrizen  $B(t)$  sind symmetrisch. Denn sei  $c(t_0)$  nicht zu  $c(0)$  längs  $c$  konjugiert, dann existieren Jacobifelder  $W_1, W_{n-1}$  mit  $W_i(0) = 0$  und  $W_i(t_0) = e_i$ . Insbesondere



sei  $A^{-1} = (a^{ij})_{ij}$ , dann gilt

$$W_i(t) = \sum_{j=1}^{n-1} a^{ji}(t_0) V_j(t) = \sum_{j,k=1}^{n-1} a_{jk}(t) a^{ki}(t_0) e_j(t).$$

Insbesondere schließen wir daraus, dass

$$\begin{aligned} b_{ij}(t_0) &= \langle \dot{W}_j(t_0), e_i(t_0) \rangle = \langle \dot{W}_j(t_0), W_i(t_0) \rangle \\ &= \int_0^{t_0} (\langle \dot{W}_j(t), \dot{W}_i(t) \rangle + \langle \ddot{W}_j(t), W_i(t) \rangle) dt \\ &= \int_0^{t_0} (\langle \dot{W}_i(t), \dot{W}_j(t) \rangle - \langle R_{W_i(t), \dot{c}(t)} \dot{c}(t), W_j(t) \rangle) dt = b_{ji}(t_0). \end{aligned}$$

Wegen Bemerkung 2.17 (2) erfüllt  $B$  die *Riccati-Gleichung*

$$\dot{B} = \ddot{A} \cdot A^{-1} - \dot{A} \cdot (A^{-1} \dot{A} A^{-1}) = -R - B^2.$$

Wir bilden die Spur und wenden Bemerkung 2.17 (1) an, das liefert

$$\text{tr}(\dot{B}) = - \underbrace{\text{tr}(R)}_{=\text{ric}(\dot{c}, \dot{c})} - \text{tr}(B^2) \leq -(n-1)k - \frac{\text{tr}(B)^2}{n-1}.$$

Wir beweisen jetzt die erste Aussage des Satzes. Dazu definieren wir eine Funktion

$$f(t) = (n-1) \frac{\dot{h}(t)}{h(t)} - \frac{n-1}{t} - \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}.$$

Zu zeigen ist  $f(t) \geq 0$  bis zur ersten Nullstelle von  $a(t)$ .

Nach Proposition 1.85 gilt bezüglich der Basis  $e_1, \dots, e_n$  von  $T_p M$ , dass

$$a(0) = \det\left(g_{ij}^{\exp_p^{-1}}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 \quad \text{und} \quad \dot{a}(0) = \frac{1}{2} \text{tr}\left(\frac{\partial g_{ij}^{\exp_p^{-1}}}{\partial x^n}(0_p)\right) = 0.$$

Wegen  $\ddot{h}(0) = -k(0)h(0) = 0$  liefert die Taylorentwicklung, dass

$$\lim_{t \searrow 0} f(t) = \lim_{t \searrow 0} \left( (n-1) \frac{1 + O(t^2)}{t + O(t^3)} - \frac{n-1}{t} - \frac{O(t)}{1 + O(t^2)} \right) = 0.$$

Wie oben gesehen, gilt

$$\frac{n-1}{t} + \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{d}{dt} \log(t^{n-1} a(t)) = \frac{d}{dt} \log \det(A(t)) = \text{tr}(B(t)),$$

insbesondere

$$f = (n-1) \frac{\dot{h}}{h} - \text{tr}(B).$$

Mit Hilfe der Differential- (un-) gleichungen für  $\text{tr}(B(t))$  und  $h$  erhalten wir jetzt

$$\begin{aligned} \dot{f}(t) &= \frac{d}{dt} \left( (n-1) \frac{\dot{h}(t)}{h(t)} - \text{tr}(B(t)) \right) = (n-1) \frac{\ddot{h}(t) h(t) - \dot{h}(t)^2}{h(t)^2} - \text{tr}(\dot{B}(t)) \\ &\geq \frac{\text{tr}(B(t))^2}{n-1} - (n-1) \frac{\dot{h}(t)^2}{h(t)^2} = -f(t) \left( \frac{\dot{h}}{h} + \frac{\text{tr}(B)}{n-1} \right). \end{aligned}$$

Um diese Differentialungleichung besser zu verstehen, wollen wir die Funktion  $\frac{\dot{h}}{h} + \frac{\text{tr}(B)}{n-1}$  als gegeben annehmen. Beachte, dass wir aufgrund der Taylorentwicklungen

$$h(t) = h(0) + t\dot{h}(0) + \frac{t^2}{2}\ddot{h}(0) + O(t^3) = t + O(t^3)$$

und

$$A(t) = A(0) + \dot{A}(0)t + \frac{t^2}{2}\ddot{A}(0) + O(t^3) = tE_n + O(t^3)$$

das Verhalten dieser Funktion nahe 0 durch

$$\frac{\dot{h}}{h} + \frac{\text{tr}(\dot{A}A^{-1})}{n-1} = \frac{2}{t} + O(t) > 0$$

beschreiben können. Sei  $t_0 \in (0, \infty]$  die kleinste positive Nullstelle von  $h$  oder von  $a$ , je nachdem, welche zuerst eintritt. Dann gilt

$$\lim_{t \searrow 0} \left( \frac{\dot{h}}{h} + \frac{\text{tr}(B)}{n-1} \right) = \lim_{t \searrow 0} \frac{d}{dt} \left( \log h(t) + \frac{\log \det A(t)}{n-1} \right) = \infty$$

und

$$\lim_{t \nearrow t_0} \left( \frac{\dot{h}}{h} + \frac{\text{tr}(B)}{n-1} \right) = \lim_{t \nearrow t_0} \frac{d}{dt} \left( \log h(t) + \frac{\log \det A(t)}{n-1} \right) = -\infty \quad \text{falls } t_0 < \infty$$

Wir machen die folgenden Beobachtungen.

- (1) Es könnte sein, dass  $f|_{(0, t_0)} = 0$  gilt. In diesem Fall gilt im Satz Gleichheit.
- (2) Falls  $f(t) > 0$  für ein  $t \in (0, t_0)$ , so schreiben wir die obige Ungleichung in einer Umgebung von  $t$  um als

$$\frac{d \log f(t)}{dt} \geq -\frac{\dot{h}}{h} - \frac{\text{tr}(B)}{n-1}.$$

Man sieht leicht, dass  $\lim_{s \nearrow t_1} \log f(s) = -\infty$  für  $t_1 \in (t, t_0)$  nicht möglich ist, also folgt  $f > 0$  auf  $(t, t_0)$ . Also — wenn  $f$  ab einem  $t$  positiv ist, bleibt es das bis zur Zeit  $t_0$ .

- (3) Wir drehen das Argument unter (2) um. Wenn  $f(t) < 0$  für ein  $t \in (0, t_0)$ , so schreiben wir

$$\frac{d \log(-f(t))}{dt} \leq -\frac{\dot{h}}{h} - \frac{\text{tr}(B)}{n-1}.$$

Jetzt folgern wir, dass  $\lim_{s \searrow t_1} \log(-f(s)) = -\infty$  für  $t_1 \in (0, t)$  nicht möglich ist, also folgt  $f < 0$  auf  $(0, t)$ . Da  $\frac{\dot{h}(t)}{h(t)} + \frac{\text{tr}(B(t))}{n-1} = \frac{2}{t} + O(t)$  für kleine  $t$  positiv ist, kann  $\log(-f(s))$  für  $s \rightarrow 0$  nicht gegen  $-\infty$  konvergieren, also kann  $f$  nicht gegen 0 konvergieren — im Widerspruch zu unser Anfangsbedingung.

Wegen (3) gilt  $f \geq 0$  auf  $[0, t_0)$ , was zu zeigen war.

Die zweite Behauptung des Satzes folgt aus der ersten, da

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^{n-1}a(t)}{h(t)^{n-1}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^{n-1}a(t)}{t^{n-1}\dot{h}(t)^{n-1}} = 1$$

und

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{t^{n-1}a(t)}{h(t)^{n-1}} \right) = \frac{t^{n-1}a(t)}{h(t)^{n-1}} \left( \frac{n-1}{t} + \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - (n-1) \frac{\dot{h}(t)}{h(t)} \right) \leq 0$$

bis zur ersten Nullstelle von  $a$  oder von  $h$ . Es folgt, dass die erste Nullstelle von  $h$  nicht kleiner als die erste Nullstelle von  $a$  sein kann, was die Abschätzungen beweist.

Falls bei  $0 < t < t_0$  in einer der beiden obigen Abschätzungen Gleichheit gilt, so muss  $f|_{[0, t]} = 0$  wegen (2) gelten, und es folgt insbesondere  $\text{tr}(B(s))^2 = (n-1) \text{tr}(B(s)^2)$ , woraus folgt, dass  $B(s)$

für alle  $s \in [0, t]$  jeweils ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist. Wegen der obigen Differentialgleichung  $\dot{B} = -R - B^2$  gilt das dann auch für

$$R(s) = (\langle R_{e_i(s), \dot{c}(s)} \dot{c}(s), e_j(s) \rangle)_{i,j},$$

woraus sofort die Behauptung  $K(E) = k(s)$  für alle Ebenen  $E \in T_{\dot{c}(s)}M$  mit  $\dot{c}(s) \in E$  folgt.  $\square$

Dieser Beweis lässt sich etwas geometrischer formulieren. Die Funktion  $r^{n-1} a(t)$  beschreibt gerade das Volumenelement der Sphäre mit Radius  $t$  um  $p$  in  $M$  im Vergleich zum Volumenelement der Standardsphäre — das liegt daran, dass der radiale Vektor  $\dot{c}(t)$  senkrecht auf dieser Sphäre steht und Länge 1 hat. Die Matrix  $B$  beschreibt den Weingarten-Operator und die zweite Fundamentalförm dieser Abstandssphäre — das erklärt, warum  $B$  symmetrisch ist. Also ist  $\text{tr}(B)$  genau die mittlere Krümmung, und die Gleichung  $\frac{d}{dt} \log \det(A(t)) = \text{tr}(B(t))$  beschreibt die Volumenänderung paralleler Flächen. An den eigentlichen Rechnungen ändert diese Anschauung aber leider nichts.

2.19. BEMERKUNG. Der Satz von Bishop impliziert den Satz 2.14 von Bonnet-Myers, denn die erste positive Nullstelle  $t_0$  der Funktion  $a$  ist nach Bemerkung 1.109 gerade der erste konjugierte Punkt längs der Geodätischen  $c$ . Falls  $\kappa > 0$  konstant ist, gilt

$$h(t) = s_\kappa(t) = \frac{\sin(\sqrt{\kappa} t)}{\sqrt{\kappa}}.$$

Aus dem obigen Satz folgt  $t_0 \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ , und daraus ergibt sich  $\text{diam}(M, g) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$  wie im Beweis des Satzes 2.14.

Wir geben jetzt eine weniger technische Anwendung der obigen Resultate.

2.20. SATZ (Bishop-Gromov). *Es sei  $(M, g)$  eine  $n$ -dimensionale vollständige zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit  $\text{ric} \geq (n-1)\kappa g$  für ein  $\kappa \in \mathbb{R}$ . Es sei  $p \in M$  und  $\bar{p} \in M_\kappa^n$ , dann ist die Funktion*

$$r \mapsto \frac{\text{vol}B_r(p)}{\text{vol}B_r(\bar{p})}$$

*monoton nicht wachsend auf  $(0, \infty)$  mit Grenzwert 1 bei  $r = 0$ . Aus  $\text{vol}B_r(p) = \text{vol}B_r(\bar{p})$  folgt, dass die Bälle isometrisch sind.*

Somit wachsen Bälle in  $M$  langsamer als in der Vergleichsmannigfaltigkeit  $M_\kappa^n$ . Beachte, dass der Nenner nicht von  $\bar{p}$  abhängt.

BEWEIS. Es sei  $s: SM \rightarrow (0, \infty]$  die Funktion aus Definition 1.103, also

$$s(v) := \sup \{ t > 0 \mid d(c_v(t), c_v(0)) = t \} \in (0, \infty].$$

Diese Funktion ist stetig nach Lemma 1.113. Für den Modellraum setzen wir

$$\bar{s} = \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} & \text{falls } \kappa > 0, \text{ und} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen des Satzes von Bonnet-Myers und Proposition 1.111 gilt

$$s(v) \leq \bar{s} \quad \text{für alle } v \in SM.$$

Betrachte die Teilmenge

$$V_r = \{ tv \mid v \in S_p M, \text{ und } 0 \leq t < \min(r, s(v)) \} \subset B_r(0_p) \subset T_p M.$$

Dann ist die Abbildung  $\exp_p: V_r \rightarrow B_r(p)$  injektiv nach Proposition 1.106, und es gilt

$$\exp_p(V_r) \subset B_r(p) \subset \overline{B_r(p)} = \exp_p(\overline{V_r}).$$

Hieraus schließen wir, dass

$$\begin{aligned} \text{vol}B_r(p) &= \int_{V_r} \sqrt{\det(g_x^{\text{exp}_p^{-1}})} dx^1 \cdots dx^n = \int_{V_r} a_{\frac{x}{\|x\|}}(\|x\|) dx^1 \cdots dx^n \\ &= \int_{S_p M} \int_0^{\min(r, s(v))} t^{n-1} a_v(t) dt d\text{vol}_{g^{\text{sph}}}(v). \end{aligned}$$

Hier ist  $g^{\text{sph}}$  die euklidische Metrik auf der Einheitssphäre  $S_p M$ , und  $a_v$  ist die Funktion  $a$  aus Satz 2.18 zur Geodätischen  $c_v$  mit Startvektor  $v \in S^p M$ . Im letzten Schritt sind wir von kartesischen Koordinaten auf  $T_p M$  zu Polarkoordinaten übergegangen, daher der zusätzliche Faktor  $t^{n-1}$  aus der Integral-Transformationsformel. Die Schreibweise  $d\text{vol}_{g^{\text{sph}}}(v)$  gibt die Integrationsvariable an.

Für den Modellraum  $M_n(\kappa)$  gilt Gleichheit im Satz 2.18 von Bishop, es folgt

$$\bar{a}(t) = t^{1-n} \bar{h}(t)^{n-1} = \left( \frac{s_\kappa(t)}{t} \right)^{n-1},$$

somit

$$\begin{aligned} \text{vol}B_r(\bar{p}) &= \int_{S_{\bar{p}} M_\kappa^n} \int_0^{\min(r, \bar{s})} s_\kappa(t)^{n-1} dt d\text{vol}_{g^{\text{sph}}}(v) \\ &= \text{vol}S^{n-1} \int_0^{\min(r, \bar{s})} s_\kappa(t)^{n-1} dt = \int_{S_p M} \int_0^{\min(r, \bar{s})} s_\kappa(t)^{n-1} dt d\text{vol}_{g^{\text{sph}}}(v), \end{aligned}$$

denn  $s_\kappa$  löst gerade die Differentialgleichung für  $h$  mit  $k(t) = \kappa$  konstant.

