13. Übungsblatt
Lineare Algebra I
im WS 2025/26 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe bis Montag 26.1, 10:15 in den Briefkästen. Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie dürfen in Zweiergruppen abgeben.

Begründen Sie alle Aussagen. Sie dürfen Behauptungen aus der Aufgabenstellung vorangegangener Teilaufgaben benutzen, auch wenn Sie sie nicht bewiesen haben.

Aufgabe 1 (5+3+2 Punkte)

Es sei p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p$ der endliche Körper aus Beispiel 2.17. Wir betrachten den durch die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{p-1} x_i = x_p \text{ und } \sum_{i=1}^{p-1} [i]\, x_i = x_{p+1}$$

gegebenen Unterraum $U \subset \mathbb{F}_p^{p+1}$.

(a) Es sei $x = (x_1, \ldots, x_{p+1}) \in \mathbb{F}_p^{p+1}$. Zeigen Sie: entweder gilt $x \in U$, oder es existiert genau ein Paar $(i, y) \in \{1, \ldots, p+1\} \times \mathbb{F}_p$, so dass $x' \in U$, wobei man x' aus x erhält, indem man den i-ten Eintrag von x durch y ersetzt.

(b) Es sei $p = 7$. Bestimmen Sie x_7 und $x_8 \in \mathbb{F}_7$ zu $(x_1, \ldots, x_6) = ([3], [1], [4], [1], [5], [2])$, so dass $(x_1, \ldots, x_8) \in U$.

(c) Sei wieder $p = 7$. "Korrigieren" Sie das Tupel $x = ([3], [1], [4], [1], [5], [2], [4], [3])$ im Sinne von (a).

Aufgabe 2

Es seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über einem Schiefkörper $\mathbf{k}$ mit $\dim V = \dim W$. Zeigen Sie, dass für eine k-lineare Abbildung $F : V \to W$ die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) F ist Isomorphismus.

(b) F ist injektiv.

(c) Es existiert eine lineare Abildung $G : W \to V$ mit $G \circ F = \mathrm{id}_V$.

(d) Es gilt $\mathrm{rg}(F) = \dim V$.

(e) F ist surjektiv.

(f) Es existiert eine lineare Abbildung $H : W \to V$ mit $F \circ H = \mathrm{id}_W$.

Aufgabe 3 (4+2+4 Punkte)

Es seien U, V, W endlichdimensionale Vektorräume und $f_1, f_2 : V \to W$ und $g : U \to V$ lineare Abbildungen. Zeigen Sie:

(a)
$$\left|\operatorname{rg}(f_1) - \operatorname{rg}(f_2)\right| \leq \operatorname{rg}(f_1 + f_2) \leq \operatorname{rg}(f_1) + \operatorname{rg}(f_2).$$

(b)
$$\operatorname{rg}(f \circ g) \leq \min\bigl(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g\bigr).$$

(c)
$$\dim \ker g \leq \dim \ker(f \circ g) \leq \dim \ker f + \dim \ker g.$$

Aufgabe 4

Die folgende Aufgabe ist eine leichte Abwandlung einer Schulbuchaufgabe.

> Untersuchen Sie jeweils die Lage der Ebenen E_1, E_2, E_3. Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte der drei Ebenen.
>
> (a)
> $$\begin{aligned} E_1 &: \ -x + 3y + 2z = 7, \\ E_2 &: \ 3x - 2y + 4z = -17, \\ E_3 &: \ 2x + y - 4z = 0. \end{aligned}$$
>
> (b)
> $$\begin{aligned} E_1 &: \ 2x - 3y + z = 1, \\ E_2 &: \ -4x + 3y - z = 7, \\ E_3 &: \ -3y + z = 9. \end{aligned}$$
>
> (c)
> $$\begin{aligned} E_1 &: \ 4x + 9y = 1, \\ E_2 &: \ -4x - 2z = 2, \\ E_3 &: \ 9y - 2z = -5. \end{aligned}$$

Geben Sie bei jeder Teilaufgabe außerdem an, ob $E_1 \cap E_2$, $E_1 \cap E_3$ und $E_2 \cap E_3$ Geraden sind und wie diese Geraden gegebenenfalls zueinander liegen (dazu ist es möglicherweise nicht erforderlich, diese Schnittmengen explizit anzugeben).

13. Präsenzaufgaben

Lineare Algebra I

im WS 2025/26 bei Prof. Dr. S. Goette

Aufgabe 1

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel. In (a), (b) sei $\mathbf{k}$ ein (Schief-)körper und $m < n$.

(a) Es gibt injektive Abbildungen $f : \mathbf{k}^n \to \mathbf{k}^m$.

(b) Es gibt surjektive Abbildungen $f : \mathbf{k}^n \to \mathbf{k}^m$.

(c) Invertierbare Matrizen sind quadratisch.

(d) Der Schnitt zweier affiner Unterräume ist ein affiner Unterraum.

Aufgabe 2

Für $\mathbf{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ und $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_{m,n}(\mathbf{k})$ definieren wir $A^* = (\overline{a_{ji}})_{i,j}$, dabei sei $\overline{x} = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Wenn $\mathbf{k}$ kommutativ ist, gilt $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

(b) Für $\mathbf{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ gilt $(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$.