

# 10. ÜBUNGSBLATT

## LINEARE ALGEBRA I

IM WS 2025/26 BEI PROF. DR. S. GOETTE

*Abgabe bis Montag 22.12, 10:15 in den Briefkästen. Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie dürfen in Zweiergruppen abgeben.*

*Begründen Sie alle Aussagen. Sie dürfen Behauptungen aus der Aufgabenstellung vorangegangener Teilaufgaben benutzen, auch wenn Sie sie nicht bewiesen haben.*

### Aufgabe 1 (5+5 Punkte)

- (a) Zeigen Sie: Zwei Vektoren  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  sind genau dann linear abhängig, wenn  $ad = bc$ .
- (b) Seien  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3$  paarweise linear unabhängig, d. h. für je zwei Indizes  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  ist  $\{x_i, x_j\}$  linear unabhängig. Ist dann auch  $\{x_1, x_2, x_3\}$  linear unabhängig? (Beweis oder Gegenbeispiel).

### Aufgabe 2

Bilden Sie alle möglichen Matrixprodukte aus den folgenden drei reellen Matrizen und berechnen Sie diese.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 100 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 98 & 1 \\ -5 & 7 \\ 12 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

### Aufgabe 3 (5+5 Punkte)

Wir betrachten die universellen Eigenschaften aus Proposition 2.49 für Mengen und beliebige Abbildungen zwischen ihnen. Wir definieren die disjunkte Vereinigung

$$U \sqcup V = U \times \{0\} \cup V \times \{1\} \subset (U \cup V) \times \{0, 1\}.$$

Präzisieren und beweisen Sie:

- (a) Die disjunkte Vereinigung erfüllt die universelle Eigenschaft des Koproductes.
- (b) Das kartesische Produkt erfüllt die universelle Eigenschaft des Productes.

#### Aufgabe 4 (2+2+2+2+2 Punkte)

Die folgende Aufgabe findet sich in einem Schulbuch.

Begründen Sie folgende Aussagen.

- a) Ist einer von mehreren Vektoren der Nullvektor, so sind diese Vektoren linear abhängig.
- b) Zwei parallele Vektoren sind linear abhängig.
- c) Lässt man von drei linear unabhängigen Vektoren einen weg, so sind die verbleibenden zwei Vektoren auch linear unabhängig.
- d) Fügt man zu  $n$  linear abhängigen Vektoren ( $n \geq 2$ ) einen weiteren hinzu, so sind die  $n + 1$  Vektoren auch linear abhängig.
- e) Liegen vier Punkte  $A, B, C$  und  $D$  in einer Ebene, so sind die Vektoren  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  und  $\overrightarrow{AD}$  linear abhängig.

Lösen Sie a) – d) in einem beliebigen Rechts- $R$ -Modul  $M$ . Lösen Sie e) im Euklidischen Raum, also in  $\mathbb{R}^3$ .

# 10. PRÄSENZAUFGABEN

## LINEARE ALGEBRA I

IM WS 2025/26 BEI PROF. DR. S. GOETTE

### Aufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel.

- (a) Sei  $(a_1, \dots, a_n) \in M^n$ . Wenn  $(a_1, \dots, a_{n-1})$  ein Erzeugendensystem ist, ist  $(a_1, \dots, a_n)$  auch eins.
- (b) Sei  $(a_1, \dots, a_n)$  ein Erzeugendensystem von  $M$ . Dann ist  $(a_1, \dots, a_{n-1})$  auch eins.
- (c) Sei  $(a_1, \dots, a_n) \in M$  und  $f: M \rightarrow N$  sei linear. Wenn das Tupel  $(f(a_1), \dots, f(a_n))$  linear unabhängig in  $N$  ist, ist  $(a_1, \dots, a_n)$  auch linear unabhängig in  $M$ .
- (d) Seien  $(a_1, \dots, a_n)$  und  $f$  wie in (c). Wenn  $(a_1, \dots, a_n)$  in  $M$  linear unabhängig ist, ist  $(f(a_1), \dots, f(a_n))$  linear unabhängig in  $N$ .
- (e) Seien  $(a_1, \dots, a_n)$  und  $f$  wie in (c). Wenn  $(f(a_1), \dots, f(a_n))$  ein Erzeugendensystem von  $N$  ist, ist  $(a_1, \dots, a_n)$  ein Erzeugendensystem von  $M$ .

### Aufgabe 2

Betrachten Sie die folgenden komplexen Matrizen

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass  $I \cdot I = J \cdot J = K \cdot K = I \cdot J \cdot K = -E$ .

### Aufgabe 3

Betrachten Sie  $\mathbb{Q}$  als  $\mathbb{Z}$ -Modul. Zeigen Sie:

- (a) Jede endliche Teilmenge  $E \subset \mathbb{Q}$  mit  $\#E \geq 2$  ist linear abhängig.
- (b) Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $E = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{Q}$ . Dann existiert  $b \in \mathbb{Q} \setminus \langle E \rangle$ , somit ist  $\mathbb{Q}$  nicht endlich erzeugt.