14. Übungsblatt
Lineare Algebra I
im WS 2025/26 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe bis Montag 2.2, 10:15 in den Briefkästen. Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie dürfen in Zweiergruppen abgeben.

Begründen Sie alle Aussagen. Sie dürfen Behauptungen aus der Aufgabenstellung vorangegangener Teilaufgaben benutzen, auch wenn Sie sie nicht bewiesen haben.

Aufgabe 1 (5+5 Punkte)

Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mit dem Gauß-Verfahren über dem Körper $\mathbf{k}$:

(a) Für $\mathbf{k} = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 \quad -2x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 - 3x_2 \quad +x_3 + 2x_4 &= -3 \\ -x_1 - x_2 \quad +5x_3 + 4x_4 &= 2 \end{aligned}$$

(b) Für $\mathbf{k} = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} [4]\,x \qquad\qquad +[3]\,z &= [1] \\ x + [3]\,y \qquad +z &= [0] \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (5+5 Punkte)

Sind die folgenden Tupel von Vektoren linear unabhängig in $\mathbb{C}^3$? Falls ja, dann bilden sie eine Basis von $\mathbb{C}^3$. Bestimmen Sie in diesem Fall die Koordinaten von $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ 1 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis.

(a) $B = (v_1, v_2, v_3)$ mit $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ 1+3i \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3-i \end{pmatrix}.$

(b) $C = (w_1, w_2, w_3)$ mit $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1-i \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}.$

Aufgabe 3

Invertieren Sie die folgenden Matrizen, falls möglich.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix} [1] & [2] \\ [2] & [1] \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}), \; C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ j & 2k \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{H})$$

Aufgabe 4 (2+4+2+2 Punkte)

Die “Regressiongerade” ist eine Gerade der Form $y = mx + t$, die eine gegebene Menge von Punkten (x_i, y_i) möglichst gut approximiert. In einem Schulbuch findet sich die folgende Aufgabe.

(i) Berechnen Sie die Gleichung der Regressiongerade zu den gegebenen Daten

x	1	3	4	6	9
y	7	20	21	32	50

(ii) Schätzen Sie mithilfe der Regressiongerade die y-Werte zu $x = 10$ und $x = 25$.

(a) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem $A \cdot \begin{pmatrix} m \\ t \end{pmatrix} = b$ auf, so dass $m, t \in \mathbb{R}$ genau dann eine Lösung bilden, wenn alle Datenpunkte auf der Geraden $y = mx + t$ liegen.

(b) Bestimmen Sie eine approximative Lösung dieses Gleichungssystems mit der Methode der kleinsten Quadrate.

(c) Tragen Sie die Gerade $y = mx + t$ und die Punkte aus (i) in eine Skizze ein.

(d) Lösen Sie (ii) mit m, t aus (b).

14. Präsenzaufgaben
Lineare Algebra I
im WS 2025/26 bei Prof. Dr. S. Goette

Aufgabe 1

Es sei $A \in M_{m,n}(\mathbf{k})$ und $b \in \mathbf{k}^m$. Außerdem sei $\alpha : \mathbb{F}_2^2 \times \mathbb{F}_2^2 \to \mathbb{F}_2$ gegeben durch $\alpha\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = xu+yv$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel.

(a) Wenn $m \leq n$ gilt, hat $A \cdot x = b$ immer mindestens eine Lösung.

(b) Wenn $m > n$ gilt, hat $A \cdot x = b$ nie eine Lösung.

(c) Wenn $\operatorname{rg}(A) \geq m$ gilt, hat $A \cdot x = b$ immer mindestens eine Lösung.

(d) Die Abbildung α ist alternierend.

(e) Die Abbildung α ist antisymmetrisch, das heißt es gilt $\alpha(p, q) = -\alpha(q, p)$ für alle $p, q \in \mathbb{F}_2^2$.

Aufgabe 2

Wir suchen eine Gerade, die möglichst nah an den vier Punkten

x	1	1	−1	−1
y	1	−1	1	−1

vorbeigeht.

(a) Zeigen Sie, dass für jede Gerade g durch den Ursprung die Summe der Quadrate der Abstände obiger Punkte zur Geraden g gleich ist.

(b) Suchen Sie jetzt eine Gerade der Form $y = ax+b$ mit der Methode der kleinsten Quadrate.

(c) Bestimmen Sie auch eine Gerade der Form $x = cy + d$ mit der Methode der kleinsten Quadrate.

(d) Warum erhalten Sie in (a), (b) und (c) unterschiedliche Ergebnisse?