12. Übungsblatt
Lineare Algebra I
im WS 2025/26 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe bis Montag 19.1, 10:15 in den Briefkästen. Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie dürfen in Zweiergruppen abgeben.

Begründen Sie alle Aussagen. Sie dürfen Behauptungen aus der Aufgabenstellung vorangegangener Teilaufgaben benutzen, auch wenn Sie sie nicht bewiesen haben.

Aufgabe 1 (3+3+4 Punkte)

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) Das Tupel $(v_1, \dots, v_n)$ ist eine Basis;

(b) Das Tupel $(v_1, \dots, v_n)$ ist maximal linear unabhängig, d.h. $(v_1, \dots, v_n)$ ist linear unabhängig und $(v_1, \dots, v_n, w)$ ist linear abhängig für alle $w \in V$;

(c) Das Tupel $(v_1, \dots, v_n)$ ist ein minimales Erzeugendensystem, d.h. $(v_1, \dots, v_n)$ ist ein Erzeugendensystem und für kein $i = 1, \dots, n$ ist $(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$ ein Erzeugendensystem.

Aufgabe 2 (5+5 Punkte)

(a) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $U, W \subset V$ seien Unterräume. Zeigen Sie:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

Hinweis: Wählen Sie eine geeignete Basis von V.

(b) Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $U_1, U_2, U_3 \subset V$ seien Unterräume. Gilt dann in Analogie zu Präsenzaufgabe 2(b) für $n = 3$ auch

$$\dim(U_1 + U_2 + U_3) = \dim(U_1) + \dim(U_2) + \dim(U_3) - \dim(U_1 \cap U_2)$$
$$- \dim(U_2 \cap U_3) - \dim(U_1 \cap U_3) + \dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3)?$$

Aufgabe 3

Es seien V, W, X, Y endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume, und $f : V \to W$, $g : X \to Y$ seien linear. Zeigen Sie: Es gibt genau dann Isomorphismen $\varphi : V \to X$ und $\psi : W \to Y$, so dass $\psi \circ f = g \circ \varphi$, wenn $\dim V = \dim X$, $\dim W = \dim Y$ und $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} g$.

Aufgabe 4 (4+6 Punkte)

Die folgende Aufgabe stammt sinngemäß aus einem Schulbuch.

> Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension der Vektorräume
>
> $$U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2,$$
>
> $$V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3,$$
>
> $$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

(a) Lösen Sie diese Aufgabe.

(b) Ergänzen Sie die gefundenen Basen jeweils durch Elemente der Standardbasis zu einer Basis des umgebenden Raumes $\mathbb{R}^k$ ($k = 2$ für U, $k = 3$ für V und W). Wieviel Wahlmöglichkeiten haben Sie jeweils?

12. Präsenzaufgaben

Lineare Algebra I

im WS 2025/26 bei Prof. Dr. S. Goette

Aufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel.

(a) Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum mit $n \geq 1$. Dann existiert ein Erzeugendensystem mit $n+1$ Elementen.

(b) Es sei $\dim V = n$ wie oben. Dann ist jedes Tupel der Länge $(n+1)$ ein Erzeugendensystem.

(c) Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $U, W \subset V$ Unterräume. Dann gilt $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim V$.

(d) Für $U, W \subset V$ wie oben gilt $\dim(U + W) \leq \dim U + \dim W$.

(e) Es sei $f : V \to W$ linear, dann gilt $\dim \ker f = \dim W - \operatorname{rg} f$.

Aufgabe 2

Sei M eine Menge. Zeigen Sie:

(a) Seien $M_1, M_2 \subset M$ zwei endliche Teilmengen. Dann gilt

$$\#(M_1 \cup M_2) = \#M_1 + \#M_2 - \#(M_1 \cap M_2).$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $M_1, \dots, M_n \subset M$ endliche Teilmengen. Zeigen Sie mit Induktion, dass gilt

$$\#\Big(\bigcup_{i=1}^{n} M_i\Big) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_j \leq n} \#\Big(\bigcap_{i=1}^{j} M_{k_i}\Big).$$