

1. ÜBUNGSBLATT

LINEARE ALGEBRA I

IM WS 2025/26 BEI PROF. DR. S. GOETTE

Abgabe bis Montag 20.10, 10:15 in den Briefkästen oder (als handschriftlich am PC/Tablet generiertes PDF) online auf ILIAS.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie dürfen in Zweiergruppen abgeben.

Aufgabe 1 (2+2+2+2+2 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen über Mengen treffen zu? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung.

- (a) $\{1\} = 1$
- (b) $M \subset N \Leftrightarrow M \cap N = M$
- (c) $M \subset N \Leftrightarrow M \cup N = M$
- (d) $[1, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x^2 \leq 4\}$
- (e) $[1, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x^3 \leq 8\}$

Aufgabe 2 (4+4+2 Punkte)

Seien L, M, N Mengen und $F: M \rightarrow N$ und $G, G': L \rightarrow M$ Abbildungen. Zeigen Sie:

- (a) Ist $F \circ G$ surjektiv, dann auch F .
- (b) Ist $F \circ G$ injektiv, dann auch G .
- (c) Ist F injektiv, so folgt aus $F \circ G = F \circ G'$ bereits $G = G'$.

Aufgabe 3 (3+3+4 Punkte)

Sei $F: X \rightarrow Y$ eine Abbildung und $A, B \subset Y$. Zeigen Sie:

- (a) $F^{-1}(A \cap B) = F^{-1}(A) \cap F^{-1}(B)$,
- (b) $F^{-1}(A \cup B) = F^{-1}(A) \cup F^{-1}(B)$,
- (c) $F^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus F^{-1}(A)$.

Aufgabe 4 (5+3+2 Punkte)

In einem Schulbuch Mathematik, 9. Klasse, findet sich sinngemäß die folgende Aufgabe. Dabei steht das Symbol \bar{X} für $M \setminus X$. Lesen Sie die Aufgabe und bearbeiten Sie dann die sich daran anschließenden Teilaufgaben.

Betrachtet werden die natürlichen Zahlen von 1 bis 10 und die Ereignisse

A : “die Zahl ist gerade”, B : “die Zahl ist höchstens 6”.

- (i) Untersuche, ob $\overline{A \cap B}$ dasselbe Ereignis wie $\overline{A} \cup \overline{B}$ ist.
- (ii) Welches der folgenden Ereignisse ist dasselbe wie $\overline{A \cup B}$?

$$\overline{A \cup B}, \quad \overline{A \cap B}, \quad \overline{A} \cap \overline{B}, \quad A \cup B.$$

- (a) Formulieren Sie die Aufgabenteile (i) und (ii) in unserer Mengennotation. Was ist dabei die Grundmenge M ?
- (b) Lösen Sie (i) und (ii) mit den Methoden aus der Vorlesung.
- (c) Zeigen Sie, dass die obigen Aussagen für alle Mengen M und alle Teilmengen $A, B \subset M$ gelten.