Es seien  $k_v$  und  $h_v$  wie in Satz 2.18 zur Geodätischen  $c_v$  definiert. Es folgt  $k_v(t) \geq \kappa$ , und daher

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{s}_\kappa(t)}{s_\kappa(t)} - \frac{\dot{h}_v(t)}{h_v(t)} \right) &= \frac{\ddot{s}_\kappa(t)}{s_\kappa(t)} - \frac{\dot{s}_\kappa(t)^2}{s_\kappa(t)^2} - \frac{\ddot{h}_v(t)}{h_v(t)} + \frac{\dot{h}_v(t)^2}{h_v(t)^2} \\ &= k_v(t) + \frac{\dot{h}_v(t)^2}{h_v(t)^2} - \kappa - \frac{\dot{s}_\kappa(t)^2}{s_\kappa(t)^2} \\ &\geq - \left( \frac{\dot{s}_\kappa(t)}{s_\kappa(t)} - \frac{\dot{h}_v(t)}{h_v(t)} \right) \left( \frac{\dot{s}_\kappa(t)}{s_\kappa(t)} + \frac{\dot{h}_v(t)}{h_v(t)} \right). \end{aligned}$$

Als Startwerte erhalten wir wie im obigen Beweis

$$\lim_{t \searrow 0} \left( \frac{\dot{s}_\kappa(t)}{s_\kappa(t)} - \frac{\dot{h}_v(t)}{h_v(t)} \right) = \lim_{t \searrow 0} \left( \frac{1 + O(t^2)}{t + O(t^3)} - \frac{1 + O(t^2)}{t + O(t^3)} \right) = 0.$$

Wie im Beweis des Satzes 2.18 folgt

$$\frac{\dot{s}_\kappa(t)}{s_\kappa(t)} \geq \frac{\dot{h}_v(t)}{h_v(t)} \quad \text{und} \quad s_\kappa(t) \geq h_v(t).$$

für alle  $t$  bis zur ersten Nullstelle von  $h_v$ . Wegen Bemerkung 2.19 gilt das insbesondere für alle  $t \in (0, s(v))$ .

Wir kombinieren das mit dem Satz 2.18 von Bishop und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \log \frac{t^{n-1} a_v(t)}{s_\kappa(t)^{n-1}} &= \frac{d}{dt} \log \frac{t^{n-1} a_v(t)}{h_v(t)^{n-1}} + \frac{d}{dt} \log \frac{h_v(t)^{n-1}}{s_\kappa(t)^{n-1}} \\ &= \underbrace{\frac{n-1}{t} + \frac{\dot{a}_v(t)}{a_v(t)} - (n-1) \frac{\dot{h}_v(t)}{h_v(t)}}_{\leq 0} + \underbrace{(n-1) \frac{\dot{h}_v(t)}{h_v(t)} - (n-1) \frac{\dot{s}_\kappa(t)}{s_\kappa(t)}}_{\leq 0} \leq 0 \end{aligned}$$

bis zur ersten Nullstelle von  $a_v$ , insbesondere für  $t \in (0, s(v))$ . Insbesondere ist also  $\frac{t^{n-1} a_v(t)}{s_\kappa(t)^{n-1}}$  monoton nicht wachsend in  $r$ .

Es reicht zu zeigen, dass für jeden Vektor  $v \in S_p M$  die Funktion

$$r \mapsto f_v(r) := \int_0^{\min(r, s(v))} t^{n-1} a_v(t) dt \Big/ \int_0^{\min(r, \bar{s})} s_\kappa(t)^{n-1} dt$$

monoton nicht steigt, denn da  $s_\kappa$  nicht von  $v$  abhängt, gilt das gleiche dann auch nach Integration über  $S_p M$ . Nach Bemerkung 2.19 gilt im Falle  $\kappa > 0$ , dass

$$\frac{\text{vol} B_r(p)}{\text{vol} B_r(\bar{p})} = \frac{\text{vol} M}{\text{vol} M_\kappa^n} \quad \text{für alle } r \geq \bar{s} = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}.$$

Insbesondere dürfen wir also  $r \leq \bar{s}$  annehmen.

Wir betrachten die Funktion  $f_v(r)$  zunächst auf dem Intervall  $(0, s(v)]$ . Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt hier

$$\begin{aligned} \frac{df_v(r)}{dr} &= \left( r^{n-1} a_v(r) \int_0^r s_\kappa(t)^{n-1} dt - s_\kappa(r)^{n-1} \int_0^r t^{n-1} a_v(t) dt \right) \Big/ \left( \int_0^r s_\kappa(t)^{n-1} dt \right)^2 \\ &= \int_0^r \underbrace{\left( \frac{r^{n-1} a_v(r)}{s_\kappa(r)^{n-1}} - \frac{t^{n-1} a_v(t)}{s_\kappa(t)^{n-1}} \right)}_{\leq 0} s_\kappa(t)^{n-1} s_\kappa(r)^{n-1} dt \Big/ \left( \int_0^r s_\kappa(t)^{n-1} dt \right)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Auf dem Intervall  $[s(v), \bar{s}]$  hingegen gilt

$$\frac{df_v(r)}{dr} = -s_\kappa(r)^{n-1} \int_0^{s(v)} t^{n-1} a_v(t) dt \Big/ \left( \int_0^r s_\kappa(t)^{n-1} dt \right)^2 < 0.$$

Damit ist die Ungleichung bewiesen.

Aus den Taylorentwicklungen von  $t^{n-1} a_v(t)$  und  $s_\kappa(t)^{n-1}$  bei  $t = 0$  folgt mit der Regel von L'Hospital, dass

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{\text{vol} B_r(p)}{\text{vol} B_r(\bar{p})} = \lim_{r \searrow 0} \frac{t^{n-1} a_v(t)}{s_\kappa(t)^{n-1}} = 1.$$

Wir betrachten jetzt den Gleichheitsfall  $\text{vol} B_r(p) = \text{vol} B_r(\bar{p})$  für ein  $r \leq \bar{s}$ . Aus der letzten Abschätzung folgt  $r \leq s(v)$  für alle  $v \in S_p M$ , somit  $r \leq \rho(p)$ . Darüberhinaus gilt

$$\frac{n-1}{t} + \frac{\dot{a}_v(t)}{a_v(t)} = (n-1) \frac{\dot{h}_v(t)}{h_v(t)} \quad \text{und} \quad \frac{\dot{h}_v(t)}{h_v(t)} = \frac{\dot{s}_\kappa(t)}{s_\kappa(t)}.$$

Aus der zweiten Gleichheit schließen wir  $k_v(t) = \kappa$  für alle  $t \in [0, r]$ . Aus der ersten Gleichheit folgt wie im Beweis von 2.18, dass  $K(E) = k_v(t) = \kappa$  für alle  $t \in [0, r]$  und alle Ebenen  $E \in T_{c_v(t)} M$  mit  $\dot{c}_v(t) \in E$ . Hieraus folgt, dass die Jacobifelder  $V$  längs  $c_v$  mit Startwert  $V(0) = 0$  die gleiche Länge haben wie die entsprechenden Jacobifelder in  $M_\kappa^n$ . Wie im Beweis von Satz 1.137 erhalten wir eine Isometrie

$$\begin{array}{ccc} T_p M \supset B_r(0_p) & \xrightarrow{\sim} & B_r(0_{\bar{p}}) \subset T_{\bar{p}} M_\kappa^n \\ \exp_p \downarrow & & \downarrow \exp_{\bar{p}} \\ M \supset B_r(p) & \xrightarrow{\sim} & B_r(\bar{p}) \subset M_\kappa^n \end{array} \quad \square$$

Man beachte, dass im Beweis dieses Satzes gleich drei unterschiedliche Abschätzungen zusammenkommen (die Spurabschätzung aus Bemerkung 2.17, die Abschätzung des Volumenelementes mit Hilfe der Riccati-Gleichung in Satz 2.18, und die Abschätzung  $s(v) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ , unter anderem

mit Hilfe von Proposition 1.111). Es ist fast ein kleines Wunder, dass alle diese Abschätzungen zusammenpassen.

Kommen wir jetzt zu einer interessanten Anwendung des obigen Satzes, dem Durchmesserstarrheitssatz von Chen. Dieser behandelt wie versprochen den Gleichheitsfall im Satz 2.14 von Bonnet-Myers.

2.21. SATZ (Cheng). *Es sei  $(M, g)$  eine  $n$ -dimensionale, vollständige, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit  $n \geq 2$  und  $\text{ric} \geq (n-1)\kappa g$  für ein  $\kappa > 0$ . Wenn  $\text{diam}(M) \geq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$  gilt, dann ist  $(M, g)$  isometrisch zur runden Sphäre  $M_\kappa^n = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .*

BEWEIS. Setze  $R = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} = \text{diam}(M_\kappa^n)$ . Aus Satz 2.14 folgt  $R = \text{diam}(M)$ . Aus dem Satz 2.20 von Bishop-Gromov folgt

$$\frac{\text{vol}M}{\text{vol}M_\kappa^n} = \frac{\text{vol}B_R(p)}{\text{vol}B_R(\bar{p})} \leq \frac{\text{vol}B_r(p)}{\text{vol}B_r(\bar{p})}$$

für alle  $r$  und alle  $p \in M, \bar{p} \in M_\kappa^n$ .

Da  $M$  kompakt ist, existieren Punkte  $p, q \in M$  mit  $d(p, q) = R$ . Seien  $\bar{p}, \bar{q} \in M_\kappa^n$  Antipoden mit  $d(\bar{p}, \bar{q}) = R$ , dann gilt

$$\emptyset = B_r(p) \cap B_{R-r}(q) = B_r(\bar{p}) \cap B_{R-r}(\bar{q}) .$$

Wir schließen daraus, dass

$$\text{vol}M \geq \text{vol}B_r(p) + \text{vol}B_{R-r}(q) \geq \frac{\text{vol}M}{\text{vol}M_\kappa^n} \underbrace{(\text{vol}B_r(\bar{p}) + \text{vol}B_{R-r}(\bar{q}))}_{=\text{vol}M_\kappa^n} = \text{vol}M .$$

Da in der obigen Ungleichung Gleichheit gilt, ist das Verhältnis  $\frac{\text{vol}B_r(p)}{\text{vol}B_r(\bar{p})}$  von  $r$  unabhängig. Indem wir den Limes  $r \searrow 0$  betrachten, sehen wir, dass  $\text{vol}B_r(p) = \text{vol}B_r(\bar{p})$  für alle  $r$  gilt. Nach dem Satz von Bishop-Gromov sind  $B_r(p)$  und  $B_r(\bar{p})$  für alle  $r \in (0, R)$  isometrisch, aus Stetigkeitsgründen also auch für  $r = R$ . Insbesondere sind auch  $M = \overline{B_R(p)}$  und  $M_\kappa^n = \overline{B_R(\bar{p})}$  isometrisch.  $\square$

### 2.3. Fundamentalgruppe und kürzeste geschlossene Kurven in kompakten Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt wollen wir einige weitere topologische und geometrische Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten positiver Schnittkrümmung herleiten. Dabei nutzen wir aus, dass es in jeder nicht einfach zusammenhängenden kompakten Mannigfaltigkeit immer kürzeste geschlossene Kurven gibt.

2.22. DEFINITION. Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit. Eine *Schleife* in  $M$  ist eine stetige Abbildung  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$  mit  $\gamma(0) = \gamma(1)$ . Zwei Schleifen  $\gamma_0, \gamma_1$  heißen (*frei*) *homotop*, wenn es eine stetige Abbildung  $h: [0, 1]^2 \rightarrow M$  gibt mit

$$h(t, i) = \gamma_i(t) \quad \text{und} \quad h(0, s) = h(1, s)$$

für alle  $s, t \in [0, 1]$  und  $i \in \{0, 1\}$ . Eine Schleife, die zu einer konstanten Schleife frei homotop ist, heißt *zusammenziehbar*.

Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann ist eine geschlossene Geodätische eine Geodätische  $c: [0, 1] \rightarrow M$  mit  $c(0) = c(1)$  und  $\dot{c}(0) = \dot{c}(1)$ .

Diese Definition und das folgende Lemma funktionieren für beliebige topologische Räume.

2.23. LEMMA. *Es sei  $M$  eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit und  $p \in M$ . Dann gibt es eine natürliche Bijektion von freien Homotopieklassen von Schleifen von  $M$  und Konjugationsklassen in der Fundamentalgruppe  $\pi_1(M)$ .*

BEWEIS. Zunächst ist jede Schleife frei homotop zu einer Schleife am Punkt  $p$ . Dazu wähle einen Weg  $\sigma$  von  $\gamma(0) = \gamma(1)$  nach  $p$  und definiere frei homotope Schleifen  $\gamma_s = \sigma|_{[0,s]}^{-1} \gamma \sigma|_{[0,s]}$  für alle  $s \in [0, 1]$ . Dann ist  $\gamma_0 = \gamma$ , und  $\gamma_1$  ist Schleife an  $p$ .

Seien nun  $\gamma_0, \gamma_1$  zwei Schleifen am Punkt  $p$ , und sei  $h: [0, 1]^2 \rightarrow M$  eine freie Homotopie zwischen ihnen. Setze  $\sigma(t) = h(0, t) = h(1, t)$ , dann ist  $\sigma$  eine Schleife an  $p$ , und man kann eine Homotopie  $\bar{h}$  zwischen  $\gamma_1$  und  $\sigma^{-1} \gamma_0 \sigma$  konstruieren. Es folgt, dass  $[\gamma_1] = [\sigma]^{-1} [\gamma_0] [\sigma] \in \pi_1(M, p)$ .

Wenn umgekehrt  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  Elemente ein und derselben Konjugationsklasse von  $\pi_1(M)$  repräsentieren, etwa  $[\gamma_1] = [\sigma]^{-1} [\gamma_0] [\sigma]$ , dann ist  $\gamma_0$  frei homotop zu  $\sigma^{-1} \gamma_0 \sigma$  wie im ersten Schritt des Beweises, und  $\sigma^{-1} \gamma_0 \sigma$  ist homotop zu  $\gamma_1$ .  $\square$

2.24. BEMERKUNG. Sei  $M$  zusammenhängend. Ohne Angabe eines Basispunktes sind Elemente in  $\pi_1(M)$  bis auf Konjugation wohlbestimmt nach Bemerkung 1.129. Wir dürfen also von Konjugationsklassen in  $\pi_1(M)$  sprechen.

Außerdem sehen wir leicht, dass eine Schleife genau dann zusammenziehbar ist, wenn sie frei zusammenziehbar ist. Wir dürfen hier also den Zusatz „frei“ weglassen.

Wir geben ein nützliches Kriterium dafür an, dass eine Schleife nicht zusammenziehbar ist. Dazu beweisen wir jetzt doch noch einen wichtigen Satz über Überlagerungen.

2.25. SATZ (Homotopieliftungssatz). *Es sei  $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$  eine Überlagerung, es seien  $\tilde{F}: N \rightarrow \tilde{M}$  und  $H: N \times [0, 1] \rightarrow M$  stetige Abbildungen mit  $(\pi \circ \tilde{F})(p) = H(p, 0)$  für alle  $p \in N$ .*

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\tilde{F}} & \tilde{M} \\ \downarrow \times \{0\} & & \downarrow \pi \\ N \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & M. \end{array}$$

Dann existiert genau eine stetige Abbildung  $\tilde{H}: N \times [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$  mit  $\pi \circ \tilde{H} = H$  und  $\tilde{H}(p, 0) = \tilde{F}(p)$ .

