

11. ÜBUNGSBLATT

LINEARE ALGEBRA I

IM WS 2025/26 BEI PROF. DR. S. GOETTE

Abgabe bis Montag 12.1, 10:15 in den Briefkästen. Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie dürfen in Zweiergruppen abgeben. *Begründen Sie alle Aussagen. Sie dürfen Behauptungen aus der Aufgabenstellung vorangegangener Teilaufgaben benutzen, auch wenn Sie sie nicht bewiesen haben.*

Auf diesem Blatt finden Sie einige Bonusaufgaben. Das heißt, um die 40% der Punkte auf diesem Blatt zu erreichen, benötigen Sie nur 16 Punkte. Sie können aber bis zu 80 Punkte bekommen, wenn Sie alle Aufgaben korrekt lösen.

Aufgabe 1 (2+2+2+4 Punkte)

Wir betrachten \mathbb{R}^n mit dem Standard-Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ aus Definition 1.52. Ein Tupel $B = (b_1, \dots, b_m)$ in \mathbb{R}^n heißt orthonormal, wenn für alle $1 \leq i, j \leq m$ gilt, dass

$$\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Ein orthonormales Erzeugendensystem heißt Orthonormalbasis. Zeigen Sie:

- (a) Ein orthonormales Tupel ist linear unabhängig.
- (b) Eine Orthonormalbasis ist eine Basis.
- (c) Die Standardbasis $E = (e_1, \dots, e_n)$ ist eine Orthonormalbasis.
- (d) Es sei B eine Orthonormalbasis, dann hat die Koordinatenabbildung

$$\beta = \psi_B^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

die Form

$$\beta(v) = \begin{pmatrix} \langle b_1, v \rangle \\ \vdots \\ \langle b_m, v \rangle \end{pmatrix} \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^n.$$

Aufgabe 2

Es sei $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Stellen Sie die Drehung um die Achse durch v um einen rechten Winkel bezüglich der Standardbasis als Matrix dar.

Aufgabe 3 (3+3+4 Punkte)

Wir definieren den Raum der *Polynome* über \mathbb{R} als $\mathbb{R}[X] := \left\{ \sum_{i=0}^k a_i X^i \mid k \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R} \right\}$ mit der üblichen Addition. Durch Multiplikation mit reellen Zahlen als Skalarmultiplikation wird $\mathbb{R}[X]$ zu einem \mathbb{R} -Vektorraum.

- (a) Zeigen Sie: $\{X^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}[X]$.
- (b) Zeigen Sie: Für $x_0 \in \mathbb{R}$ ist auch $\{(X - x_0)^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine Basis von $\mathbb{R}[X]$.
- (c) Stellen Sie das Polynom $X^3 - 3X^2 + 2X - 1$ in den beiden Basen aus (a) und (b) mit $x_0 = 1$ dar.

Aufgabe 4 (6+4 Punkte)

Die folgende Aufgabe stammt sinngemäß aus einem Schulbuch.

Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bildet $p = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ auf $p' = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $q = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ auf $q' = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ ab.

- (a) Bestimmen Sie eine Matrixdarstellung für f .
- (b) Berechnen Sie die Eckpunkte a', b', c', d' des Bildes des Rechtecks mit $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $d = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Zeichnen Sie das Rechteck und den Bildbereich in ein Koordinatensystem.

Überlegen Sie sich eine Lösungsstrategie zu (a). Sie können beispielsweise zunächst ${}_C f_B$ bezüglich geeigneter Basen $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ der Ebene bestimmen, und dann mit Hilfe von Basiswechsel ${}_E f_E$ zur Standardbasis $E = (e_1, e_2)$ ausrechnen.

Aufgabe 5 (5+5 Punkte)

Es sei R ein Ring mit Eins, M und N seien unitäre Rechts- R -Moduln, und $f : N \rightarrow M$ sei eine surjektive lineare Abbildung. Es sei M frei mit Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$.

- (a) Konstruieren Sie mit Hilfe von Bemerkung 2.64 eine lineare Abbildung $g : M \rightarrow N$, so dass $f \circ g = \text{id}_M$.
- (b) Zeigen Sie, dass das Bild $\text{im}(g)$ ein Komplement von $\ker f \subset N$ ist.

Aufgabe 6 (2+2+3+3 Punkte)

Betrachten Sie die Quaternionen \mathbb{H} als \mathbb{R} -Vektorraum mit Basis $B = (1, i, j, k)$. Bestimmen Sie die Matrizen der folgenden \mathbb{R} -linearen Abbildungen $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ bezüglich der Basis B .

- (a) $q \mapsto jq$
- (b) $q \mapsto qk$
- (c) $q \mapsto iq - qj$
- (d) $q \mapsto \frac{1+i}{2}q - \bar{q}\frac{1-i}{2}$

Aufgabe 7

Betrachten Sie die folgenden komplexen Matrizen

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $I \cdot I = J \cdot J = K \cdot K = I \cdot J \cdot K = -E$.

Aufgabe 8 (5+5 Punkte)

Wir betrachten $\mathbb{R}[X]$ mit der Basis $(X^i)_{i \in \mathbb{N}}$ aus Aufgabe 3.

- (a) Beschreiben Sie die Abbildungen $f: P \mapsto P'$ und $g: P \mapsto \frac{1}{X}(P(X) - P(0))$ in dieser Basis.
- (b) Zeigen Sie, dass f und g für alle $k \in \mathbb{N}$ den von X^0, \dots, X^k aufgespannten Unterraum von $\mathbb{R}[X]$ auf sich selbst abbilden, und geben Sie die Matrizen von f, g bezüglich dieser Basis an.