

3. ÜBUNGSBLATT

LINEARE ALGEBRA I

IM WS 2025/26 BEI PROF. DR. S. GOETTE

Abgabe bis Montag 3.11, 10:15 in den Briefkästen.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt. Sie dürfen in Zweiergruppen abgeben.

Aufgabe 1 (4+4+2 Punkte)

Sei M eine endliche Menge. Gesucht ist eine Halbordnung $\preccurlyeq$ auf $\mathcal{P}(M)$, so dass für $A, B \subset M$ gilt

$$(*) \quad \#A < \#B \Rightarrow A \preccurlyeq B.$$

- (a) Warum gibt es keine Halbordnung $\preccurlyeq$, so dass für alle $A, B \subseteq M$ gilt

$$\#A \leq \#B \Rightarrow A \preccurlyeq B,$$

wenn M mindestens zwei Elemente enthält?

- (b) Geben Sie eine Halbordnung auf $\mathcal{P}(\{1, 2\})$ an, die $(*)$ erfüllt.

- (c) Beschreiben Sie ein allgemeines Verfahren, um für jede Menge eine Halbordnung $\preccurlyeq$ auf $\mathcal{P}(M)$ zu finden, die $(*)$ erfüllt.

Aufgabe 2 (3+3+2+2 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Für $k, l \in \mathbb{Z}$ gelte $k \sim l$ genau dann, wenn ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $l - k = mn$ existiert.

- (a) Zeigen Sie: “ $\sim$ ” ist eine Äquivalenzrelation. Wieviele Elemente hat der Quotient $\mathbb{Z}/\sim$?
- (b) Es seien $k, l, p, q \in \mathbb{Z}$ mit $[k] = [l]$, $[p] = [q]$ in $\mathbb{Z}/\sim$ beliebig. Zeigen Sie, dass $[k+p] = [l+q]$ und $[kp] = [lq]$.
- (c) Zeigen Sie mit (b), dass wir Addition und Multiplikation auf $\mathbb{Z}/\sim$ erklären dürfen durch

$$[k] + [p] = [k + p] \quad \text{und} \quad [k] \cdot [p] = [kp].$$

- (d) Überprüfen Sie mindestens zwei der Rechenregeln aus Satz 1.41 (a)-(d).

Aufgabe 3 (3+2+3+2 Punkte)

Es sei $f: M \rightarrow N$ eine beliebige Abbildung zwischen Mengen. Wir definieren eine Relation $\sim$ auf M für alle $x, y \in M$ durch

$$x \sim y \iff f(x) = f(y).$$

Zeigen Sie:

- (a) Die Relation “ $\sim$ ” ist eine Äquivalenzrelation.
- (b) Die Abbildung f induziert eine Abbildung $\bar{f}: M/\sim \rightarrow \text{im}(f)$.
- (c) Die Abbildung $\bar{f}$ aus (b) ist bijektiv.
- (d) Schreiben Sie f als Verkettung von $\bar{f}$, einer Inklusion, und einer Quotientenabbildung.

Hinweis: Achten Sie in (d) auf die Reihenfolge.

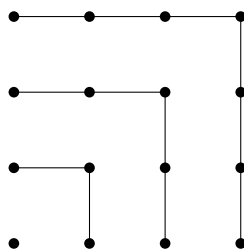
Aufgabe 4 (4+4+2 Punkte)

Die folgende Aufgabe stammt aus einem Schulbuch “Vertiefungskurs Mathematik”.

Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl n gilt:

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2.$$

- (a) Lösen Sie die Aufgabe durch vollständige Induktion.
- (b) Erklären Sie die Gleichung anhand des folgenden Bildes:



- (c) Vergleichen Sie die Zugänge aus (a) und (b). Was sind Gemeinsamkeiten, was sind Unterschiede?

3. PRÄSENZAUFGABEN

LINEARE ALGEBRA I

IM WS 2025/26 BEI PROF. DR. S. GOETTE

Aufgabe 1

Beweisen oder widerlegen Sie:

- (a) Für alle endlichen Mengen gilt $\#(M \cup N) = \#M + \#N$.
- (b) Subtraktion in $\mathbb{Z}$ ist kommutativ.
- (c) Subtraktion in $\mathbb{Z}$ ist assoziativ.
- (d) Es gibt eine Zahl $x \in \mathbb{Q}$, so dass $y = x/y$ für alle $y \in \mathbb{Q}$.
- (e) Es gibt eine Zahl $x \in \mathbb{Q}$, so dass $y = y/x$ für alle $y \in \mathbb{Q}$.

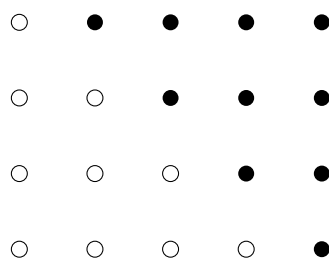
Aufgabe 2

Zu zeigen ist

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Beweisen Sie die Gleichung durch vollständige Induktion.
- (b) Lässt sich mit Hilfe des folgenden Bildes ein Beweis finden?



- (c) Vergleichen Sie (a) und (b). Wie würden Sie anderen die Gleichung erklären?