BEWEIS. Wir betrachten zunächst  $p \in N$ . Zu jedem  $t \in [0, 1]$  existiert eine gleichmäßig überlagerte Umgebung  $U$  von  $H(p, t) \in M$  wie in Definition 1.116; insbesondere gilt also  $\pi^{-1}(U) \cong U \times X$  für eine diskrete Menge  $X$ . Da  $[0, 1]$  kompakt ist, existieren endlich viele  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ , gleichmäßig überlagerte offene Mengen  $U_i$  und diskrete Mengen  $X_i$ , so dass

$$H(p, t) \in U_i \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq k \text{ und } t \in [t_{i-1}, t_i]$$

und  $\pi^{-1}(U_i) = U_i \times X_i$ . Wegen Stetigkeit von  $H$  und Kompaktheit von  $[0, 1]$  existiert eine zusammenhängende Umgebung  $V$  von  $p$ , so dass

$$H(q, t) \in U_i \quad \text{für alle } q \in V, \text{ alle } 1 \leq i \leq k \text{ und alle } t \in [t_{i-1}, t_i].$$

Wegen Stetigkeit von  $\tilde{F}$  ist die zusammengesetzte Abbildung

$$V \xrightarrow{\tilde{F}} \pi^{-1}(U_1) \xrightarrow{\sim} U_1 \times X_1 \longrightarrow X_1$$

konstant, da  $V$  zusammenhängend ist. Sei  $x_1 \in X_1$  der Bildpunkt, dann definieren wir  $\tilde{H}|_{V \times [t_0, t_1]}$  durch

$$\tilde{H}(q, t) = (H(q, t), x_1) \in U_1 \times X_1 \cong \pi^{-1}(U_1) \subset \tilde{M} \quad \text{für alle } q \in V \text{ und alle } t \in [t_0, t_1].$$

Das liefert offensichtlich eine stetige Abbildung.

Wir setzen dieses Verfahren induktiv fort, indem wir  $\tilde{H}$  fortsetzen durch

$$\tilde{H}(q, t) = (H(q, t), f_i) \in U_i \times X_i \cong \pi^{-1}(U_i) \subset \tilde{M} \quad \text{für alle } q \in V \text{ und alle } t \in [t_{i-1}, t_i].$$

Nach endlich vielen Schritten haben wir  $\tilde{H}$  auf  $V \times [0, 1]$  konstruiert.

Diese Konstruktion ist eindeutig, denn sei  $q \in V$ , und sei  $\tilde{H}'$  eine weitere lokale Fortsetzung von  $\tilde{F}$ . Wegen Stetigkeit sind die Abbildungen

$$[t_{i-1}, t_i] \xrightarrow{t \rightarrow (q,t)} N \times [t_{i-1}, t_i] \xrightarrow{\tilde{H}'} \pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times X_i \longrightarrow X_i$$

konstant, und es folgt  $\tilde{H}'(q, t) = \tilde{H}(q, t)$  für alle  $t \in [0, 1]$  nach Induktion über  $i$ .

Da jeder Punkt  $p$  in  $M$  eine geeignete Umgebung  $V$  besitzt, so dass sich  $\tilde{F}|_V$  auf  $V \times [0, 1]$  fortsetzen lässt, und je zwei solche Fortsetzungen auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich übereinstimmen, können wir  $\tilde{H}$  also auch global definieren, und zwar auf genau eine Weise.  $\square$

2.26. FOLGERUNG. *Jede Schleife  $\gamma$  in  $M$  am Punkt  $p$  lässt sich zu einem Weg  $\tilde{\gamma}$  in  $\tilde{M}$  liften, wobei  $\tilde{\gamma}(0) \in \pi^{-1}(p)$  beliebig gewählt werden kann.*

BEWEIS. In der Notation von Satz 2.25 ist  $N = \{p\}$  ein Punkt,  $H = \gamma$  und der Anfangspunkt  $\tilde{p} \in \tilde{M}$  ist das Bild von  $p$  unter  $\tilde{F}$ .  $\square$

2.27. FOLGERUNG. *Sei  $M$  eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit universeller Überlagerung  $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ . Sei  $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$  ein Weg, dessen Bild  $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$  eine Schleife in  $M$  ist, d.h., es gilt  $\pi\tilde{\gamma}(0) = \pi\tilde{\gamma}(1)$ . Dann ist  $\gamma$  genau dann in  $M$  zusammenziehbar, wenn  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1)$ .*

BEWEIS. Übung.  $\square$

2.28. LEMMA. *Es sei  $(M, g)$  eine kompakte, zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Dann gilt*

- (1) *Jede Schleife  $\gamma$  der Länge  $L(\gamma) < 2\rho(M)$  ist zusammenziehbar.*
- (2) *Jede freie Homotopieklasse nicht zusammenziehbarer Schleifen wird durch eine kürzeste geschlossene Geodätische realisiert.*

BEWEIS. Zu (1) sei  $p = \gamma(0)$ . Für den Injektivitätsradius gilt  $\rho(p) \geq \rho(M)$ . Wie im Beweis von Folgerung 1.91 verläuft eine Schleife der Länge  $L(\gamma) < 2\rho(M)$  ganz in  $B_{\rho(p)}(p)$ , und wir erhalten eine Homotopie

$$h(t, s) = \exp_p(s \exp_p^{-1}(\gamma(t))) .$$

Zu (2) sei  $\gamma$  eine beliebige nicht zusammenziehbare Schleife, dann setze

$$\ell = \inf \{ L(\gamma') \mid \gamma' \text{ ist frei homotop zu } \gamma \} .$$

Wegen (1) gilt  $\ell \geq 2\rho(M)$ . Wir können eine Folge glatter, zu  $\gamma$  frei homotoper Schleifen  $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$  mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} L(\gamma_i) = \ell$$

wählen; diese seien o.B.d.A. proportional zur Bogenlänge parametrisiert. Insbesondere existiert eine Konstante  $C = \max L(\gamma_i)$  mit

$$d(\gamma_i(s), \gamma_i(t)) \leq C \min(|s - t|, 1 - |s - t|)$$

für alle  $i \in \mathbb{N}$  und alle  $s, t \in [0, 1]$ .

Wir haben also eine Familie gleichgradig stetiger Abbildung in ein Kompaktum  $M$  gefunden. Nach dem Satz von Arzela-Ascoli existiert ein Häufungspunkt in der  $\mathcal{C}^0$ -Topologie, insbesondere konvergiert eine Teilfolge punktweise gegen eine Schleife  $\gamma_\infty: [0, 1] \rightarrow M$  mit

$$d(\gamma_\infty(s), \gamma_\infty(t)) = \ell \min(|s - t|, 1 - |s - t|)$$

für alle  $i \in \mathbb{N}$  und alle  $s, t \in [0, 1]$ . Da diese Schleife lokal kürzeste Verbindung ihrer Punkte ist, ist sie eine Geodätische. Da dies auch über den Punkt  $\gamma_\infty(0) = \gamma_\infty(1)$  hinweg gilt, ist  $\gamma$  geschlossen.

Um zu zeigen, dass  $\gamma_\infty$  frei homotop zu  $\gamma$  ist, wähle zunächst  $i$  so groß, dass

$$d(\gamma_\infty(t), \gamma_i(t)) < \rho(M)$$



für alle  $t \in [0, 1]$ . Dann existiert eine Homotopie durch kürzeste verbindende Geodätische, d.h., wir definieren  $h: [0, 1]^2 \rightarrow M$  durch

$$h(t, s) = \exp_{\gamma_\infty(t)}(s \exp_{\gamma_\infty(t)}^{-1}(\gamma_i(t))) .$$

Damit ist  $\gamma_\infty$  frei homotop zu  $\gamma_i$ , und somit auch zum ursprünglichen  $\gamma$ . □

2.29. BEMERKUNG. Mit dem obigen Lemma und dem Satz 2.11 von Hadamard-Cartan lässt sich leicht zeigen, dass jede kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung  $K \leq 0$  geschlossene Geodätische trägt (Übung).

Als nächstes definieren wir den Begriff der Orientierung, den wir für die folgenden Resultate benötigen.

2.30. DEFINITION. Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Zwei Karten  $\varphi, \psi$  von  $M$  heißen *gleich orientiert*, wenn für alle  $p \in U^\varphi \cap U^\psi$  gilt, dass

$$\det(d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}) > 0 .$$

Ein *orientierter Atlas* von  $M$  ist ein Atlas  $\mathcal{A}$  von  $M$ , in dem je zwei Karten gleich orientiert sind. Falls so etwas existiert, heißt  $M$  *orientierbar*. Zwei orientierte Atlanten von  $M$  heißen *gleich orientiert*, wenn ihre Vereinigung wieder ein orientierter Atlas ist. Die Vereinigung aller zu einem gegebenen Atlas gleich orientierter Atlanten heißt ein *maximaler orientierter Atlas* oder eine *Orientierung* von  $M$ .

Ein lokaler Diffeomorphismus  $F: M \rightarrow N$  zwischen orientierten Mannigfaltigkeiten heißt *Orientierungserhaltend*, wenn für alle Paare orientierter Karten  $\varphi$  von  $M$  und  $\psi$  von  $N$  und alle  $p \in U^\varphi \cap F^{-1}(U^\psi)$  gilt, dass

$$\det(d(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}) > 0 .$$

Jeder Tangentialraum  $T_p M$  lässt sich auf zwei Weisen orientieren, und eine Orientierung wählt in stetiger Weise an jedem Punkt eine dieser beiden Orientierungen aus; sie besteht aus allen Basen  $(v_1, \dots, v_n)$  von  $T_p M$ , für die  $(v_1^\varphi, \dots, v_n^\varphi)$  eine positiv orientierte Basis des  $\mathbb{R}^n$  ist.

2.31. DEFINITION. Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Es sei  $o(T_p M)$  die Menge aller Orientierungen von  $T_p M$ , dann heißt

$$\pi: o(TM) = \bigcup_{p \in M} o(T_p M) \rightarrow M \quad \text{mit} \quad (p, o) \mapsto p$$

die *Orientierungsüberlagerung* von  $M$ .

Eine Schleife  $\gamma$  in  $M$  heißt *orientierbar*, wenn sie sich zu einer Schleife in  $o(TM)$  liften lässt.

2.32. BEMERKUNG. Sei  $M$  differenzierbare Mannigfaltigkeit, und sei  $\pi: o(TM) \rightarrow M$  die Orientierungsüberlagerung.

- (1) Zunächst einmal lässt sich  $o(TM)$  tatsächlich auf natürliche Weise als eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, und  $\pi$  als eine zweiblättrige Überlagerung von  $M$  auffassen. Sei etwa  $\varphi$  eine Karte von  $M$ , dann induziert  $\varphi$  für alle  $p \in U^\varphi$  eine Orientierung  $o_p^\varphi$  auf  $T_p M$ , so dass  $d_p \varphi: T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$  orientierungserhaltend ist. Es sei  $-o_p^\varphi$  die dazu entgegengesetzte Orientierung von  $T_p M$ , dann folgt

$$U^\varphi \times \{1, -1\} \cong \pi^{-1}(U^\varphi) \quad \text{mit} \quad (p, \pm 1) \mapsto \pm o_p^\varphi \in o(T_p M) .$$

Seien  $\varphi, \psi$  Karten, und sei  $W$  eine Zusammenhangskomponente von  $U^\varphi \cap U^\psi$ . Wenn  $\varphi$  und  $\psi$  in einem Punkt  $p \in W$  gleich (verschieden) orientiert sind, gilt das auf ganz  $W$ ,



Da  $\det P_c > 0$ , ist die Anzahl der Einträge  $-1$  gerade, da  $\dim T_p M$  gerade ist, also auch die Anzahl der Einträge  $1$ . Nun ist aber  $v = \dot{c}(0)$  ein Eigenvektor, also gibt es einen weiteren Eigenvektor  $w \perp v$  zum Eigenwert  $1$ .

Wir setzen  $w$  zu einem parallelen Vektorfeld  $W \in \mathfrak{X}'(c)$  längs  $c$  fort. Da  $P_c(w) = w$ , folgt  $W(0) = W(\ell)$ . Sei nun  $c_s$  eine Variation von  $c$  mit Variationsvektorfeld  $W$ . Da  $c$  geschlossene Geodätische ist, folgt

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} L(c_s) = 0 .$$

Die zweite Variationsformel aus Satz 1.87 liefert

$$\left. \frac{d^2}{ds^2} \right|_{s=0} L(c_s) = \int_0^\ell \left( \underbrace{\|\dot{W}(t)\|^2}_{=0} - \underbrace{K(\text{span}\{\dot{c}(t), W(t)\})}_{>0} \|\dot{c}(t)\|^2 \|W(t)\|^2 \right) dt < 0 .$$

Insbesondere ist die geschlossene Geodätische  $c$  nicht die kürzeste Kurve in ihrer freien Homotopieklasse. Nach Lemma 2.23 gibt es aber in jeder freien Homotopieklasse nicht zusammenziehbarer Schleifen eine kürzeste geschlossene Geodätische. Folglich kann es keine nicht zusammenziehbaren, orientierbaren Schleifen in  $M$  geben.  $\square$

2.34. BEMERKUNG. Man sieht leicht, dass  $\mathbb{R}P^n$  genau dann orientierbar ist, wenn  $n$  ungerade ist. Die Linsenräume aus Beispiel 1.138 zeigen, dass im ungerade-dimensionalen Fall die Fundamentalgruppe zwar endlich ist wegen des Satzes 2.14 von Bonnet-Myers, aber beliebig viele Elemente enthalten kann.

Auf die Voraussetzung  $K > 0$  kann man nicht verzichten: Indem man das Riemannsche Produkt eines der obigen Beispiele mit  $S^1$  oder  $\mathbb{R}P^2$  bildet, erhält man Gegenbeispiele, in denen allerdings nur noch  $K \geq 0$  gilt.

Wir wollen das obige Argument zu einer unteren Abschätzung für den Injektivitätsradius ausbauen. Im Gegensatz zum Satz von Bonnet-Myers erhalten wir dadurch eine untere Schranke für die Größe der Mannigfaltigkeit. Zunächst einige Vorüberlegungen.

2.35. PROPOSITION. *Es sei  $(M, g)$  kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann existiert entweder eine geschlossene Geodätische der Länge  $2\rho(M)$ , oder Punkte  $p, q \in M$  und eine kürzeste Geodätische von  $p$  nach  $q$  der Länge  $\rho(M)$ , entlang der  $p$  zu  $q$  konjugiert ist.*

BEWEIS. Es gilt  $\rho = \rho(M, g) = \inf_{v \in SM} s(v)$ , und da  $SM$  kompakt ist, wenn  $M$  kompakt ist, wird das Infimum bei einem Vektor  $v \in T_p M$  mit einem Fußpunkt  $p \in M$  angenommen. Es sei  $c_v$  die Geodätische mit Startvektor  $v$  und  $q = c_v(\rho)$ . Falls  $\rho v \in T_p M$  zu  $p$  konjugiert ist, sind wir fertig.

Anderfalls gibt es eine weitere kürzeste Geodätische  $c_w \neq c_v$  von  $p$  nach  $q$  nach einer alten Übung. Falls  $\rho w \in T_p M$  zu  $p$  konjugiert ist, sind wir wieder fertig. Wir wollen zeigen, dass  $c_v$  und  $c_w$  ansonsten gemeinsam eine geschlossene Geodätische bilden. Wäre das nicht so, dann würden sich die beiden Geodätischen in  $p$  oder in  $q$  in einem Winkel  $< \pi$  treffen, etwa in  $q$ . Dann gibt es einen Vektor  $u \in T_q M$  mit

$$\langle \dot{c}_v(\rho), u \rangle < 0 \quad \text{und} \quad \langle \dot{c}_w(\rho), u \rangle < 0 .$$

Nach Voraussetzung ist  $\exp_p$  nahe  $\rho v$  und nahe  $\rho w$  lokal invertierbar. Für kleine  $\varepsilon > 0$  existieren also Kurven  $v, w: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow T_p M$  mit

$$v(0) = v, \quad w(0) = w \quad \text{und} \quad \exp_p(\rho v(s)) = \exp_p(\rho w(s)) = \exp_q(su) .$$

Aus der ersten Variationsformel aus Satz 1.65 folgt

$$\|\rho v(s)\| \leq d(p, \exp_q(su)) < \rho \quad \text{und} \quad \|\rho w(s)\| \leq d(p, \exp_q(su)) < \rho$$

im Widerspruch zur Definition des Injektivitätsradius.

Folglich müssen sich  $c_v$  und  $c_w$  bei  $q$  im Winkel  $\pi$  treffen. Wir vertauschen oben die Rollen von  $p$  und  $q$  und sehen, dass sich  $c_v|_{[0,\rho]}$  und  $c_w|_{[0,\rho]}$  auch bei  $p$  im Winkel  $\pi$  treffen, und daher nach Umparametrisierung eine geschlossene Geodätische der Länge  $2\rho(M)$  bilden.  $\square$

2.36. BEMERKUNG. Die kürzesten geschlossenen Geodätischen auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit heißen auch *Systolen*.

- (1) Der Injektivitätsradius der runden Sphäre ist  $\pi$ . Geodätische zwischen Antipoden können sich in beliebigen Winkeln treffen. Das ist möglich, da Antipoden entlang jeder Geodätischen konjugiert sind.
- (2) Sei  $M$  kompakt mit nichtpositiver Schnittkrümmung. Nach dem Satz 2.11 von Hadamard-Cartan gibt es keine konjugierten Punkte, also wird der Injektivitätsradius stets durch die Systolen realisiert. Da die universelle Überlagerung keine geschlossenen Geodätischen enthält, schließen wir aus Folgerung 2.27, dass die Systolen nicht zusammenziehbar sind, also durch die Fundamentalgruppe bedingt sind.

2.37. SATZ (Klingenberg). *Es sei  $(M, g)$  eine kompakte, orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit gerader Dimension mit Schnittkrümmung  $0 < K \leq \kappa$ . Dann gilt*

$$\text{diam}(M) \geq \rho(M) \geq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}.$$

BEWEIS. Wir nehmen an, dass  $R := \rho(M) < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$  gilt. Nach dem Satz 2.5 von Rauch ist  $\exp_p$  für alle  $p$  auf ganz  $\overline{B_R(0_p)}$  lokal invertierbar. Nach Proposition 2.35 wird der Injektivitätsradius also durch eine geschlossene Geodätische  $c: [0, 1] \rightarrow M$  der Länge  $2R$  repräsentiert.

Wie im Beweis des Lemmas 2.33 von Synge existiert eine Variation von  $c$  durch Schleifen  $c_s$  mit  $c_0 = c$ , die für  $0 \neq s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  kürzer als  $c$  sind. Insbesondere gilt  $d(c_s(0), c_s(t)) < R = \rho(M)$  für alle  $s \neq 0$  und alle  $t \in [0, 1]$ . Nach Folgerung 1.115 existiert eine Abbildung

$$\Phi: [0, 1] \times ((-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}) \rightarrow \{v \in TM \mid \|v\| < R\} \quad \text{mit} \quad (\pi \times \exp)(\Phi(t, s)) = (c_s(0), c_s(t)).$$

Da die Abbildung  $\pi \times \exp$  auf der kompakten Menge  $\{v \in TM \mid \|v\| \leq R\}$  wegen  $R < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$  lokal invertierbar ist, existiert eine Konstante  $C$  mit

$$\|(d_v \exp^{-1})(w)\| \leq C \|w\| \quad \text{für alle } v \in TM \text{ mit } \|v\| \leq R \text{ und alle } w \in T_{\exp(v)}M.$$

Andernfalls gäbe es eine Folge von Vektoren  $u_i \in T_{p_i}M \subset T_{v_i}TM$  mit  $\|v_i\| \leq R$ ,  $\|u_i\| = 1$  und  $\|(d_{v_i} \exp)(u_i)\| \rightarrow 0$  für  $i \rightarrow \infty$ , diese Folge hätte wegen Kompaktheit einen Grenzwert  $u_\infty \in T_{v_\infty}M$  mit  $\|v_\infty\| \leq R$ ,  $\|u_\infty\| = 1$  und  $(d_{v_\infty} \exp)(u_\infty) = 0$  im Widerspruch zur lokalen Invertierbarkeit.

Hieraus folgt

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, s) \right\| \leq C \|\dot{c}_s(t)\| \leq C' < \infty$$

für alle  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$  und alle  $t \in [0, 1]$ , da auch  $\|\dot{c}_s(t)\|$  für  $s \in [-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]$  universell beschränkt ist. Nach Arzela-Ascoli konvergiert eine Folge von Kurven  $\Phi(\cdot, s_i)$  für  $s_i \rightarrow 0$  gegen eine geschlossene Kurve  $\varphi: [0, 1] \rightarrow T_pM$  mit  $\exp_p \circ \varphi = c$ .

Das steht im Widerspruch dazu, dass  $\varphi$  als Lift einer Geodätischen mit  $\varphi(0) = 0_p$  durch eine radiale Gerade gegeben sein muss. Hieraus folgt  $\rho(M) \geq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ , und die Aussage  $\text{diam}(M) \geq \rho(M)$  sollte klar sein.  $\square$

2.38. BEMERKUNG. Die runde Sphäre zeigt, dass Gleichheit möglich ist. Insbesondere ist obiger Satz in gewissem Sinne komplementär zum Satz 2.14 von Bonnet-Myers. Insgesamt gilt für geradedimensionale, orientierbare Mannigfaltigkeiten also

$$0 < \kappa_0 \leq K \leq \kappa_1 \quad \implies \quad \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_1}} \leq \rho(M, g) \leq \text{diam}(M, g) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_0}}.$$

Es gibt keine interessante Starrheitsaussage. Beispielsweise erfüllt  $\mathbb{C}P^n$  für  $n \geq 2$  die Krümmungsbedingung  $1 \leq K \leq 4$ , und es gilt  $\rho(\mathbb{C}P^n) = \text{diam}(\mathbb{C}P^n) = \frac{\pi}{2}$ .

Die Bedingung  $K > 0$  ist nötig, um das Lemma 2.33 anwenden zu können. Für  $K = 0$  beispielsweise kann man Tori mit beliebig kleinem Injektivitätsradius konstruieren.

Die Linsenräume aus Beispiel 1.138 zeigen, dass die Abschätzung im ungerade-dimensionalen Fall nicht möglich ist, denn ihr Injektivitätsradius  $\frac{\pi}{p}$  wird für große  $p$  beliebig klein.

## 2.4. Der Winkelvergleichssatz von Toponogov

In diesem Kapitel beweisen wir, dass Winkel beliebiger Dreiecke mit kürzesten Seiten in vollständigen Mannigfaltigkeiten der Schnittkrümmung  $K \geq \kappa$  nie kleiner sind als die eines Vergleichsdreiecks mit gleichen Längen in  $M_\kappa^n$ . Für kleine Dreiecke haben wir einen ähnlichen Satz als Übung aus der Folgerung 2.8 aus dem Satz von Rauch hergeleitet. Die Verallgemeinerung auf beliebige Dreiecke erfordert wieder ein paar globale Überlegungen. Wir werden sie am Ende des Abschnitts benutzen, um von manchen Mannigfaltigkeiten zu beweisen, dass sie homöomorph zur Sphäre sind.

2.39. DEFINITION. Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ein (*geodätisches*) *Dreieck*  $\Delta_{c_1 c_2 c_3}$  in  $M$  besteht aus drei Geodätischen  $c_1, c_2, c_3: [0, 1] \rightarrow M$  mit den *Eckpunkten*  $p_{i+2} := c_i(1) = c_{i+1}(0) \in M$ , wobei Indizes modulo 3 betrachtet werden. Es hat die *Seitenlängen*  $\ell_i$  und die *Winkel*  $\gamma_i \in [0, \pi]$  mit

$$\ell_i = L(c_i) = \|\dot{c}_i\| \quad \text{und} \quad \gamma_i = \angle_{p_i}(-\dot{c}_{i+1}(1), \dot{c}_{i+2}(0)) .$$

Ein *geodätisches Dreieck*  $\Delta_{c_1 c_2 c_3}$  heißt *minimal* oder *kürzestes*, wenn  $\ell_i = d(p_{i+1}, p_{i+2})$  für alle  $i$ .

- 2.40. BEMERKUNG. (1) Es reicht im allgemeinen selbst bei einem kürzesten Dreieck nicht, nur die Eckpunkte  $p_1, p_2, p_3$  anzugeben, da es zwischen ihnen mehrere kürzeste Geodätische geben kann.  
 (2) In einem kürzesten Dreieck gilt die Dreiecksungleichung  $\ell_i \leq \ell_{i+1} + \ell_{i+2}$ , in einem beliebigen geodätischen Dreieck kann sie aber verletzt sein.

In der Elementargeometrie kann man kürzeste Dreiecke in den Räumen  $M_\kappa^n$  für  $\kappa \in \{1, 0, -1\}$  betrachten. Für beliebige  $\kappa$  behelfen wir uns mit Skalierungsüberlegungen wie im Beweis von Proposition 1.134; den Seitencosinussatz in  $M_\kappa^n$  haben wir in den Übung 1 von Blatt 13 kennengelernt.

Wir formulieren jetzt den Satz von Toponogov, der einen älteren Satz von Alexandrov verallgemeinert. Größen im Vergleichsdreieck in  $M_\kappa^n$  werden mit dem gleichen Symbol bezeichnet wie die entsprechenden Größen im Originaldreieck in  $M$  und zusätzlich mit einem Querstrich versehen.

2.41. SATZ (Alexandrov, Toponogov). *Es sei  $(M, g)$  vollständige Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung  $K \geq \kappa$ , und es sei  $\Delta_{c_1 c_2 c_3}$  ein Dreieck in  $M$  mit kürzesten Seiten  $c_1$  und  $c_2$ , und mit  $\ell_3 \leq \ell_1 + \ell_2$ , und  $\ell_3 \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$  falls  $\kappa > 0$ . Dann existiert ein Vergleichsdreieck  $\Delta_{\bar{c}_1 \bar{c}_2 \bar{c}_3}$  in  $M_\kappa^n$  mit den gleichen Seitenlängen  $\bar{\ell}_i = \ell_i$  und Winkeln  $\bar{\gamma}_1 \leq \gamma_1$  und  $\bar{\gamma}_2 \leq \gamma_2$ .*

Im Falle  $\kappa > 0$  folgt wegen Bemerkung 2.43 unten insbesondere  $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 \leq \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ , da es sonst kein Vergleichsdreieck gäbe. Wenn alle drei Seiten kürzeste Geodätische sind und das Vergleichsdreieck bis auf Isometrie eindeutig bestimmt ist, erhalten wir offensichtlich auch noch  $\bar{\gamma}_3 \leq \gamma_3$ .

2.42. BEISPIEL. Wir betrachten Beispiele von Dreiecken, um die obige Aussage zu verstehen.

- (1) Auf dem Zylinder  $\mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \times \{0\})$  betrachte ein Dreieck mit den Eckpunkten  $p_1 = [x_1, y_1]$ ,  $p_2 = [x_2, y_2]$  und  $p_3 = [0, 0]$  mit  $0 < x_1 < x_2$  und  $x_1, x_2 - x_1$  und  $1 - x_2 < \frac{1}{2}$ . Dann ist die Seite  $c_1$  von  $p_2$  nach  $p_3$  kürzer als die eines Dreiecks mit den gleichen Koordinaten in  $\mathbb{R}^2$ , folglich ist der Winkel im Vergleichsdreieck kleiner, und das selbst bei konstanter

Schnittkrümmung  $K = \kappa$ . Wir können also nicht wie im Satz 2.5 von Rauch die Ungleichungszeichen bei Voraussetzung und Abschätzung umdrehen. Für „kleine“ Dreiecke gilt so eine Abschätzung immerhin, siehe Übungen.

- (2) Wir wollen jetzt nur noch verlangen, dass  $c_1$  und  $c_2$  kürzeste Geodätische sind. Dazu betrachten wir etwa auf  $\mathbb{R}P^2$  ein Dreieck, das sich auf  $S^2$  wie folgt beschreiben lässt. Wähle auf dem Äquator zwei Punkte  $p_1, p_2$  im Abstand  $d < \frac{\pi}{2}$ . Es sei  $p_3$  ein Punkt auf der Nordhalbkugel mit

$$\frac{\pi - d}{2} < d(p_1, p_3) = d(p_2, p_3) < \frac{\pi}{2}.$$

Wir betrachten die Bilder dieser Punkte in  $\mathbb{R}P^2$  und wählen für  $c_1, c_2$  die jeweils kürzesten Geodätischen, für  $c_3$  hingegen die Geodätische der Länge  $\pi - d$ . Dann sind die Winkel  $\gamma_1, \gamma_2$  stumpf. Im Vergleichsdreieck können die Winkel  $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2$  beliebig klein werden für  $d(p_1, p_3) = d(p_2, p_3) \rightarrow \frac{\pi - d}{2}$ . Auf der anderen Seite kann es passieren, dass  $\bar{\gamma}_3 > \gamma_3$ . Wir werden sehen, dass das daran liegt, dass  $c_3$  keine kürzeste Geodätische ist.

- (3) Es sei jetzt  $M = S^n = M_\kappa^n$  die runde Sphäre mit  $K = \kappa = 1$ . Es seien  $p_2$  und  $p_3 = -p_2$  Antipoden und  $p_1 \in S^n$  ein beliebiger weiterer Punkt. Dann bilden die Seiten  $c_2$  und  $c_3$  zusammen einen Halbkreisbogen, insbesondere gilt  $\gamma_1 = \pi$ . Für  $c_1$  dürfen wir einen beliebigen Halbkreisbogen zwischen  $p_2$  und  $p_3$  wählen, dann folgt  $\gamma_2 = \gamma_3$  und  $\ell_1 = \pi = \ell_2 + \ell_3$ . Jede andere Wahl von  $c_1$  liefert ein Vergleichsdreieck, dessen Winkel bei  $p_2, p_3$  durchaus kleiner als  $\gamma_2 = \gamma_3$  werden können. Wir werden also im Satz von Toponogov bei der Wahl des Vergleichsdreiecks unter Umständen etwas aufpassen müssen.
- (4) Die Bedingung  $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 \leq \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$  impliziert zusammen mit den Dreiecksungleichungen, dass das Vergleichsdreieck ein kürzestes Dreieck ist, siehe Bemerkung 2.43 unten. Das folgende Beispiel zeigt, warum das nötig ist. Es sei  $\kappa = 1$ , und es sei  $M$  eine runde Sphäre von etwas kleinerem Radius  $r < 1$ , so dass  $K > 1 = \kappa$ . Wir wählen ein kleines Dreieck in  $M$  und ersetzen die Seite  $c_3$  durch den langen Großkreisbogen, dieses Dreieck hat als dritte Seitenlänge also  $\ell'_3 = 2\pi r - \ell_3$ . Als Vergleichsdreieck in  $S^2$  erhalten wir ebenfalls ein Dreieck mit einer überlangen Seite  $\bar{\ell}_3$ . Das zugehörige kleine Dreieck hat demnach  $\bar{\ell}_3 = \ell_3 + 2\pi(1 - r)$ . Es ist nicht schwer, Beispiele zu finden, bei denen  $\bar{\gamma}_1 > \gamma_1$  und  $\bar{\gamma}_2 > \gamma_2$  gilt.

2.43. BEMERKUNG. Den meisten elementargeometrischen Überlegungen hier liegt der Seitencosinussatz für  $M_\kappa^n$  zugrunde. Im Dreieck  $\Delta_{\bar{c}_1 \bar{c}_2 \bar{c}_3}$  in  $M_\kappa^n$  gilt je nachdem, ob  $\kappa > 0$ ,  $\kappa = 0$  oder  $\kappa < 0$ , dass

$$\begin{aligned} \cos(\sqrt{\kappa} \bar{\ell}_3) &= \cos(\sqrt{\kappa} \bar{\ell}_1) \cos(\sqrt{\kappa} \bar{\ell}_2) + \sin(\sqrt{\kappa} \bar{\ell}_1) \sin(\sqrt{\kappa} \bar{\ell}_2) \cos \bar{\gamma}_3, \\ \bar{\ell}_3^2 &= \bar{\ell}_1^2 + \bar{\ell}_2^2 - 2 \bar{\ell}_1 \bar{\ell}_2 \cos \bar{\gamma}_3, \end{aligned}$$

$$\text{bzw.} \quad \cosh(\sqrt{-\kappa} \bar{\ell}_3) = \cosh(\sqrt{-\kappa} \bar{\ell}_1) \cosh(\sqrt{-\kappa} \bar{\ell}_2) - \sinh(\sqrt{-\kappa} \bar{\ell}_1) \sinh(\sqrt{-\kappa} \bar{\ell}_2) \cos \bar{\gamma}_3.$$

In jedem Fall hängt die Seitenlänge  $\bar{\ell}_3$  bei festgehaltenen Längen  $\bar{\ell}_1$  und  $\bar{\ell}_2$  streng monoton vom Winkel  $\bar{\gamma}_3$  ab, außer im Fall  $\kappa > 0$  und  $\bar{\ell}_1 = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$  oder  $\bar{\ell}_2 = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ .

Wir können ein (kürzestes) Vergleichsdreieck in  $M_\kappa^n$  mit vorgegebenen Seitenlängen  $\bar{\ell}_1, \bar{\ell}_2, \bar{\ell}_3$  im Fall  $\kappa \leq 0$  konstruieren, wenn diese Zahlen alle Dreiecksungleichungen erfüllen. Im Falle  $\kappa > 0$  benötigt man zusätzlich noch die Annahme

$$\bar{\ell}_1 + \bar{\ell}_2 + \bar{\ell}_3 \leq \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}.$$

Aus ihr folgt mit der Dreiecksungleichung auch

$$\bar{\ell}_1 \leq \frac{\bar{\ell}_1 + \ell_2 + \ell_3}{2} \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}, \quad \bar{\ell}_2 \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} \quad \text{und} \quad \bar{\ell}_3 \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}.$$

Das ist sinnvoll, denn kürzeste Geodätische können nicht länger als  $\text{diam } M_\kappa^n = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$  sein. Analog folgt aus

$$\bar{\ell}_1 + \bar{\ell}_2 + \bar{\ell}_3 < \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$$

auch

$$\bar{\ell}_1 < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}, \quad \bar{\ell}_2 < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} \quad \text{und} \quad \bar{\ell}_3 < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}},$$

und in diesem Fall ist das Vergleichsdreieck bis auf Isometrie eindeutig.

Zur Begründung der obigen Behauptung betrachten wir den Fall  $\kappa = 1$ . Falls  $\ell_1 = 0$ , so folgt  $\ell_2 = \ell_3 \in [0, \pi]$ ; falls  $\ell_1 = \pi$ , dann folgt  $\ell_3 = \pi - \ell_2 \in [0, \pi]$ ; analoges gilt, falls  $\ell_2 \in \{0, \pi\}$  oder  $\ell_3 \in \{0, \pi\}$ , alle diese Sonderfälle passen zu den obigen Bedingungen.

Ansonsten seien  $\ell_1, \ell_2 \in (0, \pi)$ , dann können wir das Dreieck  $\Delta \bar{c}_1 \bar{c}_2 \bar{c}_3$  konstruieren, sobald wir den Winkel  $\bar{\gamma}_3$  bestimmt haben. Nach obigem gilt

$$\cos \bar{\gamma}_3 = \frac{\cos \bar{\ell}_3 - \cos \bar{\ell}_1 \cos \bar{\ell}_2}{\sin \bar{\ell}_1 \sin \bar{\ell}_2}.$$

Das ist lösbar, wenn die rechte Seite in  $[-1, 1]$  liegt, wenn also

$$\begin{aligned} \pm(\cos \bar{\ell}_3 - \cos \bar{\ell}_1 \cos \bar{\ell}_2) &\leq \sin \bar{\ell}_1 \sin \bar{\ell}_2, \\ \text{d.h., wenn} \quad \cos(\bar{\ell}_1 + \bar{\ell}_2) &\leq \cos \bar{\ell}_3 \leq \cos(\bar{\ell}_1 - \bar{\ell}_2). \end{aligned}$$

Aufgrund der Symmetrien der Cosinusfunktion und da  $\bar{\ell}_1, \bar{\ell}_2, \bar{\ell}_3 \in [0, \pi]$ , ist die erste Ungleichung äquivalent zu

$$\bar{\ell}_3 \leq \bar{\ell}_1 + \bar{\ell}_2 \quad \text{und} \quad \bar{\ell}_3 \leq 2\pi - \bar{\ell}_1 - \bar{\ell}_2,$$

und die zweite zu

$$\bar{\ell}_3 \geq \bar{\ell}_2 - \bar{\ell}_1 \quad \text{und} \quad \bar{\ell}_3 \geq \bar{\ell}_1 - \bar{\ell}_2,$$

aber das sind genau die oben genannten Bedingungen im Falle  $\kappa = 1$ .

Wir beginnen mit einigen Hilfsaussagen, bevor wir weiter unten den Satz beweisen.

2.44. BEMERKUNG. Es sei  $(M, g)$  vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $K \subset M$  kompakt und  $r > 0$ . Wir erinnern uns an die Taylorentwicklung der Metrik  $g^{\exp_p^{-1}}$  in Normalkoordinaten um  $p$  aus Proposition 1.85. Für  $p \in K$  und  $v, w \in T_p M$  mit  $0 < \|v\| \leq r$  betrachte den Ausdruck

$$\frac{\|d_v \exp_p w\| - \|w\|}{\|v\|^2 \|w\|} = \frac{\left| \sqrt{g_v^{\exp_p^{-1}}(w, w)} - \|w\| \right|}{\|v\|^2 \|w\|} = \frac{\|w\| \sqrt{1 + O(v^2)} - \|w\|}{\|v\|^2 \|w\|} = O(\|v\|^0)$$

für kleine  $v$ ; dieser Ausdruck ist also auch für sehr kleine  $v$  beschränkt.

Aufgrund der Kompaktheit der Menge

$$\{ (p, v) \in TM \mid p \in K, v \in T_p M \text{ mit } \|v\| \leq r \}$$

existiert also eine Zahl  $\vartheta$  mit

$$\| \|d_v \exp_p w\| - \|w\| \| \leq \vartheta \|v\|^2 \|w\|$$

für alle  $p \in K$  und  $v, w \in T_p M$  mit  $\|v\| \leq r$ . Daraus schließen wir folgendes.

(1) Für alle  $0 < \varepsilon \leq r$ , alle  $p \in K$  und alle Kurven  $\gamma: [0, 1] \rightarrow B_\varepsilon(0_p)$  gilt

$$|L(\exp_p \circ \gamma) - L(\gamma)| \leq \varepsilon^2 \vartheta L(\gamma).$$

Dazu integrieren wir obige Abschätzung über  $\gamma$ .

(2) Es sei  $p \in M$  und  $q_i$  eine Folge von Punkten in  $M$ , die gegen  $p$  konvergiert, und es seien  $v_i, w_i \in T_{q_i}M$  Folgen von Vektoren, die für  $i \rightarrow \infty$  gegen  $0_p$  konvergieren. Dann folgt

$$d(\exp_{q_i}(v_i), \exp_{q_i}(w_i)) = \|v_i - w_i\|_{q_i} (1 + O((\|v_i\| + \|w_i\|)^2)),$$

indem wir (1) zum einen auf die Strecke von  $v_i$  nach  $w_i$  in  $T_{q_i}M$  anwenden, und zum anderen auf die kürzeste Verbindung in  $M$ , die einen Ball um  $q_i$  mit Radius  $\|v_i\| + \|w_i\|$  nicht verlässt, siehe Bemerkung 2.10. Mit der dritten binomischen Formel folgt auch

$$d(\exp_{q_i}(v_i), \exp_{q_i}(w_i))^2 = \|v_i - w_i\|_{q_i}^2 (1 + O((\|v_i\| + \|w_i\|)^2)).$$

**2.45. PROPOSITION.** *Es sei  $\Delta c_1 c_2 c_3$  ein Dreieck in  $M$  mit einer kürzesten Seite  $c_2$ , wobei  $p_3$  nicht auf der Seite  $c_3$  liege. Es sei  $t_i \in (0, 1)$  eine Folge mit  $t_i \searrow 0$  für  $i \rightarrow \infty$ , es seien  $b_i: [0, 1] \rightarrow M$  kürzeste Geodätische von  $p_3$  nach  $q_i = c_3(t_i)$ , und es sei  $\alpha_i$  der Winkel bei  $q_i$  im Dreieck  $\Delta c_1 b_i c_3|_{[t_i, 1]}$ . Dann konvergiert die Folge  $\alpha_i$  gegen einen Winkel  $\alpha_\infty \leq \gamma_1$ .*

Auf der anderen Seite können die einzelnen  $\alpha_i$  durchaus größer sein als der Winkel  $\gamma_1$ , wie man an einem Bild leicht erkennt.

**BEWEIS.** Es reicht zu zeigen, dass kein Häufungspunkt  $\alpha_\infty$  der Folge  $\alpha_i$  größer als  $\gamma_1$  ist. Sei etwa  $\alpha_\infty$  ein Häufungspunkt, dann können wir eine Teilfolge  $i_j$  auswählen, so dass die Winkel  $\alpha_{i_j}$  gegen  $\alpha_\infty$  und die Geodätischen  $b_{i_j}$  gegen eine kürzeste Geodätische  $b_\infty$  von  $p_3$  nach  $p_1$  konvergieren. Indem wir  $c_2$  durch  $b_\infty$  ersetzen, sehen wir, dass  $\alpha_\infty$  der größte Häufungspunkt sein muss, aber das gilt natürlich für jeden Häufungspunkt, also kann es nur einen Häufungspunkt geben. Da alle  $\alpha_i$  im kompakten Intervall  $[0, \pi]$  liegen, folgt, dass  $\alpha_i$  gegen  $\alpha_\infty$  konvergiert.

Wir fixieren eine große Konstante  $1 \ll \tau \in \mathbb{R}$ . Für  $i \rightarrow \infty$  konvergiert  $L(b_i) \rightarrow \ell_2 > 0$  und  $q_i \rightarrow p_1$ , folglich gilt  $\tau d(p_1, q_i) \leq L(b_i)$  für alle hinreichend großen  $i$ . Wir konstruieren Punkte

$$\begin{array}{lll} r_i \text{ auf } b_i & \text{mit} & d(r_i, q_i) = \tau d(p_1, q_i) \\ \text{und } s_i \text{ auf } c_2 & \text{mit} & d(s_i, p_1) = d(r_i, p_1). \end{array}$$

Für  $i \rightarrow \infty$  können wir Bemerkung 2.44 (2) auf die Urbilder von  $p_1, r_i$  in  $T_{q_i}M$  unter  $\exp_{q_i}$  anwenden, und erhalten mit dem Cosinussatz der euklidischen Geometrie, dass

$$\begin{aligned} d(p_1, s_i)^2 &= d(p_1, r_i)^2 \\ &= d(p_1, q_i)^2 + d(q_i, r_i)^2 - 2d(p_1, q_i) d(q_i, r_i) \cos(\pi - \alpha_i) + \varepsilon_i d(q_i, r_i)^2 \\ &= d(p_1, q_i)^2 (1 + \tau^2 + 2\tau \cos \alpha_i + \varepsilon_i \tau^2), \end{aligned}$$

wobei  $\varepsilon_i \rightarrow 0$  für  $i \rightarrow \infty$ .

Genauso verfahren wir mit den Urbildern der Punkte  $q_i$  und  $s_i$  in  $T_{p_1}M$  unter  $\exp_{p_1}^{-1}$ , und erhalten

$$\begin{aligned} d(q_i, s_i)^2 &= d(p_1, q_i)^2 + d(p_1, s_i)^2 - 2d(p_1, q_i) d(p_1, s_i) \cos \gamma_1 + \varepsilon'_i d(p_1, s_i)^2 \\ &= d(p_1, q_i)^2 + d(p_1, q_i)^2 (1 + \tau^2 + 2\tau \cos \alpha_i + \varepsilon_i \tau^2) (1 + \varepsilon'_i) \\ &\quad - 2d(p_1, q_i)^2 \cos \gamma_1 \sqrt{1 + \tau^2 + 2\tau \cos \alpha_i + \varepsilon_i \tau^2} \\ &= d(p_1, q_i)^2 (2 + \tau^2 + 2\tau \cos \alpha_i - 2 \cos \gamma_1 \sqrt{1 + \tau^2 + 2\tau \cos \alpha_i + \varepsilon_i \tau^2}), \end{aligned}$$

wobei  $\varepsilon'_i$  und  $\varepsilon''_i$  weitere Nullfolgen sind.



Mehrfaches Anwenden der Dreiecksungleichung liefert

$$\begin{aligned} d(p_1, r_i) + d(r_i, p_3) &\geq d(p_1, p_3) = d(p_1, s_i) + d(s_i, p_3) &\implies d(r_i, p_3) &\geq d(s_i, p_3), \\ d(q_i, s_i) + d(s_i, p_3) &\geq d(q_i, p_3) = d(q_i, r_i) + d(r_i, p_3), \\ \text{also } d(q_i, s_i) &\geq d(q_i, r_i) + d(r_i, p_3) - d(s_i, p_3) \\ &\geq d(q_i, r_i) = \tau d(p_1, q_i). \end{aligned}$$

Wir kombinieren das mit der obigen Gleichung und erhalten

$$d(p_1, q_i)^2 (2 + \tau^2 + 2\tau \cos \alpha_i - 2 \cos \gamma_1 \sqrt{1 + \tau^2 + 2\tau \cos \alpha_i + \varepsilon_i'' \tau^2}) = d(q_i, s_i) \geq \tau^2 d(p_1, q_i)^2.$$

Nach Division durch  $2\tau$  folgt im Limes  $i \rightarrow 0$ , dass

$$\frac{1}{\tau} + \cos \alpha_\infty - \cos \gamma_1 \sqrt{1 + \frac{1}{\tau^2} + \frac{2}{\tau} \cos \alpha_i} \geq 0$$

für alle  $\tau \in \mathbb{R}$ . Im Limes  $\tau \rightarrow \infty$  gilt wegen  $\gamma_i, \alpha_\infty \in [0, \pi]$  also

$$\cos \alpha_\infty \geq \cos \gamma_1 \implies \alpha_\infty \leq \gamma_1. \quad \square$$

2.46. BEMERKUNG. Wir betrachten zwei aneinanderstoßende kürzeste Dreiecke in  $M_\kappa^2$  mit den Eckpunkten  $p, q, s$  beziehungsweise  $q, r, s$ . Es gelte  $d(p, q) + d(q, r) \leq d(p, s) + d(s, r)$ , falls  $\kappa > 0$  auch  $d(p, q) + d(q, r) + d(p, s) + d(s, r) < \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ , und  $\angle pqs + \angle sqr \leq \pi$ . Elementargeometrische Überlegungen liefern folgendes.

- (1) Es gilt auch  $\angle psq + \angle qsr \leq \pi$ . Andernfalls könnte man die Seite  $ps$  über  $s$  hinaus verlängern bis sie die Seite  $qr$  in einem Punkt  $t$  trifft. Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$d(p, s) + d(s, r) \leq d(p, t) + d(t, r) \leq d(p, q) + d(q, r),$$

und Gleichheit würde  $s = q$  implizieren, im Widerspruch zur Annahme.

- (2) Es sei  $r' \in M_\kappa^2$  ein Punkt mit  $d(r', s) = d(r, s)$  und  $d(r', p) = d(p, q) + d(q, r)$ . Dann gilt  $\angle qps \geq \angle r'ps$  und  $\angle qrs \geq \angle pr's$ . Um die erste Aussage zu zeigen, betrachten wir zunächst den Punkt  $r''$  auf der Fortsetzung der Geodätischen durch  $p, q$  mit  $d(q, r'') = d(q, r)$ , mithin  $d(p, r'') = d(p, r')$ . Aus dem Seitencosinussatz und der Voraussetzung an die Winkel bei  $q$  folgt  $d(r'', s) \geq d(r, s)$ . Wiederum aus dem Seitencosinussatz folgt

$$\angle qps = \angle r''ps \geq \angle r'ps.$$

Die zweite Aussage folgt analog, wenn man die Punkte  $p$  und  $r'$  gemeinsam so um  $s$  dreht, dass  $r'$  auf  $r$  zu liegen kommt.

Im Beweis werden die obigen Überlegungen und Proposition 2.45 benutzt, um den Satz von Toponogov von zwei Teildreiecken auf das ganze Dreieck zu übertragen. Dazu sei  $\Delta c_1 c_2 c_3$  wie im Satz gegeben, insbesondere sind  $c_1, c_2$  kürzeste Geodätische. Es sei  $p' = c_3(t)$  für  $t \in (0, 1)$ , es sei  $a'$  eine kürzeste Geodätische von  $p'$  nach  $p_3$ , und es sei  $b'$  Limes einer Folge kürzester Geodätischer von  $p_3$  nach  $c_3(t_i)$ , wobei  $t_i \searrow t$ . Es seien  $\alpha', \beta'$  die Winkel bei  $p'$  in den Dreiecken  $\Delta a' c_2 c_3|_{[0, t]}$  und  $\Delta c_1 b' c_3|_{[t, 1]}$ .

Wir setzen die Vergleichsdreiecke  $\Delta pqs$  und  $\Delta qrs$  in  $M_\kappa^2$  wie oben aneinander. Die obigen Voraussetzungen sind erfüllt, denn nach den Voraussetzungen im Satz 2.41 und Proposition 2.45 gilt

$$\begin{aligned} d(p, q) + d(q, r) &= L(c_3|_{[0, t]}) + L(c_3|_{[t, 1]}) = \ell_3 \leq \ell_1 + \ell_2 = d(r, s) + d(p, s) \\ \text{und } \angle pqs + \angle sqr &\leq \alpha' + \beta' \leq \pi. \end{aligned}$$

Das oben konstruierte Dreieck mit den Ecken  $p, r', s$  ist das Vergleichsdreieck für  $\Delta_{c_1 c_2 c_3}$ . Wenn für  $\Delta_{a' c_2 c_3}|_{[0,t]}$  und  $\Delta_{c_1 b' c_3}|_{[t,1]}$  der Satz von Toponogov gilt, dann folgt aus den obigen Überlegungen insbesondere

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_1 &= \angle r' p s \geq \angle q p s \geq \gamma_1 \\ \text{und} \quad \bar{\gamma}_2 &= \angle p r' s \geq \angle q r s \geq \gamma_2 . \end{aligned}$$

Über die Winkel  $\gamma_3$  und  $\bar{\gamma}_3$  können wir jedoch keine Aussage machen.

Im folgenden Beweis sind alle Kurven durch  $[0, 1]$  parametrisiert, solange nicht anders angegeben. Gelegentlich tritt  $\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$  als obere Schranken für gewisse Größen auf, falls  $\kappa \geq 0$ . Im Fall  $\kappa \leq 0$  werden keine oberen Schranken benötigt. Um den Beweis übersichtlicher zu halten, legen wir hiermit fest, dass  $\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} = \infty$  falls  $\kappa \leq 0$ .

BEWEIS des Satzes 2.41. Im Verlauf des Beweises werden wir der Reihe nach immer „größere“ Dreiecke betrachten.

(a) *Kleine Dreiecke*, vgl. Übung. Es sei  $\Delta_{c_1 c_2 c_3}$  ein Dreieck in  $M$ , so dass ein Vergleichsdreieck  $\Delta_{\bar{c}_1 \bar{c}_2 \bar{c}_3}$  in  $M_\kappa^n$  mit den gleichen Seitenlängen existiert. Es sei  $\Delta_{\bar{c}'_1 \bar{c}'_2 \bar{c}_3}$  in  $M_\kappa^n$  ein weiteres Dreieck mit  $\bar{p}'_1 = \bar{p}_1, \bar{p}'_2 = \bar{p}_2$  und

$$L(\bar{c}'_2) = L(c_2) \quad \text{und} \quad \bar{\gamma}'_1 := \angle_{\bar{p}_1}(-\bar{c}'_2(1), \dot{\bar{c}}_3(0)) = \gamma_1 .$$

Wir nehmen an, dass  $\Delta_{c_1 c_2 c_3}$  in folgendem Sinne *klein* bei  $p_1$  ist: die Seite  $c_1$  ist kürzeste und es existiere eine sternförmige Menge  $U \subset T_{p_1} M$  mit  $-\dot{c}_2(1), \dot{c}_3(0) \in U$ , auf der  $\exp_{p_1}$  lokal invertierbar ist, und eine lineare Isometrie

$$\Phi: T_{p_1} M \rightarrow T_{\bar{p}_1} M_\kappa^n \quad \text{mit} \quad \Phi(-\dot{c}_2(1)) = -\dot{\bar{c}}'_2(1) \quad \text{und} \quad \Phi(\dot{c}_3(0)) = \dot{\bar{c}}_3(0) ,$$

so dass  $\bar{c}'_1$  ganz in  $\exp_{\bar{p}_1}(\Phi(U))$  verläuft. Diese „kleinen“ Dreiecke können bereits bedeutend größer sein als in den Übungen, da hier der konjugierte Radius von  $p_1$  und nicht der Injektivitätsradius die entscheidende Rolle spielt.

Hierzu ist folgendes zu bemerken.

- (1) Nach dem Satz 2.5 von Rauch ist die Entfernung von  $p_1$  auf einer Geodätischen bis zum ersten konjugierten Punkt höchstens so groß wie in  $M_\kappa^n$ . Folglich ist  $\exp_{\bar{p}_1}$  auf  $\Phi(U)$  ebenfalls lokal invertierbar, es folgt

$$U \subset B_{\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}}(0_p) ,$$

was die Ausnahmefälle  $L(\bar{c}'_2) = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$  und  $L(\bar{c}_3) = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$  in Bemerkung 2.43 ausschließt.

- (2) Im Modellraum  $M_\kappa^n$  ist  $\exp_{\bar{p}_1}$  auf  $\Phi(U)$  injektiv, es existiert also eine eindeutige Kurve

$$\exp_{\bar{p}_1}^{-1} \circ \bar{c}'_1: [0, 1] \rightarrow \Phi(U) \subset T_{\bar{p}_1} M_\kappa^n .$$

- (3) Diese Kurve verläuft in dem von  $-\dot{\bar{c}}'_2(1)$  und  $\dot{\bar{c}}_3(0)$  aufgespannten, maximal zweidimensionalen Unterraum von  $T_{\bar{p}_1} M_\kappa^n$ . Insbesondere hängt die Kurve

$$c'_1 = \exp_{p_1} \circ \Phi^{-1} \circ \exp_{\bar{p}_1}^{-1} \circ \bar{c}'_1: [0, 1] \rightarrow M$$

nicht von der Wahl von  $\Phi$  ab.

Im Dreieck  $\Delta_{\bar{c}'_1 \bar{c}'_2 \bar{c}_3}$  gilt wegen Folgerung 2.6, dass

$$L(\bar{c}'_1) \geq L(\exp_{p_1} \circ \Phi^{-1} \circ \exp_{\bar{p}_1}^{-1} \circ \bar{c}'_1) \geq L(c_1) = L(\bar{c}_1) ,$$

denn wir hatten  $c_1$  als kürzeste Geodätische vorausgesetzt. Da bei konstanten Seitenlängen  $L(\bar{c}'_2)$  und  $L(\bar{c}_3)$  die Länge  $L(\bar{c}'_1)$  nach Bemerkung 2.43 streng monoton steigend vom Winkel  $\bar{\gamma}'_1$  bei  $\bar{p}_1$  abhängt, folgt

$$\bar{\gamma}_1 \leq \bar{\gamma}'_1 = \gamma_1 .$$

(b) *Lange, schmale Dreiecke.* Wir betrachten ein Dreieck  $\Delta_{c_1 c_2 c_3}$  in  $M$  vom Umfang

$$L(c_1) + L(c_2) + L(c_3) < \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}.$$

Wie in Proposition 2.45 seien  $q_i = c_3(t_i)$  Punkte mit  $t_i \searrow 0$ , also  $q_i \rightarrow p_1$  für  $i \rightarrow \infty$ . Wir dürfen daher annehmen, dass  $c_3|_{[0,t_i]}$  für alle  $i$  eine kürzeste Geodätische ist. Weiterhin seien  $a_i$  kürzeste Geodätische von  $q_i$  nach  $p_3$ , die wie im Beweis der Proposition 2.45 gegen eine kürzeste Geodätische  $a_\infty$  von  $p_1$  nach  $p_3$  konvergieren. Wir nehmen außerdem an, dass  $a_\infty(t) = c_2(1-t)$  für alle  $t \in [0,1]$ . Denn andernfalls könnten wir  $c_2$  durch  $a_\infty(1-\cdot)$  ersetzen, wodurch der Winkel  $\gamma_1$  nach Proposition 2.45 nicht durch einen größeren Winkel ersetzt wird.

Jetzt wollen wir zeigen, dass für alle hinreichend großen  $i$  alle Winkel im Dreieck  $\Delta_{a_i c_2 c_3}|_{[0,t_i]}$  nicht kleiner sind als die entsprechenden Winkel in einem Vergleichsdreieck mit den gleichen Seitenlängen in  $M_\kappa^n$ . Dabei unterstellen wir insbesondere, dass ein eindeutiges Vergleichsdreieck existiert. Das ist aber der Fall, denn im Dreieck  $\Delta_{c_1 a_i(1-\cdot) c_3}|_{[t,1]}$  sind  $a_i$  und  $c_1$  kürzeste, also gilt die Dreiecksungleichung

$$L(c_3|_{[t,1]}) \geq d(c_3(t), p_2) \geq L(c_1) - L(a_i).$$

Aus der Dreiecksungleichung für das ursprünglich Dreieck  $\Delta_{c_1 c_2 c_3}$  schließen wir

$$\begin{aligned} L(c_3|_{[0,t]}) &= L(c_3) - L(c_3|_{[t,1]}) \leq L(c_1) + L(c_2) - L(c_1) + L(a_i) = L(c_2) + L(a_i) \\ \text{und} \quad L(a_i) + L(c_2) + L(c_3|_{[0,t]}) &\leq L(c_1) + L(c_3|_{[t,1]}) + L(c_2) + L(c_3|_{[0,t]}) < \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}} \end{aligned}$$

falls  $\kappa > 0$ . Die anderen beiden Dreiecksungleichungen folgen wie oben, da  $a_i$  und  $c_2$  kürzeste Geodätische sind. Wegen Bemerkung 2.43 existiert also ein bis auf Isometrie eindeutiges Vergleichsdreieck  $\Delta_{\bar{a}_i \bar{c}_2 \bar{c}'_{3,i}}$  zu  $\Delta_{a_i c_2 c_3}|_{[0,t_i]}$ .

Die Vereinigung  $K$  der Seiten  $c_2$ ,  $c_3$  und aller  $a_i$  ist kompakt, es folgt  $\rho := \inf_{p \in K} \rho(p) > 0$ . Für  $\varepsilon > 0$  klein genug gilt

$$p' := c_2(1-\varepsilon) \in B_{\frac{\rho}{4}}(p_1) \quad \text{und} \quad q'_i := a_i(\varepsilon) \in B_{\frac{\rho}{4}}(q_i).$$

Außerdem konvergiert  $q'_i \rightarrow p'$  für  $i \rightarrow \infty$ . Es sei  $c'_i$  die kürzeste Geodätische von  $p'$  nach  $q'_i$ ; diese ist für alle (hinreichend großen)  $i$  eindeutig.

Da  $c_2$  und alle  $a_i$  kürzeste Geodätische sind, ist  $p'$  wegen Proposition 1.111 längs  $c_2$  weder zu  $p_1$  noch zu  $p_3$  konjugiert, und  $q'_i$  längs  $a$  weder zu  $p_3$  noch zu  $q_i$ . Folglich existiert ein  $\varepsilon' > 0$  mit folgenden Eigenschaften:

- (1) an allen Punkten in  $T_{p'}M$  im Abstand  $< \varepsilon'$  von  $\exp_{p'}^{-1}(c_2)$  ist  $\exp_{p'}$  lokal invertierbar;
- (2) an allen Punkten in  $T_{q'_i}M$  im Abstand  $< \varepsilon'$  von  $\exp_{q'_i}^{-1}(a_i)$  ist  $\exp_{q'_i}$  lokal invertierbar; und
- (3) an allen Punkten in  $T_{p_3}M$  im Abstand  $< \varepsilon'$  von  $\exp_{p_3}^{-1}(c_2|_{[0,1-\varepsilon]} \cup \bigcup_i a_i|_{[\varepsilon,1]})$  ist  $\exp_{p_3}$  lokal invertierbar.

Für alle (hinreichend großen)  $i$  sind daher die folgenden Schlüsse möglich.

Das Dreieck mit den Ecken  $p'$ ,  $q'_i$  und  $p_3$  ist klein um jeden seiner Punkte im Sinne von Schritt (a), folglich sind seine Winkel nicht kleiner als die entsprechenden Winkel in einem Vergleichsdreieck in  $M_\kappa^n$  mit gleichen Seitenlängen. Das gleiche gilt für das Dreieck mit den Ecken  $p_1$ ,  $q'_i$  und  $p'$ . Damit sind nach Bemerkung 2.46 die Winkel bei  $p_1$  und  $p_3$  im Dreieck mit der Seite  $c_2$  und gegenüberliegender Ecke  $q'_i$  ebenfalls nicht kleiner als die entsprechenden Winkel in einem Vergleichsdreieck in  $M_\kappa^n$ .

Dieses Dreieck ist aber auch klein um  $q'_i$  für (hinreichend große)  $i$ , da die Vergleichsdreiecke gegen ein entartetes Dreieck vom Umfang kleiner  $\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$  konvergieren, und daher die Strecke  $\Phi^{-1} \circ \exp_{p_1}^{-1} \bar{c}'_1$  im Beweis von (a) für große  $i$  in einer Teilmenge von  $T_{q'_i}M$  verläuft, auf der  $\exp_{q'_i}$  lokal invertierbar

ist. Also ist auch der Winkel bei  $q'_i$  im Dreieck mit der Seite  $c_2$  und gegenüberliegender Ecke  $q'_i$  ebenfalls nicht kleiner als die entsprechenden Winkel in einem Vergleichsdreieck in  $M_\kappa^n$ .

Schließlich gilt das gleiche auch für das Dreieck mit den Ecken  $p$ ,  $q_i$  und  $q'_i$ . Wieder nach Bemerkung 2.46 sind die Winkel bei  $q'_1$  und  $p_3$  im Dreieck  $\Delta a_1 c_2 c_3|_{[0,t_i]}$  nicht kleiner als die entsprechenden Winkel in einem Vergleichsdreieck in  $M_\kappa^n$ .

Wir können aber auch spiegelbildlich argumentieren, indem wir die Rollen von  $p_1$  und  $q_i$  sowie von  $p'$  und  $q'_i$  vertauschen, und erhalten die entsprechende Aussage dann auch für den Winkel bei  $p_1$ .

Wir fassen zusammen. Sei  $\Delta c_1 c_2 c_3$  ein Dreieck wie im Satz 2.41 und vom Umfang  $< \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ . Dann existiert  $t > 0$  und eine kürzeste Verbindung  $a$  von  $c_3(t)$  nach  $p_3$ , so dass die Winkel bei  $p_1$  und  $p_3$  im Dreieck  $\Delta a c_2 c_3|_{[0,t]}$  nicht kleiner als die entsprechenden Winkel in einem Vergleichsdreieck in  $M_\kappa^n$  mit gleichen Seitenlängen sind.

(c) *Dreiecke von kleinem Umfang.* Wir nehmen wieder an, dass der Umfang von  $\Delta c_1 c_2 c_3$  kleiner als  $\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$  ist, und dass  $c_1$  und  $c_2$  kürzeste Geodätische sind.

Wir wollen die Behauptung des Satzes für den Winkel  $\gamma_1$  beweisen, dazu definieren wir eine Menge

$$I := \left\{ t \in (0, 1] \mid \begin{array}{l} \text{Es gibt eine kürzeste Geodätische } a \text{ von } c_3(t) \text{ nach } p_3, \text{ so dass die Winkel} \\ \text{bei } p_1 \text{ und } c_3(t) \text{ im Dreieck } \Delta a c_2 c_3|_{[0,t]} \text{ nicht kleiner ist als die entsprechen-} \\ \text{den Winkel in einem Vergleichsdreieck in } M_\kappa^n \text{ mit gleichen Seitenlängen.} \end{array} \right\}.$$

Wie in Schritt (b) schließen wir, dass alle Dreiecke  $\Delta a c_2 c_3|_{[0,t]}$  in der Definition von  $I$  tatsächlich eindeutige Vergleichsdreiecke besitzen.

Wegen Schritt (b) ist die Menge  $I$  nicht leer, falls  $c_2(1 - \cdot)$  Limes von kürzesten Verbindungen von  $c_3(t_i)$  nach  $p_3$  für  $t_i \rightarrow 0$  ist. Aber wegen Proposition 2.45 ist diese Voraussetzung nicht nötig, solange uns der Winkel bei  $p_3$  nicht interessiert. Somit ist  $I$  nicht leer.

Es gilt  $\sup I \in I$ , denn für eine geeignete Folge  $t_i \nearrow t_\infty := \sup I$  konvergieren die kürzesten Geodätischen  $a_i$  von  $c_3(t_i)$  nach  $p_3$  gegen eine kürzeste Geodätische  $a_\infty$  von  $c_3(t_\infty)$  nach  $p_3$ . Gleichzeitig konvergieren auch die Seitenlängen und Winkel der Dreiecke  $\Delta a_i c_2 c_3|_{[0,t_i]}$  gegen die des Dreiecks  $\Delta a_\infty c_2 c_3|_{[0,t_\infty]}$ . Insbesondere ist die Dreiecksungleichung im Limes noch erfüllt, und der Umfang bleibt mit dem Argument aus Schritt (b) kleiner als  $\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ , so dass die Vergleichsdreiecke in  $M_\kappa^n$  für  $\Delta a_i c_2 c_3|_{[0,t_i]}$  mit gemeinsamer Seite  $\bar{c}_2$  gegen ein Vergleichsdreieck für  $\Delta a_\infty c_2 c_3|_{[0,t_\infty]}$  konvergieren. Im Limes sind die Winkel bei  $p_1$  und  $c_3(t_\infty)$  ebenfalls nicht kleiner als die Winkel in diesem Vergleichsdreieck.

Wir nehmen an, dass  $t_0 = \sup I < 1$  und wählen eine kürzeste Geodätische  $b$  von  $p_3$  nach  $c_3(t_0)$  als Limes einer Folge kürzester Geodätischer von  $p_3$  nach  $c_3(t'_i)$ , wobei  $t'_i \searrow t_0$ . Dann betrachten wir das Dreieck  $\Delta c_1 b c_3|_{[t_0,1]}$ . Wie oben existiert  $t_1 \in (t_0, 1]$  und eine kürzeste Geodätische  $a$  von  $c_3(t_1)$  nach  $p_3$ , so dass das Dreieck  $\Delta a b c_3|_{[t_0,t_1]}$  die Dreiecksungleichung erfüllt, Umfang  $< \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$  besitzt, und die Winkel bei  $c(t_0)$ ,  $c(t_1)$  nicht kleiner als die entsprechenden Winkel in einem Vergleichsdreieck in  $M_\kappa^n$  mit den gleichen Seitenlängen sind. Wir können also Bemerkung 2.46 anwenden und sehen, dass die Winkel bei  $p_1$  und  $c_3(t_1)$  im Dreieck  $\Delta a c_2 c_3|_{[0,t_1]}$  nicht kleiner sind als die entsprechenden Winkel in einem Vergleichsdreieck in  $M_\kappa^n$  mit den gleichen Seitenlängen.

Der Fall  $\max I < 1$  ist damit zum Widerspruch geführt. Für das Vergleichsdreieck  $\Delta \bar{c}_1 \bar{c}_2 \bar{c}_3$  mit den gleichen Seitenlängen folgt hieraus  $\gamma_1 \geq \bar{\gamma}_1$ , allerdings können wir über  $\gamma_2$  (noch) nichts aussagen. Die entsprechende Aussage für  $\gamma_2$  erhalten wir, indem wir die Rollen von  $p_1$  und  $p_2$  vertauschen, oder mit dem folgenden Argument. Wie oben kann man zeigen, dass es  $t_i \in I$  gibt mit  $t_i < 1$ ,  $t_i \nearrow 1$ , und der Satz gilt für den Winkel  $\gamma'_2$  bei  $p_2$  im Dreieck  $\Delta a_\infty c_2 c_3$ , wobei  $a_\infty$  Häufungspunkt von kürzesten Geodätischen von  $c_3(t_i)$  nach  $p_3$  ist. Wegen Proposition 2.45 gilt der Satz dann auch für  $\Delta c_1 c_2 c_3$ , da  $\gamma_2 \geq \gamma'_2 \geq \bar{\gamma}_2$ .

Also gilt der Satz für alle Dreiecke, die den Voraussetzungen des Satzes genügen und deren Umfang kleiner als  $\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$  ist. Im Falle  $\kappa \leq 0$  trifft das auf jedes Dreieck zu, und der Satz ist bewiesen.

(d) *Dreiecke von großem Umfang.* Ab jetzt gelte also  $\kappa > 0$ . Es sei zunächst  $\Delta c_1 c_2 c_3$  wie im Satz gegeben, und es gelte

$$L(c_1) + L(c_2) + L(c_3) = \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}.$$

Im Falle  $L(c_3) = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$  folgt  $L(c_1) + L(c_2) = L(c_3)$ . Also finden wir ein Vergleichsdreieck  $\Delta \bar{c}_1 \bar{c}_2 \bar{c}_3$  mit  $\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2 = 0$ , und der Satz ist bewiesen. Falls  $\gamma_1 = \gamma_2 = \pi$ , ist der Satz ebenfalls bewiesen, indem man als Vergleichsdreieck einen unterteilten Großkreis wählt.

Andernfalls gilt  $L(c_3) < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$  und o.B.d.A.  $\gamma_1 < \pi$ . Wir wählen eine Folge  $t_i \searrow 0$  und kürzeste Geodätische  $b_i$  von  $p_3$  nach  $c_3(t_i)$ . Wegen Proposition 2.45 dürfen wir annehmen, dass die  $b_i$  gegen  $c_2$  konvergieren. Wegen  $\gamma_1 < \pi$  ist die Dreiecksungleichung im Dreieck mit den Ecken  $p_1$ ,  $c_3(t_i)$  und  $p_3$  für große  $i$  strikt, und wir erhalten

$$L(c_1) + L(b_i) + L(c_3|_{[t_i,1]}) < L(c_1) + L(c_2) + L(c_3|_{[0,t_i]}) + L(c_3|_{[t_i,1]}) = \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}.$$

Somit gilt der Satz für die Dreiecke  $\Delta c_1 b_i c_3|_{[t_i,1]}$ . Außerdem gilt

$$L(c_1) \leq \frac{L(c_1) + L(b_i) + L(c_3|_{[t_i,1]})}{2} < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}.$$

Falls auch  $L(c_2) < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ , so konvergieren die Vergleichsdreiecke für  $i \rightarrow \infty$  gegen ein Vergleichsdreieck, dessen drei Winkel alle  $\pi$  sind. Insbesondere folgt  $\gamma_2 = \pi$  und  $\alpha_i \rightarrow \pi$ , wegen Proposition 2.45 also auch  $\gamma_1 = \pi$  im Widerspruch zur Annahme.

Es bleibt der Fall  $L(c_2) = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ , aber daraus folgt

$$L(c_1) + L(c_3) = \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}} - L(c_2) = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}.$$

Wäre  $\gamma_2 < \pi$ , so könnte man den Weg von  $p_1$  über  $p_2$  nach  $p_3$  zu einem Weg der Länge  $< \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$  abkürzen. Also muss  $\gamma_2 = \pi$  gelten, da  $c_2$  kürzeste ist. Wir können ein Vergleichsdreieck mit  $\gamma_1 = \gamma_3 = 0$  wählen, und der Satz ist auch in diesem Fall bewiesen.

(e) *Dreiecke von übergroßem Umfang.* Es bleibt nur der Fall  $\kappa > 0$  und

$$L(c_1) + L(c_2) + L(c_3) > \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}.$$

In diesem Fall gäbe es kein Vergleichsdreieck in  $M_\kappa^n$ , also ist zu zeigen, dass dieser Fall nicht eintritt.

Aus dem Satz 2.5 von Rauch oder dem Satz 2.14 von Bonnet-Myers folgt

$$L(c_1) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} \quad \text{und} \quad L(c_2) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}.$$

Nach Voraussetzung gilt auch  $L(c_3) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ . Wegen der Stetigkeit der Abstandsfunktion existiert  $t \in (0, 1)$  mit

$$L(c_1|_{[0,1-t]}) + d(c_1(1-t), c_3(t)) + L(c_3|_{[t,1]}) = \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}.$$

Da  $t > 0$  folgt

$$L(c_1|_{[0,1-t]}) < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} \quad \text{und} \quad L(c_3|_{[t,1]}) < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}},$$

also gilt  $\gamma_2 = \pi$  wie in Schritt (d). Analog zeigt man auch  $\gamma_1 = \pi$ .

Es sei jetzt  $t \in [0, 1]$  minimal mit

$$L(c_1) + d(c_3(t), p_3) + L(c_3|_{[t,1]}) = \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}},$$

es sei  $t_i$  eine Folge mit  $t_i \nearrow t$  und  $b_i$  eine Folge kürzester Geodätischer von  $p_3$  nach  $c_3(t_i)$ . Dann haben die Dreiecke  $\Delta c_1 b_i c_3|_{[t_i,1]}$  Umfang größer als  $\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ , folglich sind die Winkel bei  $c_3(t_i)$  wie oben stets  $\pi$ . Daraus folgt aber, dass  $b_i$  für alle  $i$  auf der Vereinigung von  $c_2$  und  $c_3|_{[0,t_i]}$  verläuft. Analoges gilt für die kürzeste Geodätische  $b := \lim_{i \rightarrow \infty} b_i$ , aber  $L(b) < L(c_2) + L(c_3|_{[0,t]})$ . Also ist  $p_3 = b(0) \neq p_1$  entweder ein innerer Punkt auf  $c_2$ , was unmöglich ist, da  $c_2$  kürzeste ist, oder auf  $c_3|_{[0,t]}$  etwa  $p_3 = c_3(t')$  mit  $t' > 0$ . Aber das führt auf einen Widerspruch, da

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}} = L(c_1) + L(b) + L(c_3|_{[t,1]}) = L(c_1) + L(c_3|_{[t',1]}) < \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}.$$

Folglich können Dreiecke vom Umfang größer als  $\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$  nicht existieren, und der Satz ist vollständig bewiesen.  $\square$

Für die Anwendung des Satzes von Toponogov benötigen wir eine Übertragung des Satzes von der Situation SSS (Seite-Seite-Seite) auf die Situation SWS (Seite-Winkel-Seite).

2.47. FOLGERUNG. *Es sei  $(M, g)$  vollständige Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung  $K \geq \kappa$ , und es sei  $\Delta c_1 c_2 c_3$  ein Dreieck in  $M$  mit kürzesten Seiten  $c_1$  und  $c_2$ , und mit  $\ell_3 \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$  falls  $\kappa > 0$ . Dann existiert ein Vergleichsdreieck  $\Delta \bar{c}_1 \bar{c}_2 \bar{c}_3$  in  $M$  mit  $\bar{\gamma}_1 = \gamma_1$ ,  $\bar{\ell}_2 = \ell_2$  und  $\bar{\ell}_3 = \ell_3$ , und es gilt  $\ell_1 \leq \bar{\ell}_1$ .*

BEWEIS. Das Vergleichsdreieck existiert in der Situation SWS immer und ist bis auf Isometrie eindeutig. Wir unterscheiden zwei Fälle.

- (1) Es gilt die Dreiecksungleichung  $\ell_3 \leq \ell_1 + \ell_2$ . In diesem Fall liefert der Satz 2.41 von Toponogov ein weiteres Vergleichsdreieck  $\Delta \bar{c}'_1 \bar{c}'_2 \bar{c}'_3$  mit den gleichen Seitenlängen wie  $\Delta c_1 c_2 c_3$  und einem Winkel  $\bar{\gamma}'_1 \leq \gamma_1 = \bar{\gamma}_1$ . Aus Bemerkung 2.43 folgt  $\ell_1 = \bar{\ell}'_1 \leq \bar{\ell}_1$ .
- (2) Falls die obige Dreiecksungleichung verletzt ist, folgt aus der Dreiecksungleichung im Vergleichsdreieck, dass

$$\ell_1 < \ell_3 - \ell_2 = \bar{\ell}_3 - \bar{\ell}_2 \leq \bar{\ell}_1. \quad \square$$

Eine weitere interessante Anwendung des Satzes von Toponogov war früher der topologische Sphärensatz. Wir erwähnen diesen Satz nur noch, denn mittlerweile ist der weitaus stärkere differenzierbare Sphärensatz bewiesen. Vorher betrachten wir einen wichtigen Grenzfall.

2.48. BEISPIEL. Es sei  $(M, g)$  der komplex projektive Raum  $\mathbb{C}P^n$  der (reellen) Dimension  $2n$  mit  $n \geq 2$ , versehen mit der Fubini-Study-Metrik wie jeweils in den Übungen. Wir hatten dort gesehen, dass die Schnittkrümmung die Ungleichung  $1 \leq K(E) \leq 4$  für alle Ebenen  $E \subset TM$  erfüllt. Dabei wird  $K = 1$  angenommen für reelle Ebenen  $E = \text{span}\{v, w\}$  mit  $w \perp \{v, iv\}$ , und  $K = 4$  für komplexe Ebenen  $E = \text{span}\{v, iv\}$ . Reskalierung um den Faktor  $\frac{1}{2}$  liefert eine Metrik mit  $\frac{1}{4} \leq K \leq 1$ .

Der komplex projektive Raum ist nicht homöomorph zur Sphäre  $S^{2n}$ ; es gibt mehrere Möglichkeiten, das zu sehen — allerdings leider nicht mit den Mitteln dieser Vorlesung.

- (1) Die Räume haben unterschiedliche Euler-Charakteristiken

$$\chi(\mathbb{C}P^n) = n + 1 > 2 = \chi(S^{2n}),$$

das folgt etwa durch Angabe von Zellzerlegungen oder aus dem Lefschetzschen Fixpunktsatz.

(2) Die Räume haben andere (Ko-) Homologiegruppen. Für  $1 \leq k < n$  gilt nämlich

$$H^{2k}(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \neq 0 = H^{2k}(S^{2n}; \mathbb{Z}) .$$

Das folgt wahlweise aus der Existenz einer Morse-Funktion mit kritischen Punkten in den Geraden  $0, 2, \dots, 2n$  oder einer entsprechenden Zellzerlegung von  $\mathbb{C}P^n$ , oder aus der Leray-Spektralsequenz für das Faserbündel  $S^1 \rightarrow S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ .

(3) Die Räume haben eine unterschiedliche zweite Homotopiegruppe

$$\pi_2(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{Z} \neq 0 = \pi_2(S^{2n}) .$$

Das folgt etwa aus der langen exakten Sequenz der Homotopiegruppen im Bündel  $S^1 \rightarrow S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ , oder aus (1) und dem Satz von Hurewicz.

2.49. SATZ (Topologischer Sphärensatz; Berger, Klingenberg). *Es sei  $M$  eine orientierbare, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $2n$  mit Schnittkrümmung  $\kappa \leq K \leq 1$ , wobei  $\kappa > \frac{1}{4}$ . Dann ist  $M$  homöomorph zur Sphäre  $S^{2n}$ .*

Beispiel 2.48 zeigt, dass  $\frac{1}{4} < \kappa$  notwendig ist. Der Satz gilt auch im ungerade-dimensionalen Fall, wenn man außerdem „orientierbar“ durch „einfach zusammenhängend“ ersetzt.

BEWEIS. Zunächst wissen wir aus dem Satz 2.14 von Bonnet-Myers und dem Satz 2.37 von Klingenberg, dass

$$\frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}} < \pi \leq \rho(M) \leq \text{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} < 2\pi .$$

Insbesondere ist  $M$  kompakt wegen Folgerung 1.101. Wir finden also Punkte  $p, q \in M$  mit

$$d(p, q) = \text{diam}(p, q) .$$

Da  $\rho(M) \geq \pi$ , erhalten wir Diffeomorphismen

$$\exp_p: B_\pi(0_p) \rightarrow B_\pi(p) \quad \text{und} \quad \exp_q: B_\pi(0_q) \rightarrow B_\pi(q) .$$

Wir zeigen zunächst, dass  $M = B_\pi(p) \cup B_\pi(q)$ , anschließend konstruieren wir den gesuchten Homöomorphismus.

Es sei  $v \in T_p M \setminus \{0\}$ . Wir zeigen, dass es eine kürzeste Geodätische  $c: [0, 1] \rightarrow M$  von  $p$  nach  $q$  mit  $\angle_p(\dot{c}(0), v) \leq \frac{\pi}{2}$  gibt. Dazu betrachte die Geodätische  $c_v$  mit  $c_v(0) = p$  und Startvektor  $\dot{c}_v(0) = v$ . Zu jedem  $t > 0$  sei  $c_t: [0, 1] \rightarrow M$  eine kürzeste Verbindung von  $c_v(t)$  nach  $q$ . Falls es eine Folge  $t_i$  gibt mit  $t_i > 0$  und

$$\angle_{c_v(t_i)}(\dot{c}_v(t_i), \dot{c}_{t_i}(0)) \leq \frac{\pi}{2}$$

für alle  $i$ , so dass  $t_i \searrow 0$ , dann konvergiert eine Teilfolge der  $c_{t_i}$  gegen eine kürzeste Verbindung  $c$  mit

$$\angle_p(\dot{c}(0), v) \leq \frac{\pi}{2} .$$

Andernfalls erhalten wir einen Widerspruch wie folgt. Es gibt ein  $t_0 > 0$ , so dass

$$\angle_{c_v(t)}(\dot{c}_v(t), \dot{c}_t(0)) > \frac{\pi}{2} \quad \text{für alle } t \in (0, t_0) .$$

Zu jedem  $t > 0$  konstruiere eine Variation von  $c_t = \gamma_0$  durch Kurven  $\gamma_s: [0, 1] \rightarrow M$  mit  $\gamma_s(0) = c_v(t-s)$  und  $\gamma_s(1) = q$ . Aus der ersten Variationsformel aus Satz 1.65 folgt dann

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} L(\gamma_s) = \left\langle \frac{\dot{c}_t(0)}{\|\dot{c}_t(0)\|}, \dot{c}_v(t) \right\rangle < 0 ,$$

insbesondere existiert ein  $t' \in [0, t)$ , so dass

$$d(c_v(u), q) = L(c_u) \leq L(\gamma_{t-u}) < L(c_t) = d(c_v(t), q) \quad \text{für alle } u \in (t', t) .$$

Da dieses Argument für alle  $t \in (0, t_0)$  funktioniert, ist die Funktion  $t \mapsto d(c_v(t), q)$  streng monoton steigend auf dem Intervall  $(0, t_0)$ , im Widerspruch zur Maximalität von  $d(p, q) = d(c(0), q) = \text{diam}(M)$ .

Wir betrachten jetzt einen weiteren Punkt  $r \in M \setminus B_\pi(p)$  und wählen kürzeste Geodätische  $a$ ,  $b: [0, 1] \rightarrow M$  von  $q$  nach  $r$  und von  $r$  nach  $p$ . Nach dem soeben gezeigten finden wir eine kürzeste Geodätische  $c$  von  $p$  nach  $q$  mit

$$\alpha = \angle_p(-\dot{b}(1), \dot{c}(0)) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Es seien  $\Delta \bar{a}\bar{b}\bar{c}$  und  $\Delta \bar{a}'\bar{b}'\bar{c}$  Vergleichsdreiecke in  $M_\kappa^n$  mit Seitenlängen

$$L(\bar{b}) = L(\bar{b}') = L(b) \in \left[ \pi, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} \right] \quad \text{und} \quad L(\bar{c}) = L(c) \in \left[ \pi, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} \right] \subset \left( \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} \right]$$

und eingeschlossenen Winkeln

$$\bar{\alpha} = \alpha \leq \bar{\alpha}' = \frac{\pi}{2}.$$

Mit dem Seitencosinussatz für  $\kappa > 0$  berechnen wir

$$\cos(\sqrt{\kappa} L(\bar{a}')) = \underbrace{\cos(\sqrt{\kappa} L(\bar{b}'))}_{<0} \cdot \underbrace{\cos(\sqrt{\kappa} L(\bar{c}))}_{<0} > 0,$$

und aus Bemerkung 2.43 und der Folgerung 2.47 aus dem Satz von Toponogov folgt

$$L(a) \leq L(\bar{a}) \leq L(\bar{a}') < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}} < \pi.$$

Somit  $r \in B_\pi(q)$ , und da  $r$  beliebig war, folgt insgesamt

$$M = B_\pi(p) \cup B_\pi(q).$$

Es sei wieder  $c_v$  eine Geodätische mit Startvektor  $v \in S_p M$ . Wir wenden den Zwischenwertsatz auf die Funktion

$$f_v: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f_v(t) = d(c_v(t), q) - d(c_v(t), p) = d(c_v(t), q) - t$$

an. Da  $f_v(0) = \text{diam}(M) > 0$  und nach dem obigen  $f_v(\pi) < 0$ , finden wir einen Wert  $\ell_v \in (0, \pi)$  mit  $f_v(\ell_v) = 0$ . Insbesondere ist  $c_v(\ell_v)$  von  $p$  und  $q$  gleich weit entfernt.

Der Wert  $\ell_v$  ist auch eindeutig. Denn sei  $f_v(\ell) = f_v(\ell') = 0$  für  $\ell < \ell' < \pi$ , dann folgt

$$d(c_v(\ell'), q) = d(c_v(\ell'), p) = d(c_v(\ell'), c_v(\ell)) + d(c_v(\ell), p) = d(c_v(\ell'), c_v(\ell)) + d(c_v(\ell), q).$$

Aber das ist nur möglich, wenn  $q$  auch auf der Geodätischen  $c_v$  liegt, und zwar auf der gleichen Seite von  $c_v(\ell')$  wie  $c_v(\ell)$  und im gleichen Abstand wie  $p$ . Es folgt also  $p = q$ , ein Widerspruch.

Aus der Stetigkeit der Abstandsfunktionen und der Eindeutigkeit von  $\ell(v) := \ell_v$  folgt leicht, dass die Funktion  $\ell$  auf  $S_p M$  stetig ist.

Um einen Homöomorphismus  $F: S^{2n} \rightarrow M$  zu konstruieren, fixieren wir zunächst eine Isometrie  $\Phi: S^{2n-1} \rightarrow S_p M$ . Dann definieren wir

$$F \begin{pmatrix} \sin h \cdot x \\ \cos h \end{pmatrix} = \begin{cases} \exp_p \left( \frac{2h}{\pi} \ell_{\Phi(x)} \Phi(x) \right) & \text{für } h \in [0, \frac{\pi}{2}], \text{ und} \\ \exp_q \left( \left( 2 - \frac{2h}{\pi} \right) (\exp_q^{-1} \circ \exp_p) (\ell_{\Phi(x)} \cdot \Phi(x)) \right) & \text{für } h \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

für alle  $h \in [0, \pi]$  und alle  $x \in S^{2n-1}$ . Man beachte insbesondere, dass die Definitionen für  $h = \frac{\pi}{2}$  zusammenpassen, und dass  $h = 0$  bzw.  $h = \pi$  unabhängig von  $x$  stets den Wert  $p$  bzw.  $q$  liefern. Es folgt die Stetigkeit von  $F$ .



Es sei  $S_{\pm}^{2n} \subset S^{2n}$  die Menge der Punkte mit  $\pm h \geq 0$ . Man sieht leicht, dass  $F$  auf der abgeschlossenen Nordhalbkugel  $S_+^{2n}$  injektiv ist, da  $\exp_p$  auf ganz  $B_\pi(p)$  injektiv ist, und da  $\ell_v < \pi$  für alle  $v \in T_p M$ . Mit dem gleichen Argument ist auch  $F|_{S_-^{2n}}$  injektiv. Nun gilt aber

$$r \in F(S_{\pm}^{2n}) \iff \pm(d(p, r) - d(q, r)) \geq 0$$

für alle  $r \in M$ . und hieraus folgt globale Injektivität.

Zur Surjektivität betrachte wieder  $r \in M$ . Falls  $d(p, r) - d(q, r) \geq 0$ , betrachte die kürzeste Geodätische  $c_v: [0, d(p, r)]$  von  $p$  nach  $r$  mit Startvektor  $v \in S_p M$ , dann gilt

$$r = F \begin{pmatrix} \sin h \cdot x \\ \cos h \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad x = \Phi^{-1}(v) \quad \text{und} \quad h = \frac{\pi d(p, r)}{2\ell_v}.$$

Falls  $d(p, r) - d(q, r) \leq 0$ , betrachte die kürzeste Geodätische  $c_w: [0, d(q, r)]$  von  $q$  nach  $r$  mit Startvektor  $w \in S_p M$ . Wie oben existiert genau ein  $\ell_w$ , so dass  $d(c_w(\ell_w), p) = d(c_w(\ell_w), q)$ . Es folgt

$$r = F \begin{pmatrix} \sin h \cdot x \\ \cos h \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad x = \Phi^{-1} \left( \frac{(\exp_p^{-1} \circ \exp_q)(\ell_w \cdot w)}{\ell_w} \right) \quad \text{und} \quad h = \pi - \frac{\pi d(q, r)}{2\ell_w}.$$

Ein einfaches topologisches Argument zeigt, dass bijektive, stetige Abbildungen zwischen Kompakta Homöomorphismen sind. Damit ist der Satz bewiesen.  $\square$

2.50. SATZ (Differenzierbarer Sphärensatz; Brendle-Schoen). *Es sei  $M$  kompakte, einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, und für alle  $p \in M$  und alle Ebenen  $E, E' \subset T_p M$  gelte  $0 < K(E') \leq 4K(E)$ . Dann ist  $M$  entweder diffeomorph zu einer Sphäre  $S^n$  oder isometrisch zum komplex projektiven Raum  $\mathbb{C}P^k$ , zum quaternionisch projektiven Raum  $\mathbb{H}P^k$ , oder zur Cayley-Ebene  $\mathbb{O}P^2$ .*



## Literatur

- [Ba] W. Ballmann, *Lectures on Kähler Manifolds*, European Mathematical Society (EMS), Zürich 2006.
- [Be] A. L. Besse, *Einstein Manifolds*, Springer, Berlin 1987.
- [CE] J. Cheeger, D. G. Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North-Holland, Amsterdam 1975.
- [GHL] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1987.
- [GKM] D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer, *Riemannsche Geometrie im Großen*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1975.
- [H] D. Huybrechts, *Complex Geometry*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 2005.
- [J] D. Joyce, *Compact Manifolds with Special Holonomy*, Oxford University Press, Oxford 2000.
- [L1] J. M. Lee, *Riemannian manifolds, An introduction to curvature*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [L2] J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [NN] A. Newlander, L. Nirenberg, Complex Analytic Coordinates in Almost Complex Manifolds, *Ann. Math. (2)* 65 (1957), 391–404.
- [P] P. Petersen, *Riemannian Geometry*, third edition, Springer-Verlag, Cham, 2016.
- [S] J. Simons, On the Transitivity of Holonomy Systems, *Ann. Math. (2)* 76 (1962), 213–234